Functies onderzoeken

January 9, 2023

1 Functies tekenen

We gaan functies tekenen en onderzoeken. In de opeenvolgende paragrafen komen diverse functies voorbij. Daarbij hebben we ons laten inspireren door het eindexamen VWO wiskunde B, 2022 tijdvak 1 van mei 2022.

1.1 Inhoud

1.2 1. Functieonderzoek

Functieonderzoek is een belangrijk onderdeel van het VWO eindexamen Wiskunde B. Het is een onderwerp dat minder vaak ter sprake komt in Pythagoras. We maken hier een uitzondering. We laten zien wat je kunt doen (ter ondersteuning) met Python. Verwacht geen wonderen. Python sec kan niet de afgeleide berekenen. En de beredenering, die moet je echt zelf doen. Als toegift toveren we enkele fraaie plaatjes tevoorschijn.

1.3 2. Functies tekenen in Python

Het tekenen van de functies gebeurt met matplotlib. Dat is vrij technisch. Hieronder worden enkele details uitgelegd die wij gebruiken. Voor andere details moet je kijken op internet.

- Numpy heeft een procedure linspace die een lijst van x-waarden genereert, gegeven X_0 en X_1. De derde variabele is NP, het aantal punten dat wordt getekend. Om de Bezier Kromme te tekenen (zie 6. en 7.) dan wordt gebruik gemaakt van een parameter beschrijving (bewegingsbeschrijvingen). We hebben hier te maken met een aantal t-waarden en drukken x en y uit in t.

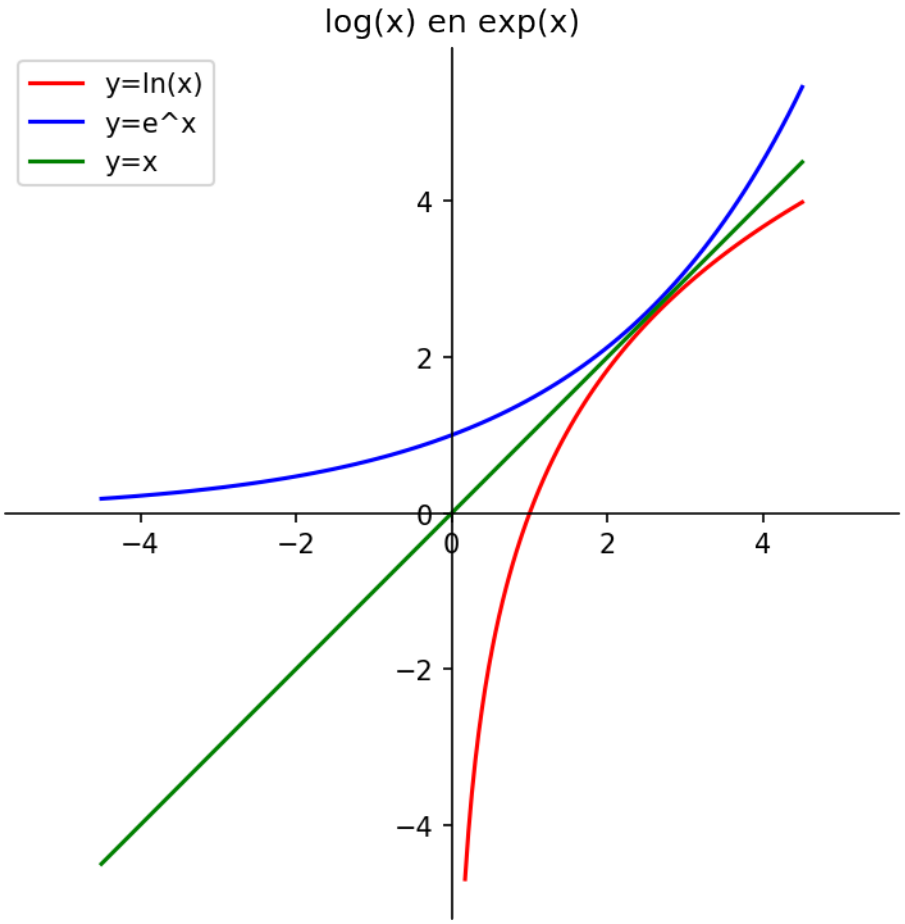
- In elke functie maken we gebruik van fig = plt.figure(figsize=(6, 6), dpi=150). Door de waarde achter dpi aan te passen kun je een plaatje krijgen met hogere of lagere resolutie, belangrijk voor je werkstuk.
- Ook keert ax = fig.add_subplot(1, 1, 1) altijd terug. In principe kun je verschillende plotten naast en onder elkaar plaatsen. Daarvoor moeten de coordinaten worden aangepast.
- Met plt.plot(x,y, 'r',label='y=ln(x)') wordt uiteindelijk de functie getekend. x, y zijn de x en y-coordinaat. Daarna volgt de kleur ('r' staat voor rood, 'b' voor blauw en 'g' voor groen. Tenslotte kan er voor worden gekozen om een label mee te geven. Enkele regels verder op staat legend. Hier kun je aangeven waar deze labels worden geplaatst.
- Hierboven werd simpel gebruik gemaakt van 'r' om een kleur weer te geven. Er zijn bijzonder veel benamingen. Los daarvan kun je er ook voor kiezen om zelf een kleur te kiezen uit het RGB-spectrum. De basiskleuren op de computer zijn rood, groen en blauw. Die varieren allen van 0 tot 1. c = (0, 0, 0) levert het ontbreken van deze drie kleuren op, dus zwart en c = (1, 1, 1) is wit. Voor N = 100 kun je met c = (i/N, 0, 1-i/N) langzaam van rood naar blauw gaan in 100 stappen.

1.4 3. Gebruik maken van je grafische rekenmachine (GR)

Pythagoras gaat de komende afleveringen samenwerken met bouwers van grafische rekenmachines. Momenteel zijn dat Texas Instruments en NumWorks.

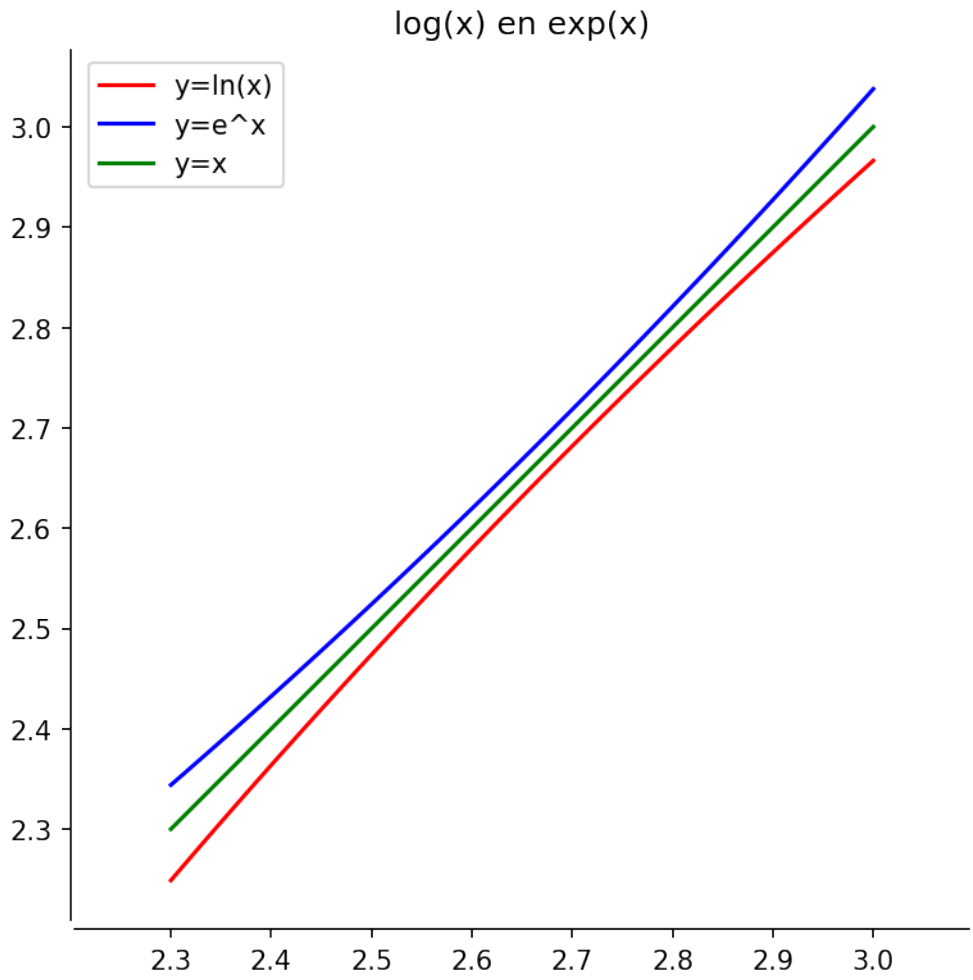
[4]:
```
# 4. Natuurlijke logaritme (Opgave 1-3)

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

PN = 100
PU = 1/PN
X0 = 17*PU
X1 = 4.5
x1 = np.linspace(X0, X1, PN)
x2 = np.linspace(-X1, X1, PN)
#p = np.exp(1) # Hiermee raken de krommen
p = 2.65 # Hiermee raken de krommen net niet
Titel = 'log(x) en exp(x)'
f1 = p*np.log(x1)
f2 = np.exp(x2/p)
f3 = x2
Xas = 0
Yas = 0

fig = plt.figure(figsize=(6, 6), dpi=150)
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.spines['left'].set_position(('data',Yas))
ax.spines['bottom'].set_position(('data',Xas))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
```

```
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.set_title(Titel)

plt.plot(x1,f1, 'r',label='y=ln(x)')
plt.plot(x2,f2, 'b',label='y=e^x')
plt.plot(x2,f3, 'g',label='y=x')
plt.axis('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show()
```



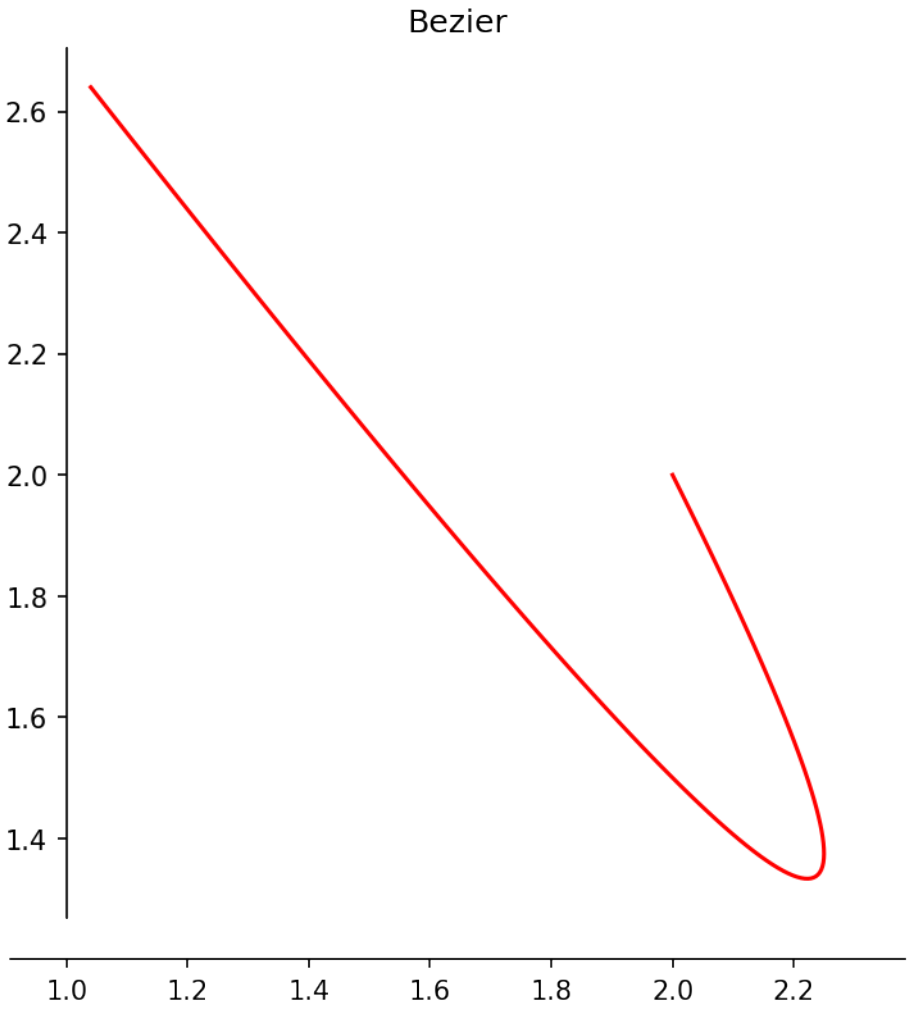
[2]:
```
# 5. Natuurlijke logaritme (Opgave 1-3)
# Uitvergroting rondom het raakpunt.

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
```

```
PN = 100
PU = 1/PN
X0 = 2.3
X1 = 3
x1 = np.linspace(X0, X1, PN)
x2 = np.linspace(X0, X1, PN)
#p = np.exp(1) # Hiermee raken de krommen
p = 2.7 # Hiermee raken de krommen net niet
Titel = 'log(x) en exp(x)'
f1 = p*np.log(x1)
f2 = np.exp(x2/p)
f3 = x2
Xas = X0 - 0.1
Yas = X0 - 0.1

fig = plt.figure(figsize=(6, 6), dpi=150)
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.spines['left'].set_position(('data',Yas))
ax.spines['bottom'].set_position(('data',Xas))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.set_title(Titel)

plt.plot(x1,f1, 'r',label='y=ln(x)')
plt.plot(x2,f2, 'b',label='y=e^x')
plt.plot(x2,f3, 'g',label='y=x')
plt.axis('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show()
```



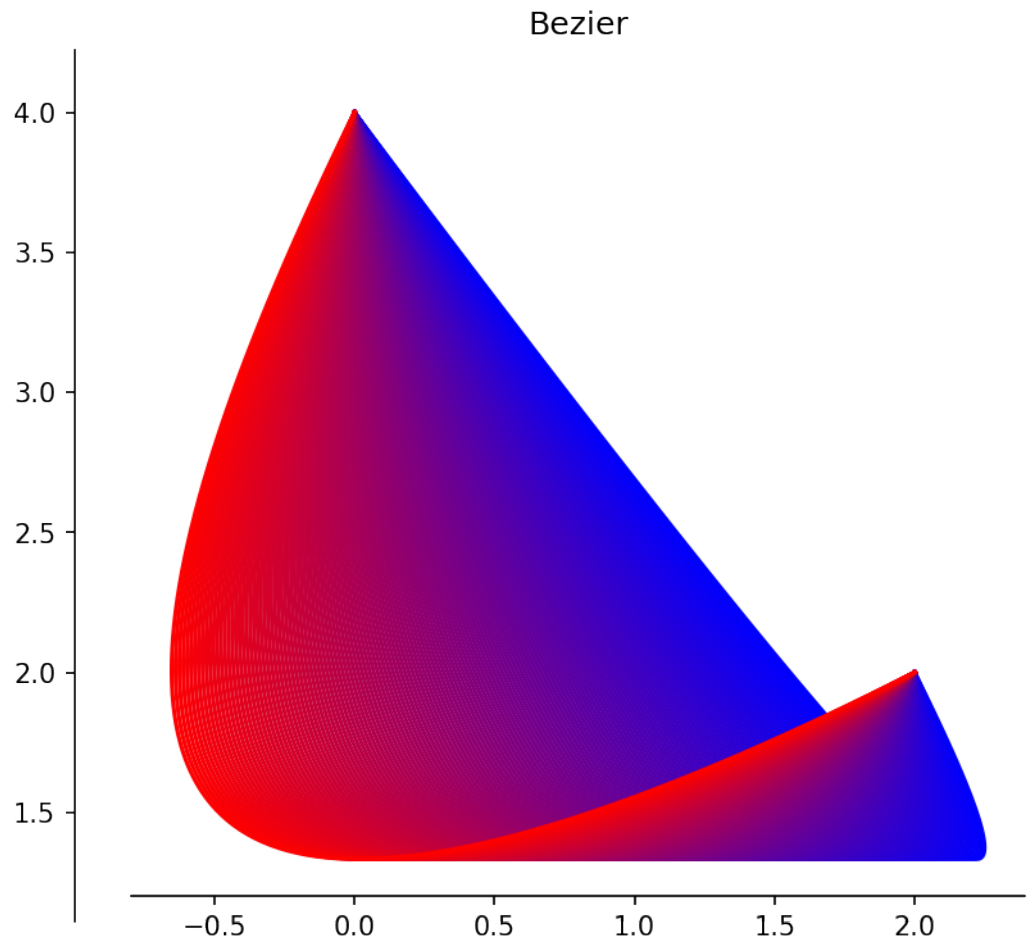
[6]:
```
# 6. Bezierkromme (Opgave 7)
# x(t) = -4t^2+6t
# y(t) = 6t^2-8t+4

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

PN = 100
T0 = 0.2
T1 = 1
Ax = 0
Ay = 4
Bx = 2
By = 2
Cx = 3
Cy = 0
```

```
t = np.linspace(T0, T1, PN)
x = (1-t)**2*Ax + t**2*Bx + 2*t*(1-t)*Cx
y = (1-t)**2*Ay + t**2*By + 2*t*(1-t)*Cy

Titel = 'Bezier'
Xas = 1.2
Yas = 1

fig = plt.figure(figsize=(6, 6), dpi=150)
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.spines['left'].set_position(('data',Yas))
ax.spines['bottom'].set_position(('data',Xas))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.set_title(Titel)

plt.plot(x,y, 'r')
plt.axis('equal')
plt.show()
```



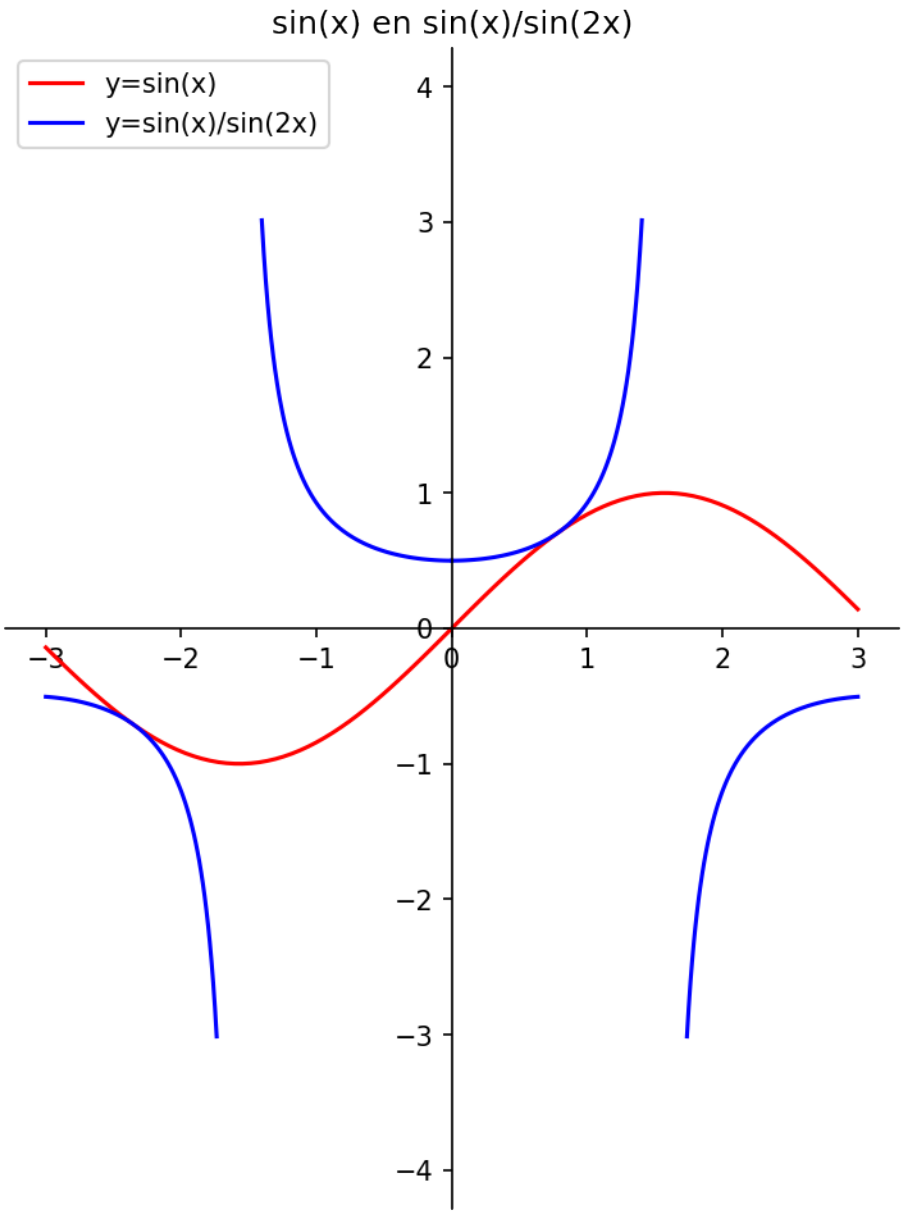
[7]:
```
# 7. Bezierkrommen (Opgave 7)
# x(t) = -4t^2+6t
# y(t) = 6t^2-8t+4
# Je kunt zelf eens proberen om het punt C een andere baan te laten beschrijven.

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

PN = 100
T0 = 0
T1 = 1
Ax = 0
Ay = 4
Bx = 2
By = 2
```

```
t = np.linspace(T0, T1, PN)
Titel = 'Bezier'
Xas = 1.2
Yas = -1
CRange = 160

fig = plt.figure(figsize=(6, 6), dpi=150)
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.spines['left'].set_position(('data',Yas))
ax.spines['bottom'].set_position(('data',Xas))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.set_title(Titel)

for i in range(CRange):
    Cx = 3 - 5*i/CRange
    Cy = 0
    x = (1-t)**2*Ax + t**2*Bx + 2*t*(1-t)*Cx
    y = (1-t)**2*Ay + t**2*By + 2*t*(1-t)*Cy
    plt.plot(x,y, c = (i/CRange, 0, 1-i/CRange))
plt.axis('equal')
plt.show()
```



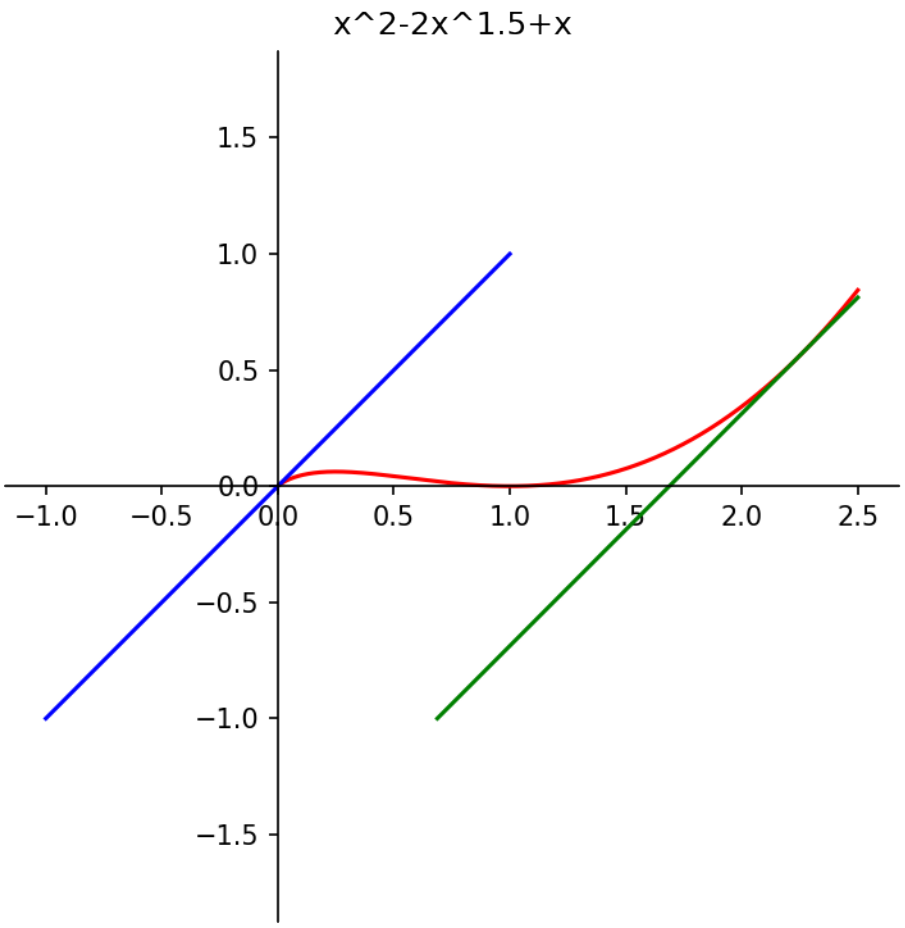
[88]:
```
# 8. Gebroken sinuskromme (Opgave 8)
# Let op het was nog wel een gepuzzel om bij de polen (plaatsen waar de functie
# niet bestaat) een gebiedje te definieren waar geen functiewaarden worden
# berekend.

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

Pi2 = math.pi/2

PN = 100
PUP = 1/6
PU = 1/1000
X0 = -3
X1 = 3
x1 = np.linspace(X0, X1, PN)
x2 = np.linspace(X0, -Pi2-PUP, PN)
```

```
x3 = np.linspace(-Pi2+PUP, -PU, PN)
x4 = np.linspace(PU, Pi2-PUP, PN)
x5 = np.linspace(Pi2+PUP, X1, PN)
Titel = 'sin(x) en sin(x)/sin(2x)'
f1 = np.sin(x1)
f2 = np.sin(x2)/np.sin(2*x2)
f3 = np.sin(x3)/np.sin(2*x3)
f4 = np.sin(x4)/np.sin(2*x4)
f5 = np.sin(x5)/np.sin(2*x5)
Xas = 0
Yas = 0

fig = plt.figure(figsize=(6, 8), dpi=150)
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.spines['left'].set_position(('data',Yas))
ax.spines['bottom'].set_position(('data',Xas))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.set_title(Titel)

#plt.plot(range(5))
plt.plot(x1,f1, 'r',label='y=sin(x)')
plt.plot(x2,f2, 'b',label='y=sin(x)/sin(2x)')
plt.plot(x3,f3, 'b')
plt.plot(x4,f4, 'b')
plt.plot(x5,f5, 'b')
plt.axis('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show()
```



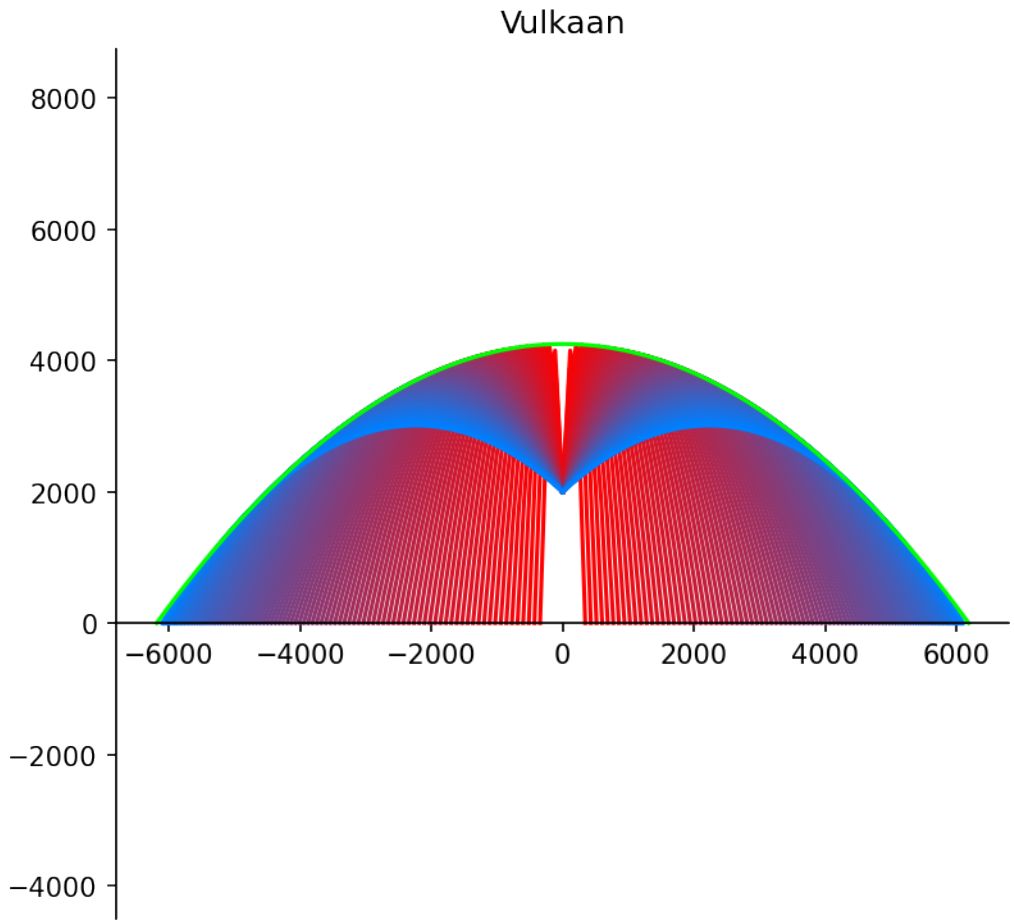
[8]:
```
# 9. Evenwijdige raaklijnen. Opgave 9 - 11
# De berekening die ten grondslag ligt voor de tekening is hier niet
# terug te vinden. Kijk daarvoor bij de uitwerkingen van het eindexamen.

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

PN = 1000
PU = 1/PN
```

```
X0 = 0
X1 = 2.5
x = np.linspace(X0, X1, PN)
x2 = np.linspace(-1, X1-1.5, PN)
x3 = np.linspace(11/16, X1, PN)
Titel = 'x^2-2x^1.5+x'
f = x*x+x-2*x*np.sqrt(x)
g = x2
h = x3-27/16
Xas = X0
Yas = X0

fig = plt.figure(figsize=(6, 6), dpi=150)
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.spines['left'].set_position(('data',Yas))
ax.spines['bottom'].set_position(('data',Xas))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.set_title(Titel)

plt.plot(x,f, 'r')
plt.plot(x2,g, 'b')
plt.plot(x3,h, 'g')
plt.axis('equal')
#plt.legend(loc='upper center')
plt.show()
```



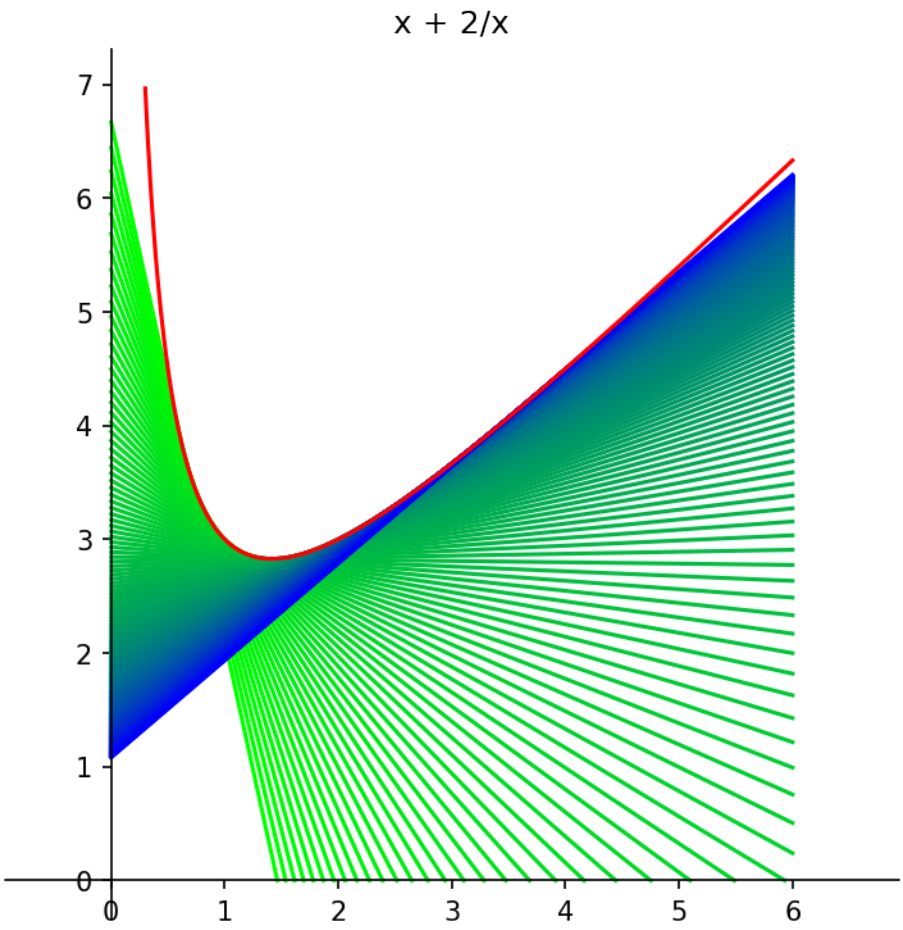
[238]:
```
# 10. Vulkaan, Opgave 12 - 14
# ta = tan(alpha)
# y = -(1 + ta^2)/x^2*9000 + ta*x + 2000
#
# Hier zijn in een tekeningen maardere functies met varierende alpha
# getekend.

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

Pi = math.pi

Titel = 'Vulkaan'
fig = plt.figure(figsize=(6, 6), dpi=150)
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.spines['left'].set_position(('data',Yas))
ax.spines['bottom'].set_position(('data',Xas))
```

```
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.set_title(Titel)

RNG = 100
BND = 3.9
RST = 1/2-1/BND
XX = 9000 * 4250
X = math.sqrt(XX)
for ii in range(RNG+1):
    i = RNG-ii
    alpha = (1/(BND*RNG) * (i-4) + RST) * Pi
    ta = math.tan(alpha)
    a = -(1 + ta**2)/9000
    b = ta
    c = 2000
    disc = b*b - 4*a*c
    worteldisc = math.sqrt(disc)
    X0 = (-b+worteldisc)/(2*a)
    X1 = (-b-worteldisc)/(2*a)
    PN = round((X1-X0)/100)
    xm = np.linspace(-X1, 0, PN)
    fm = a*xm**2 - b*xm + c
    plt.plot(xm, fm, c = (i/RNG, 0.5-i/(2*RNG), 1-i/RNG))
    xp = np.linspace(0, X1, PN)
    fp = a*xp**2 + b*xp + c
    plt.plot(xp,fp, c = (i/RNG, 0.5-i/(2*RNG), 1-i/RNG))
PN = round(X/50)
x = np.linspace(-X, X, PN)
f = -x**2/9000 + 4250
plt.plot(x,f, c = (0,1,0))
Xas = 0
Yas = -7000
#Yas = 0
plt.axis('equal')
#plt.legend(loc='upper center')
plt.show()
```



[9]:
```
# 11. Scheve asymptoot, Opgave 15

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

Titel = 'x + 2/x'
Xas = 0
Yas = 0

fig = plt.figure(figsize=(6, 6), dpi=150)
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.spines['left'].set_position(('data',Yas))
ax.spines['bottom'].set_position(('data',Xas))
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
```

```
ax.set_title(Titel)

PN = 500
PU = 1/PN
X0 = 0.3
X1 = 6
p0 = 0.6
p1 = 3.7
RNG = 150
X0 = 0
# g = x
# x = np.linspace(X0, X1, PN)
# plt.plot(x,g, 'b',label='y=x')
for i in range(RNG+1):
    p = p0 + i*(p1-p0)/RNG
    fp = p + 2/p
    rcp = 1-2/p**2
    cnt = fp - p*rcp
    X2 = -cnt/rcp
    if rcp < 0:
        XX0 = X0
        XX1 = min(X1,X2)
    else:
        XX0 = max(X0,X2)
        XX1 = X1

    x = np.linspace(XX0, XX1, PN)
    h = rcp*x + cnt
    plt.plot(x,h, c = (0, 1-i/RNG, i/RNG))
X0 = 0.3
X1 = 6
x = np.linspace(X0, X1, PN)
f = x + 2/x
plt.plot(x,f, 'r')
# plt.legend(loc='upper center')
plt.axis('equal')
plt.show()
```


x + 2/x
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6

[ ]: