PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt, Harry Smit, Michelle Sweering en Bas Verseveldt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.
Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 april 2017.

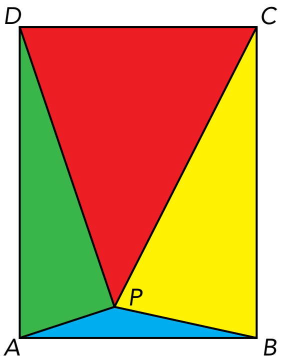
DE GOEDE INZENDERS VAN NOVEMBER 2016

342: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Arie Heikoop, Kampen; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Pascal Kwanten, Almere; Fook Sars en Boris Nijhoff (klas 2), Christelijk Gymnasium, Utrecht.
343: Hannah Creutzburg en Ida Bakker (klas 2), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Stan Ferguson (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Hugo Hosman (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht.
344: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Stan Ferguson (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Arie Heikoop, Kampen; Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwanten, Almere; Willem Vlasblom (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht.
345: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Arie Heikoop, Kampen; Rein Janssen Groesbeek (klas 6), Stedelijk Gymnasium, Utrecht; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen.

Cadeaubonnen: Marijn Adriaanse en Corijn Rudrum.
Stand laddercompetitie: Rein Janssen Groesbeek (21 p; cadeaubon), Anton van Es (15 p), Sander Engelberts (14 p), Oscar Heijdra (13 p), Levi van de Pol (12 p), Jan Bosma (10 p), Rainier van Es (7 p), Sebastiaan Ceuppens (6 p), Rinze Hallema (6 p), Stef Rasing (6 p), Dominique Titulaer (6 p), Marijn Adriaanse (5 p), Merlijn Hunik (5 p), Leanna van Dijk (4 p), Antonie Moes (4 p), David Oosterom (4 p), Stan Ferguson (3 p), Roos van Herrewegen (3 p), Johan van der Marck (3 p), Maarten Stremler (3 p), Lisan ten Hove (2 p), Lucia Komen (2 p), Sietske Koolhof (2 p), Willem VlasblomSterre ter Beek (1 p), Stijn van Bemmel (1 p), Hannah Creutzburg en (2 p), Ida Bakker (1 p), Gerben-Jan Hooijer (1 p), Lotte Middelberg (1 p), Leon van Mierlo (1 p), Alwin van der Paardt (1 p), Bram Pel (1 p), Youri Pouw (1 p), Fook Sars en Boris Nijhoff (1 p), Eva Teeling (1 p), Bruno Vermeer (1 p), Jan Willem de Waard (1 p), Senne Willems (1 p).

OPGAVE 350

Een papier wordt opgevouwen en ziet er ná het vouwen uit als op onderstaand plaatje. De rode, blauwe, groene en gele flap zijn achtereenvolgens langs de randen AB, BC, CD en AD gevouwen naar punt P. Vouw het papier nu weer helemaal open. Toon aan dat er dan een vierhoek ontstaat.

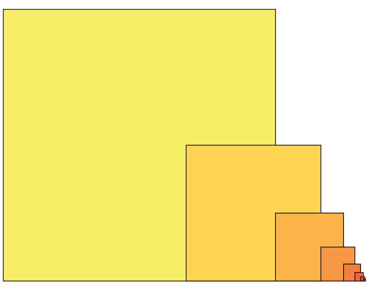


OPGAVE 351

We hebben een digitale klok, die loopt van 00:00 tot en met 23:59 (dus met een nauwkeurigheid van minuten). Soms vormen de cijfers van de klok (zonder de :) een kwadraat. In hoeveel van zulke gevallen is óók het totaal aantal minuten sinds 00:00 een kwadraat? Een voorbeeld van zo'n tijdstip is 01:21, want 121 is een kwadraat (namelijk 11^2), en 01:21 is 81 minuten na 00:00, wat ook een kwadraat is (namelijk 9^2).

OPGAVE 352

Hieronder zie je een serie steeds kleiner wordende vierkanten. Het grootste vierkant is 90×90 cm^2. Als je naar rechts gaat is elk volgend vierkant half zo hoog als het voorafgaande. De linker onderhoek ligt steeds op tweederde deel van de onderzijde. Bepaal de totale oppervlakte van de vierkanten.



OPGAVE 353

De getallen a, b en c voldoen aan de volgende twee vergelijkingen:

$$a + b + c + abc = 0$$
$$ab + ac + bc + 1 = 0$$

Vind alle oplossingen (a, b, c).

OPLOSSING 342

Laat zien dat het getal $2 \cdot 7^n + 4 \cdot 5^{2n} + 3$ deelbaar is door 9 voor elk natuurlijk getal n.

Oplossing. We maken gebruik van het feit dat 25^n altijd te schrijven is als 7^n plus een negenvoud. Dit is een specifiek geval van de zogeheten 'negenproef', die al vaker in dit blad is besproken, onder andere in het artikel 'Slim vermenigvuldigen', *Pythagoras* 53-1 (september 2013).
Er geldt: $5^{2n} = 25^n = (7 + 18)^n = 7^n$ plus een negenvoud. Zodoende is $2 \cdot 7^n + 4 \cdot 5^{2n} + 3 = 2 \cdot 7^n + 4 \cdot 7^n + 3$ + negenvoud $= 6 \cdot 7^n + 3$ + negenvoud. Nu geldt dat $6 \cdot 7^n$ altijd een negenvoud plus 6 is. Dit kun je eenvoudig inzien met de negenproef. Uiteindelijk volgt dat $2 \cdot 7^n + 4 \cdot 5^{2n} + 3 = 6 \cdot 7^n + 3$ + negenvoud = negenvoud + 9 = negenvoud.
De opgave is overigens ook met behulp van 'volledige inductie' op te lossen, een bewijsprincipe dat ook al vaker in dit blad heeft gestaan, en op sommige middelbare scholen in de bovenbouw wordt behandeld.

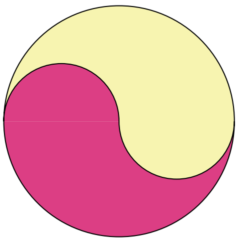
OPLOSSING 343

In een museum kun je in de garderobe je jas afgeven. Er wordt een bonnetje met nummer bevestigd aan de jas, en eenzelfde bonnetje met nummer ontvang je. Na afloop van het bezoek kun je met dit bonnetje je jas weer ophalen. Het personeel dat in de garderobe werkt, maakte onlangs fouten met het onjuist lezen (op de kop lezen) van bonnetjes. Hierop besloot de directie alle nummers die op twee manieren te lezen zijn te verwijderen (bijvoorbeeld 861 en 198). Hoeveel getallen, tussen 000 en 999, zijn wél bruikbaar? Misverstanden ontstaan bij de cijfers 0, 1, 6, 8 en 9.

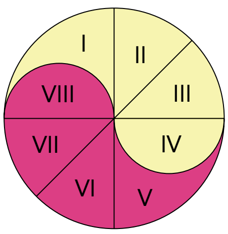
Oplossing. Het is duidelijk dat als een nummer minstens één van de getallen 2, 3, 4, 5, 7 bevat, het bonnetje eenduidig is. Eventueel onduidelijke bonnetjes bevatten alléén cijfers uit de verzameling {0, 1, 6, 8, 9}. Dat zijn in het totaal $5^3 = 125$ getallen. Een aantal van de getallen die je met deze cijfers kunt vormen leiden niet tot problemen, namelijk als de bon na een draaiing van 180 graden hetzelfde getal aangeeft. Daarvoor moet in het midden een 0, 1 of 8 staan. Op de eerste plaats kunnen alle vijf cijfers voorkomen. Steeds is dan het laatste cijfer uniek bepaald (want dat moet identiek zijn aan het eerste cijfer). Het gaat om 15 getallen, namelijk 000, 010, 080, 101, 111, 181, 609, 619, 689, 808, 818, 888, 906, 916 en 986. Het aantal te gebruiken getallen is dus $10^3 - 5^3 + 15 = 890$.

OPLOSSING 344

Hieronder zie je een taartje voorzien van bananen- en frambozencrème. Eric en Suzan willen dit taartje delen, zó dat beiden evenveel taart krijgen met bananen- en frambozencrème. Hoe kun je de taart met één snede eerlijk in twee delen? De rand tussen de bananen- en frambozencrème bestaat uit twee identieke halve cirkels.



Oplossing. Neem aan dat de straal van het cirkelvormige taartje gelijk is aan 1. Teken drie lijnen door het middelpunt: één verticaal, één horizontaal en één diagonaal, zoals in onderstaande figuur. De cirkel wordt zo in acht stukken verdeeld. Die stukken zijn allemaal even groot. Voor de delen II, III, VI en VII is dat direct duidelijk (die hebben elk oppervlakte $\frac{1}{8}\pi$). De delen IV en VIII hebben elk oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot \pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8}\pi$. Voor de delen I en V blijft dan ook elk $\frac{1}{8}\pi$ over. De gezochte snijlijn is dus de diagonale lijn.



OPLOSSING 345

In de volgende optelsom komen alle cijfers van 0 tot en met 9 voor. Een getal begint uiteraard niet met een 0. Helaas zijn alle cijfers verdwenen. Bepaal het aantal mogelijke oplossingen.

$$\begin{array}{r} \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ + \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ - \\ \hline \cdot \end{array}$$

Oplossing. We vullen variabelen a, b, ..., j in:

$$\begin{array}{r} a\,b \\ c\,d\ + \\ \hline e\,f\,g \\ h\,i\ - \\ \hline j \end{array}$$

Met ab, cd, efg, hi en j geven we de verschillende getallen weer. We hebben de volgende observaties:

- ab, $cd < 100$, dus $efg < 200$, dus $e = 1$.
- $j < 10$ en $efg > 100$, dus $hi > 90$, dus $h = 9$.
- $hi < 100$ en $j < 10$, dus $efg < 1100$, dus $f = 0$.
- $a + c = 9$ of $a + c = 10$.
- $i + j = g + 10$ en $b + d = g$ of $b + d = g + 10$.

We maken een tabel met de resterende cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8, waarbij we er van uitgaan dat $b < d$ en $i < j$:

g	i	j	b	d	rest (a en c)
2	5	7	4	8	36
2	4	8	5	7	36
3	5	8	6	7	24
3	6	7	5	8	24
4	6	8	X	X	X
5	7	8	2	3	46
6	X	X	2	4	X
7	X	X	3	4	X
8	X	X	3	5	X

Uiteindelijk moeten we het aantal oplossingen tellen. Voor elke regel met een oplossing die we vinden geldt dat a en c kunnen worden verwisseld, maar ook b en d en ook i en j. Daarmee is het totale aantal oplossingen een factor 8 groter. Het totale aantal oplossingen is dus 24.