PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt, Harry Smit, Michelle Sweering en Bas Verseveldt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.
Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

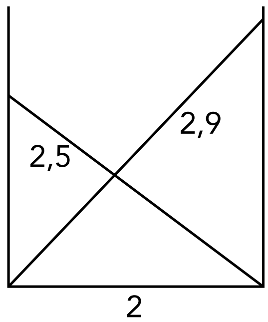
HOE IN TE ZENDEN? Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2017.

DE GOEDE INZENDERS VAN APRIL 2017

354: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 5), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Rinze Hallema (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Arie Heikoop, Kampen; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwanten, Almere; Pim Meulenesteen (klas 4), Montessori Lyceum, Amsterdam.
355: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 5), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Rinze Hallema (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Arie Heikoop, Kampen; Arie van der Kraan, Nuth; Pim Meulenesteen (klas 4), Montessori Lyceum, Amsterdam; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen.
356: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 5), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Arie Heikoop, Kampen.
357: Marijn Adriaanse (klas 3), Norbertuscollege, Roosendaal; Thomas Boxman (klas 5), Pleysier College Westerbeek, Den Haag; Hanna ten Brink, Amsterdam; Arie Heikoop, Kampen; Bart Marinussen, Culemborg; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Pascal Wiezer, Waddinveen.
Cadeaubonnen: Rinze Hallema en Thomas Boxman.
Stand laddercompetitie: Marijn Adriaanse (17 p; cadeaubon), Levi van de Pol (12 p), Corijn Rudrum (11 p), Jan Bosma (10 p), Rainier van Es (9 p), Rinze Hallema (9 p), Sebastian Weiermann (8 p), David Oosterom (7 p), Thomas Boxman (6 p), Rein Janssen Groesbeek (6 p), Niels Kolenbrander (6 p), Dominique Titulaer (6 p), Ceren Ugurlu (6 p), Irem Ugurlu (6 p), Lisan ten Hove (5 p), Merlijn Hunik (5 p), Leanna van Dijk (4 p), Stan Ferguson (3 p), Roos van Herrewegen (3 p), Johan van der Marck (3 p), Maarten Stremler (3 p), Lucia Komen (2 p), Sietske Koolhof (2 p), Pim Meulenesteen (2 p), Tunnis Oosterhoff (2 p), Willem Vlasblom (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Hannah Creutzburg en Ida Bakker (1 p), Hugo Hosman (1 p), Leon van Mierlo (1 p), Bram Pel (1 p), Fook Sars en Boris Nijhoff (1 p), Eva Teeling (1 p), Bruno Vermeer (1 p).

OPGAVE 362

In een steeg van 2 meter breed worden twee ladders van 2,5 en 2,9 meter zoals in onderstaande figuur tegen de twee tegenoverstaande gevels geplaatst. Op welke hoogte kruisen de ladders elkaar?

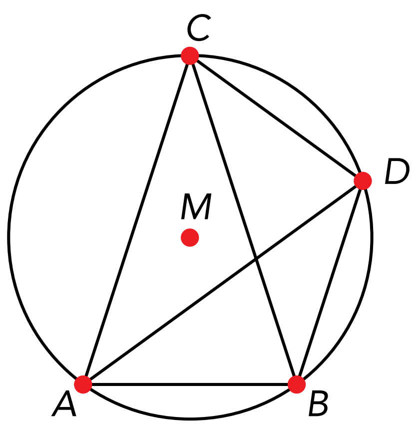


OPGAVE 363

Arthur kiest steeds twee getallen: één uit de verzameling {1, 2, 3, ..., 20}, en één uit de verzameling {21, 22, 23, ..., 30}, en vermenigvuldigt ze. Dit doet hij voor alle verschillende tweetallen. Hij telt alle uitkomsten op: wat is de som?

OPGAVE 364

Gegeven is een gelijkbenige driehoek ABC met $|AC| = |BC|$. De lijn door B evenwijdig met AC en de omgeschreven cirkel van driehoek ABC snijden elkaar in punt D. Ten slotte geldt dat $\angle BAD = \angle ACB$. Bereken $\angle ACB$.



OPGAVE 365

De getallen $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \ldots$ zijn harmonische getallen. Kun je de som

$$J(n) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{3}{n-2} + \cdots + \frac{n-1}{2} + \frac{n}{1}$$

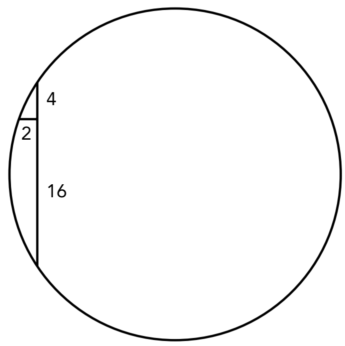
uitdrukken in een expressie waarin het harmonische getal

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

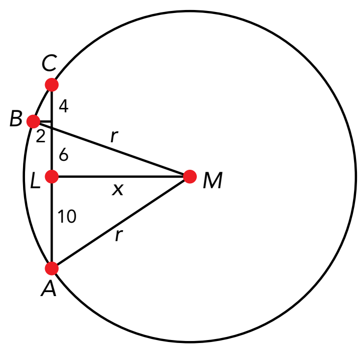
voorkomt?

OPLOSSING 354

Hieronder zie je een cirkel met twee lijnstukken die loodrecht op elkaar staan. Wat is de straal van de cirkel?



Oplossing. Noem het middelpunt van de cirkel M, en de drie op de cirkel gemarkeerde punten A, B en C. Het middelpunt van lijnstuk AC noemen we L. Omdat driehoek AMC gelijkbenig is, staat LM loodrecht op AC. Omdat $|AC| = 20$, is $|AL| = 10$. We noemen de straal van de cirkel r en de lengte van het lijnstuk LM noemen we x. Met Pythagoras vinden we $x^2 + 10^2 = r^2$ en $(x + 2)^2 + 6^2 = r^2$. Door het verschil te nemen van deze twee vergelijkingen vinden we $4x + 40 = 100$, ofwel $x = 15$. Dan volgt $r^2 = 325$ en dus $r = 5\sqrt{13}$.



31

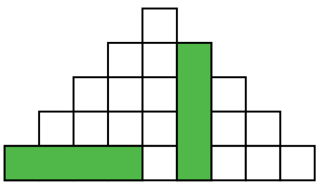
OPLOSSING 355

Hoe vaak per dag staan de grote en kleine wijzer precies loodrecht op elkaar?

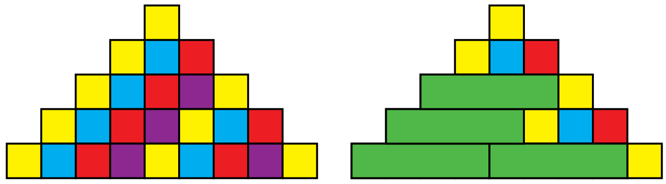
Oplossing. Als de kleine wijzer (uren) eenmaal rond gaat, dan gaat ondertussen de grote wijzer (minuten) 12 maal rond. Dus in 12 uur tijd haalt de grote wijzer de kleine wijzer 11 maal in. In zo'n periode (12/11 uur) staat de grote wijzer eenmaal 90° na de kleine wijzer en eenmaal 90° voor de kleine wijzer. Een etmaal beslaat twee periodes van 12 uur, dus gedurende een etmaal maken de grote en kleine wijzer 44 maal een hoek van 90°.

OPLOSSING 356

Een *n-piramide* is een piramide zoals in onderstaande figuur. De piramide bestaat uit n rijen witte blokjes (in de figuur is $n = 5$, maar deze opgave gaat over algemene n). De bovenste rij 1 heeft blokje, de tweede rij 3 blokjes, de derde rij 5 blokjes, ..., de n-de rij $2n - 1$ blokjes. Het middelste blokje van elke rij ligt steeds precies onder het blokje in de bovenste rij. We leggen een aantal groene rechthoeken van vier naastgelegen blokjes neer. Die rechthoeken moeten allemaal helemaal in de piramide liggen en verschillende rechthoeken mogen elkaar niet overlappen. In de figuur zijn twee van zulke rechthoeken getekend. Wat is het kleinst mogelijke aantal blokjes van een n-piramide dat niet door een groene rechthoek wordt overdekt?



Oplossing. Kleur de blokjes van de n-piramide zoals in de linkerfiguur (in de rechterkolom). In elke rij is het eerste blokje geel, het volgende blokje blauw, dan volgt rood en ten slotte paars. Dan beginnen we weer van voren af aan, en herhalen dit tot de hele rij gevuld is. Door deze kleuring staan overal op vier opeenvolgende blokjes de vier verschillende kleuren geel, blauw, rood en paars. We gaan vervolgens de blokjes met groene 1×4-rechthoeken beplakken, zó dat alle paarse blokjes worden overdekt: zie de rechterfiguur. Er kan op geen enkele manier een extra 1×4-rechthoek worden gebruikt. Bij de oneven rijen blijft één blokje over (geel), bij de even rijen blijven drie blokjes over (geel, blauw en rood). Het aantal blokjes dat niet wordt overdekt, is voor een 1-pirmide 1, voor een 2-piramide 4, voor een 3-piramide 5, voor een 4-piramide 8, en voor een n-piramide is het $2n - 1$ als n oneven is, en $2n$ als n even is.



OPLOSSING 357

Op een eiland leven drie soorten mensen: mensen die uitsluitend de waarheid spreken, mensen die soms de waarheid spreken en soms liegen, en mensen die uitsluitend liegen. Mensen die tot dezelfde soort behoren, dragen allemaal eenzelfde kleur pet. Er zijn gele, rode en blauwe petten. Een toerist die het eiland bezoekt, is niet op de hoogte welke kleur bij welke groep hoort. De toerist ziet drie mannen met verschillend gekleurde petten.
De man met de rode pet zegt tegen de toerist: 'Ik lieg vaker dan iemand met een gele pet.'
Daarna zegt de man met de blauwe pet: 'De man met de rode pet heeft zojuist gelogen.'
Tot slot zegt de man met de gele pet: 'Precies een van de twee mannen met de rode en blauwe pet heeft zojuist gelogen.'
Kan de toerist nu bepalen bij welke soorten mensen de petkleuren horen?

Oplossing. Iemand die de waarheid spreekt, zal nooit zeggen dat hij vaker liegt dan iemand anders. Iemand die altijd liegt, spreekt de waarheid als hij zegt dat hij vaker liegt dan iemand anders. Zodoende is de persoon met de rode pet de persoon die soms de waarheid spreekt en soms liegt.
Als de persoon met de blauwe pet de waarheid spreekt, dan heeft de persoon met de rode pet klaarblijkelijk gelogen. Dus dan spreekt de persoon met de rode pet altijd de waarheid. Maar dat klopt niet met het feit dat hij zojuist heeft gelogen. Als de persoon met de blauwe pet heeft gelogen, dan heeft de persoon met de rode pet kennelijk de waarheid gesproken.