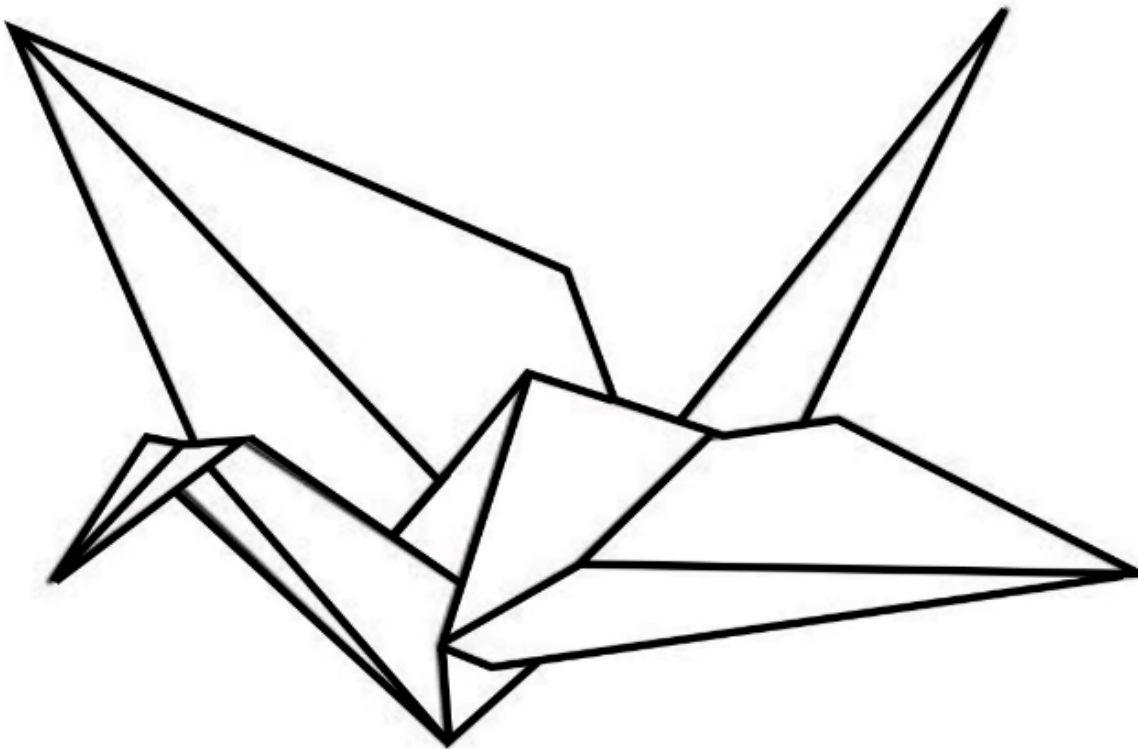


# Derdegraadsvergelijkingen oplossen met origami

*Door Iris Penninga, V6D  
Begeleider: LAK  
Inleverdatum: 20-01-2023*



# Inhoud

1. Inleiding
  - a. Origami & wiskunde
  - b. Het Yoshizawa-Randlettsysteem
  - c. Limieten van constructie met passer en liniaal
2. Origami-axioma's
  - a. Axioma's 1 t/m 4
  - b. Axioma 5 en 6
3. Lill's methode
  - a. Werking Lill's methode
  - b. Bewijs Lill's methode
4. Het werk van Beloch
  - a. Achtergrond
  - b. Het vierkant van Beloch
5. De origami-methode
  - a. Werking origami-methode
  - b. Bewijs origami-methode
  - c. Origami-methode en Beloch's vierkant
6. Meerdere reële oplossingen
  - a. Staartdelingen
  - b. Bewijs
7. Slot
  - a. Conclusie
  - b. Evaluatie
8. Bijlagen
  - a. Bronnenlijst
  - b. Logboek

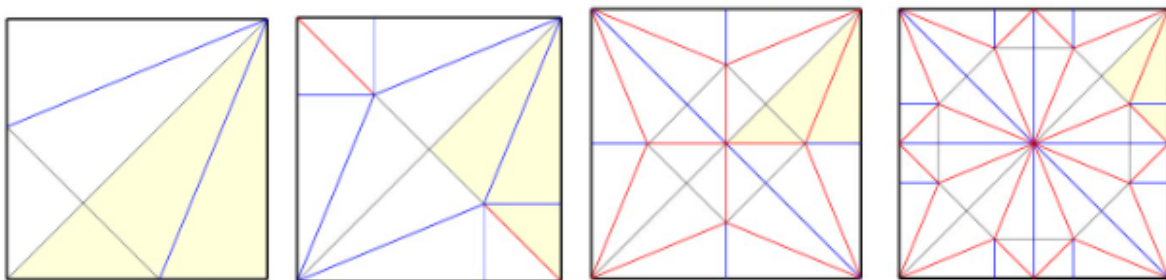
# 1 Inleiding

## 1.1 Origami en wiskunde

Wiskunde speelt een belangrijke rol in de kunst. Zo is bijvoorbeeld in schilderijen de gulden snede te zien en is symmetrie van belang in verschillende kunstvormen. Naast dat wiskunde een belangrijke rol speelt in de kunst, speelt kunst een belangrijke rol in de wiskunde. Origami, "de kunst van het vouwen", kan bijvoorbeeld gebruikt worden om punten of lijnen te construeren. In dit profielwerkstuk zal blijken dat er zelfs meer constructiemogelijkheden zijn met origami dan met passer en liniaal.

Het Japanse woord origami komt van de woorden "oru", wat vouwen betekent, en "kami", wat papier betekent. Origami is een oude kunstvorm die uit het Japan of China van zo'n 1000 jaar geleden stamt. Door gebrek aan bronnen uit die tijd is onduidelijk waar en wanneer mensen begonnen met vouwen. Het is zelfs mogelijk dat dit al voor de uitvinding van het papier werd gedaan, maar aangezien papier ideaal vouwmateriaal is, is het ook mogelijk dat origami stamt uit de tijd na de uitvinding van het papier. (Robinson, 2014) Papier werd in China uitgevonden in 105 na Christus. De kwaliteit verbeterde aanzienlijk in de periode die hierop volgde en werd steeds beter geschikt om mee te vouwen. Het papier bereikte Japan via boeddhistische monniken in het jaar 610. Hoewel er voor het jaar 1600 geen bewijs is dat er origami gevouwen werd, is het goed mogelijk dat dit al gebeurde. Een kort gedicht geschreven door Ihara Saikaku in 1680 verwijst naar origami en laat zien dat de kunst al erg verweven is met de cultuur (Robinson, 2014).

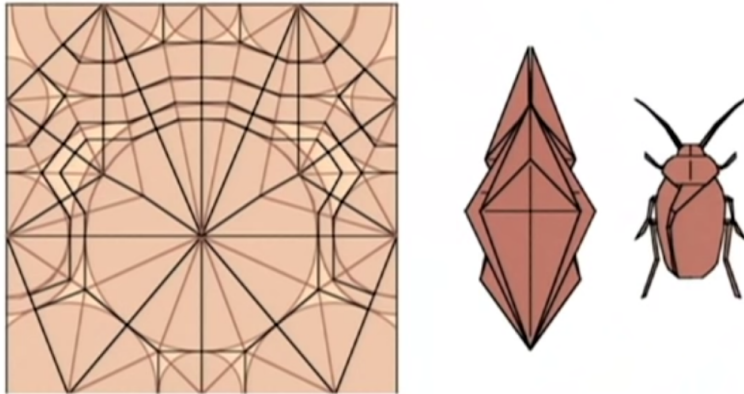
Origami werd in het begin vooral gebruikt voor ingewikkelde vouwwerken in tempels. Hierna werden simpelere vouwsels populair, die door iedereen gevouwen konden worden. De kraanvogel en ballon zijn twee bekende voorbeelden van deze minder complexe origami. Bijna alle origamifiguren gebruikten tot in de 20e eeuw één van de vier traditionele basisvormen: de vliegerbasis, vissenbasis, vogelbasis en kikkerbasis. Hoewel de basissen veel op elkaar lijken, kunnen er erg verschillende figuren mee worden gevouwen. De welbekende kraanvogel bijvoorbeeld, is gemaakt vanuit de vogelbasis. Hier heeft deze basis zijn naam dan ook aan te danken (Tiggelaar, 1985).



*Van links naar rechts: De vliegerbasis, vissenbasis, vogelbasis en kikkerbasis. ("Traditional Origami Bases", 2021)*

Eeuwenlang zijn deze vier basissen het begin van alle origami-modellen geweest. In de 20e eeuw werd daar echter verandering in gebracht door de Japanse Akira Yoshizawa ("Akira Yoshizawa", 2022). Zijn bijdrage aan de origami bestaat niet alleen uit tienduizenden ontwerpen, maar ook uit iets nog veel belangrijkers; een manier om origami-vouwinstructies op papier weer te geven. Dit systeem, dat het Yoshizawa-Randlettsysteem wordt genoemd, wordt in de volgende paragraaf verder uitgelegd ("Akira Yoshizawa", 2022).

Yoshizawa heeft met zijn systeem wiskunde geïntroduceerd in de origami. Door vouwpatronen weer te geven in diagrammen werd duidelijk dat het mogelijk was om complexe en gedetailleerde origami-kunstwerken te creëren. Wiskunde zorgde ervoor dat de kikkerbasis niet langer de meest complexe basis was voor origami-modellen.



*Dit vouwpatroon kan gebruikt worden om een kever te vouwen (Robert Lang, 2008).*

Wiskunde heeft van origami dus een complexe kunstvorm gemaakt waarin de mogelijkheden eindeloos zijn. Andersom heeft origami ook wiskunde beïnvloed. Origami is namelijk een geweldig alternatief voor passer en liniaal op het gebied van construeren. Er zijn gigantisch veel mogelijkheden op dit gebied, en in dit profielwerkstuk zal blijken dat er meer wiskundige constructiemogelijkheden zijn met origami dan met liniaal en passer (Robert Lang [TED], 2008). De focus ligt in dit profielwerkstuk op het oplossen van derdegraadsvergelijkingen met origami. Deze methode, ontwikkeld door Beloch, is een alternatief voor Lill's methode, die gebruikt kan worden om polynomiale vergelijkingen visueel op te lossen. Hoewel deze methode erg simpel is, is het bewijs nogal complex. Het doel van dit profielwerkstuk is om te kijken welke wiskunde er voor deze methode gebruikt wordt, en een begrijpelijk bewijs te creëren.

De hoofdvraag heb ik als volgt geformuleerd:

*"In hoeverre sluit het oplossen van derdegraadsvergelijkingen met origami aan bij de wiskunde die op het VWO wordt behandeld?"*

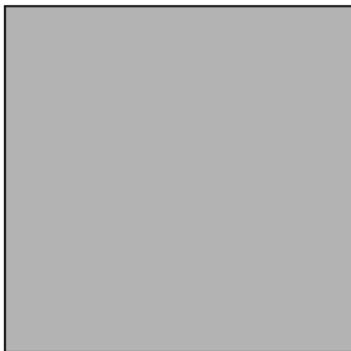
Om te bewijzen dat de reële oplossingen van iedere derdegraadsvergelijking gevonden kunnen worden met origami, is het eerst noodzakelijk om te kijken naar de mogelijkheden van het vouwen. Welke geometrische constructies kunnen met origami nagebootst worden? Dit wordt gedaan aan de hand van de origami-axioma's. Hierna wordt Lill's methode, een ander fundament van Beloch's idee, onderzocht. De origami-axioma's en Lill's methode worden vervolgens samengevoegd in Beloch's origami-methode.

Alle benodigde wiskunde wordt op drie verschillende niveaus uitgelegd, zodat het zo goed mogelijk te volgen is. De eerste stap is een uitleg aan de hand van een voorbeeld, om duidelijk te maken hoe de methode werkt. Vervolgens wordt er een bewijs gemaakt aan de hand van een getallenvoorbeeld. Dit bewijs is makkelijker te volgen dan een algemeen bewijs met letters, maar het is ook minder sterk, omdat een bewijs voor één voorbeeld nog niet laat zien dat de methode in ieder geval werkt. Daarom wordt ten slotte een bewijs voor een algemene situatie gegeven. Zo wordt duidelijk dat het mogelijk is om derdegraadsvergelijkingen op te lossen met origami.

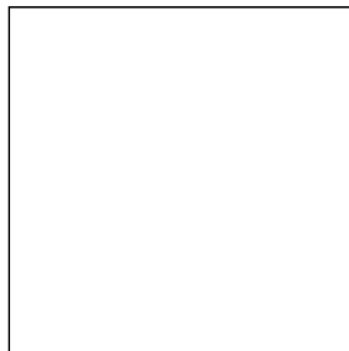
## 1.2 Het Yoshizawa-Randlettsysteem

Om uit te leggen hoe een model gevouwen wordt, gebruikt men het Yoshizawa-Randlettsysteem. Door middel van pijlen en lijnen wordt aangegeven hoe en waar er gevouwen moet worden. In dit hoofdstuk staan de belangrijkste symbolen uit het systeem. Aangezien wiskunde-origami over het algemeen geen ingewikkelde vouwen vereist, zijn deze achterwege gelaten (Mitchell, 2020).

De voorkant van het vouwpapier in het diagram is grijs en de achterkant is wit.

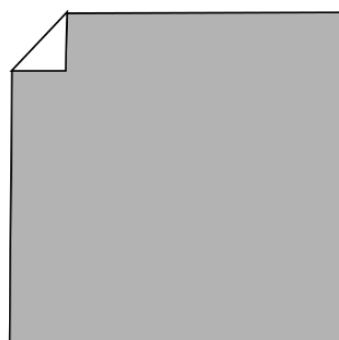
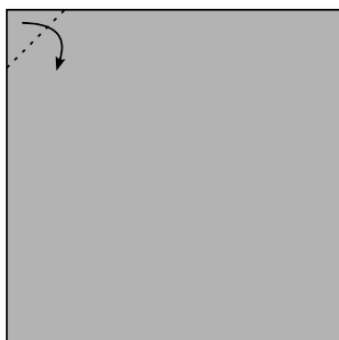


**Voorkant**

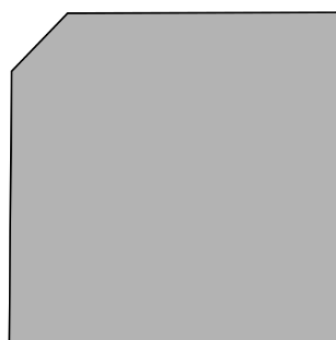
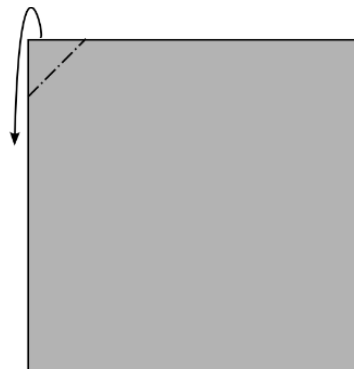


**Achterkant**

Een dalvouw wordt gemaakt door de voorkant van het papier naar zichzelf toe te vouwen. Als deze vouw daarna weer uitgevouwen wordt, lijkt de vouw op een dal. Daar heeft de vouw zijn naam dan ook vandaan. Een dalvouw wordt aangegeven met een streepjeslijn. Een bergvouw wordt gemaakt door de achterkant van het papier naar zichzelf toe te vouwen. Als deze vouw wordt uitgevouwen, lijkt hij op een berg. Dit is ook voor deze vouw de reden voor zijn naam. Een bergvouw wordt aangegeven met een stip- en streepjeslijn, zoals in de afbeeldingen hieronder te zien is.

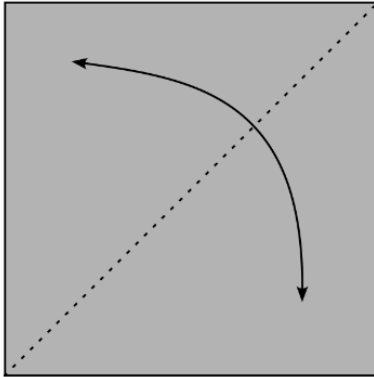


**Dalvouw**

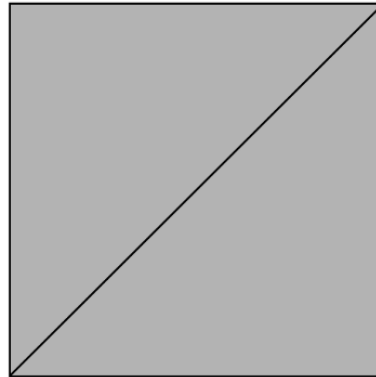


**Bergvouw**

Een vouwlijn is een lijn die eerst gevouwen wordt, en direct daarna weer uitgevouwen. Dit wordt aangegeven door een dubbele pijl (vouwlijn 1). Nadat de vouwlijn is gevouwen, wordt die aangegeven met een doorgetrokken streep (vouwlijn 2). Lijnen, zoals de omlijning van het papier, worden op dezelfde manier aangegeven als vouwlijnen.



**Vouwlijn 1**



**Vouwlijn 2**

### 1.3 Limieten van constructie met passer en liniaal

Passers en linialen zonder markeringen werden in de klassieke oudheid al gebruikt om figuren, lengtes, hoeken, of punten te construeren. Hoewel er veel constructiemogelijkheden zijn met deze twee voorwerpen, zoals het construeren van een bissectrice, vierkant, of regelmatige vijfhoek, kan niet alles geconstrueerd worden. De driedeling van een hoek, het construeren van de trisectrice, is bijvoorbeeld niet mogelijk. Ook de verdubbeling van de kubus en kwadratuur van een cirkel zijn niet mogelijk met deze vorm van constructie ("Constructie met passer en liniaal, 2021).

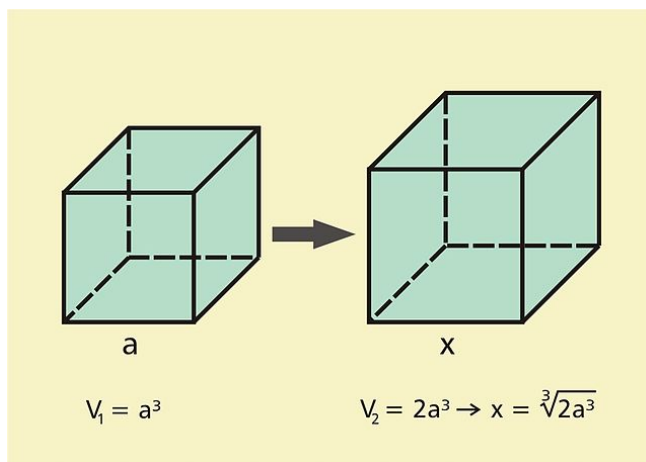
Bij de driedeling van een hoek is het doel om iedere mogelijke hoek in drie gelijke delen te verdelen. Hoewel aan de hand van constructie voor bepaalde hoeken wel de trisectrice bepaald kan worden, is dit niet mogelijk voor elke hoek. Aan de hand van origami kan dit probleem echter wel opgelost worden ("Driedeling van de hoek", 2015).

De verdubbeling van de kubus is het tweede klassieke geometrische probleem. Het doel is om de inhoud van een kubus, waarvan de lengte van de zijden bekend is, te verdubbelen. Een kubus met zijde  $s$  heeft volume  $V = s^3$ . De zijdelengte van de nieuwe kubus, met een dubbel volume, is dan:

$$2V = 2s^3$$

$$2V = (\sqrt[3]{2}s)^3$$

De constructie van  $\sqrt[3]{2}s$  is met passer en liniaal niet mogelijk, dus het verdubbelen van een kubus ook niet.



*De verdubbeling van een kubus (Wikipedia, 2021).*

Hoewel deze problemen met passer en liniaal niet opgelost kunnen worden, kan dat met origami wel. De oplossing heeft veel te maken met het oplossen van derdegraadsvergelijkingen met origami ("Verdubbeling van de kubus", 2021).

## 2 Origami-axioma's

### 2.1 Axioma's 1 t/m 4

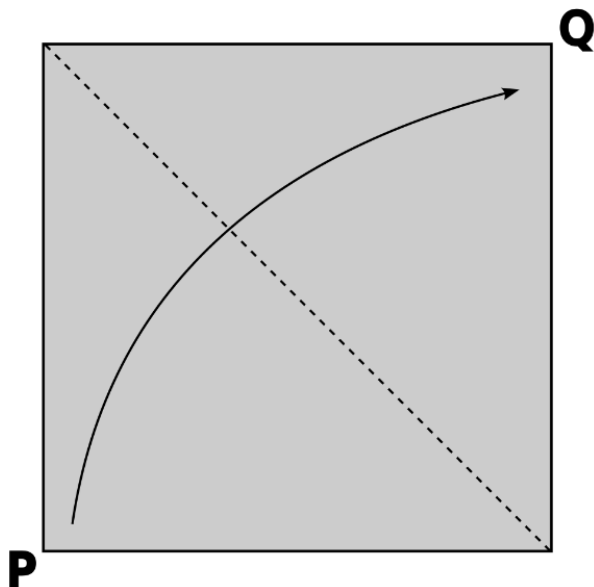
Om origami voor wiskundige toepassingen te gebruiken, moet eerst duidelijk worden wat de mogelijkheden zijn van origami. Dit wordt gedaan aan de hand van de 6 origami-axioma's, opgesteld door Humiaki Huzita. Deze 6 axioma's laten zien welke verschillende geometrische constructies, zoals lijnen, bissectrices en middelloodlijn er nagebootst kunnen worden met origami. In 1989 werd nog een 7e axioma ontdekt door Jacques Justin, maar pas in 2001, toen dit axioma opnieuw werd ontdekt door Koshiro Hatori, werd het toegevoegd aan de originele 6. Robert J. Lang heeft later bewezen dat deze set van axioma's nu compleet was. Aangezien het 7e axioma pas in 2001 in gebruik werd genomen, wordt het in dit PWS niet verder toegelicht. Beloch's onderzoek is namelijk in 1936, ver voordat het 7e axioma relevant werd, al gepubliceerd ("Huzita-Hatori Axioms, 2018).

*(O1) Er bestaat voor twee gegeven punten  $P$  en  $Q$  een vouwlijn waar  $P$  en  $Q$  op liggen.*

Dit axioma is ook te vinden in de Euclidische meetkunde. Euclides' eerste axioma stelt namelijk dat ieder tweetal punten kan worden verbonden door een rechte lijn ("Euclidische meetkunde", 2013).

*(O2) Er bestaat voor twee gegeven punten  $P$  en  $Q$  een vouwlijn die  $P$  op  $Q$  plaatst.*

Als een papier wordt gevouwen, komen er meerdere lagen op elkaar te liggen. Hierdoor is het mogelijk dat punten op het papier op elkaar komen te liggen. De vouwlijn die hiervoor nodig is heet de middelloodlijn. Punten  $P$  en  $Q$  komen na het vouwen namelijk op elkaar te liggen als ze allebei even ver van de vouwlijn afliggen en als de lijn door  $P$  en  $Q$  loodrecht op de vouwlijn staat. In het voorbeeld hieronder is te zien dat hoekpunten  $P$  en  $Q$  op elkaar komen te liggen als de het papier diagonaal wordt dubbelgevouwen zoals aangegeven.



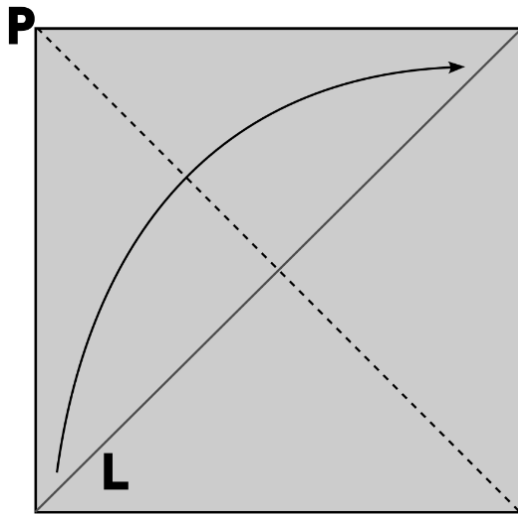
*(O3) Er bestaat voor twee gegeven lijnen  $L$  en  $M$  een vouw die  $L$  op  $M$  plaatst.*

In het geval van twee niet-parallelle lijnen  $L$  en  $M$  is deze vouwlijn de bissectrice. Als  $L$  en  $M$  parallel zijn is deze vouwlijn een lijn die precies tussen  $L$  en  $M$  inligt en dezelfde richtingscoëfficiënt heeft.



(04) *Er bestaat voor een gegeven lijn  $L$  en een gegeven punt  $P$  één unieke vouw door  $P$ , die loodrecht op  $L$  staat.*

Deze lijn is een loodlijn op  $L$  door  $P$ . In het voorbeeld hieronder is te zien dat de aangegeven gestippelde vouw loodrecht staat op de diagonale lijn  $L$  en door hoekpunt  $P$  gaat.



## 2.2 Axioma 5 en 6

De eerste vier origami-axioma's zijn redelijk vanzelfsprekend. De volgende axioma's zijn echter wat ingewikkelder. Daarom worden ze in deze paragraaf wat verder uitgelegd aan de hand van conflictlijnen.

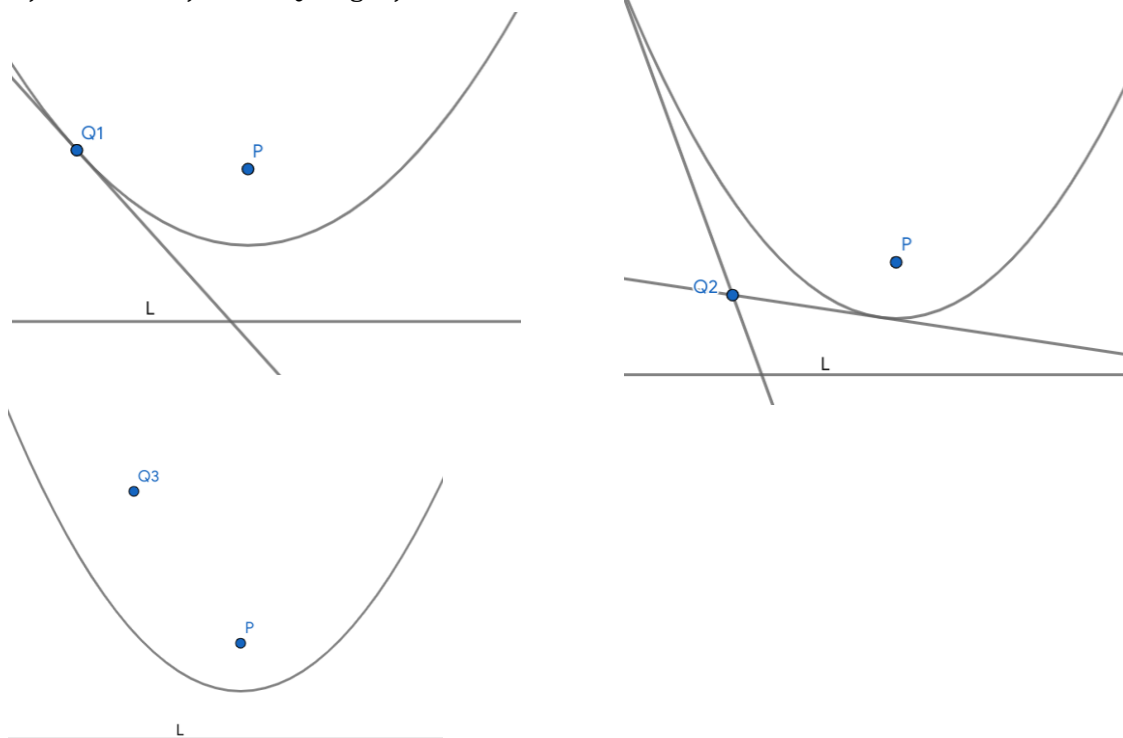
(O5) *Er bestaan voor gegeven punten  $P$  en  $Q$  en gegeven lijn  $L$  0, 1 of 2 vouwen door  $Q$  die  $P$  op  $L$  plaatsen.*

De vouwlijn die door dit axioma wordt bedoeld, is de raaklijn door  $Q$  aan de conflictlijn van  $P$  en  $L$ . Teken hiervoor eerst een willekeurige lijn  $L$  en twee willekeurige punten  $P$  en  $Q$ . Dit is afgebeeld in de afbeelding links.



Teken als volgt de conflictlijn van  $P$  en  $L$ . Aangezien de conflictlijn van een punt en een lijn een parabool is, is deze conflictlijn dus een parabool met brandpunt  $P$  en richtlijn  $L$ . In de afbeelding rechtsboven is dit getekend.

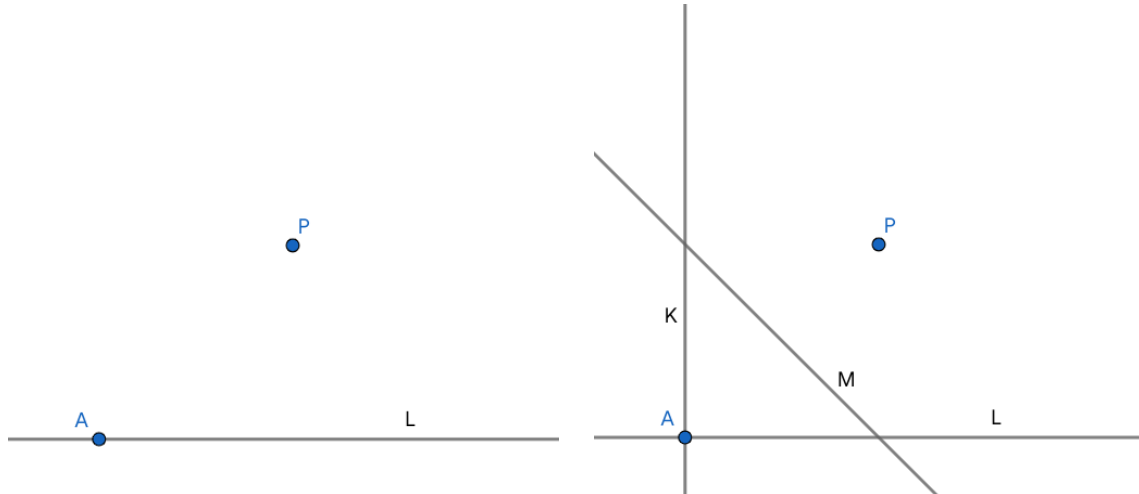
Daarna worden de raaklijnen aan deze parabool die door  $Q$  gaan getekend. Dit is niet altijd mogelijk: als  $Q$  links en rechts wordt "ingesloten" door de parabool, zoals  $Q_3$  in onderstaande afbeelding, is er geen raaklijn die door  $Q$  gaat. In zo'n situatie kan er dus geen vouw gemaakt worden door  $Q$  die  $P$  op  $L$  plaatst. Als  $Q$  op de parabool ligt, is er één raaklijn mogelijk. Dit is dan de raaklijn aan dat punt. Dit is het geval bij  $Q_1$  op de afbeelding. In andere gevallen, zoals  $Q_2$ , zijn er 2 raaklijnen door  $Q$  mogelijk.



Op de afbeeldingen op de vorige pagina zijn de raaklijnen door Q getekend. Deze raaklijnen zijn de vouwlijnen die P op L plaatsen, en door Q gaan. Dit zijn de vouwen die volgens axioma 5 bestaan.

Axioma 5 kan bewezen worden aan de hand van de analytische meetkunde. Een parabool wordt dan als volgt getekend:

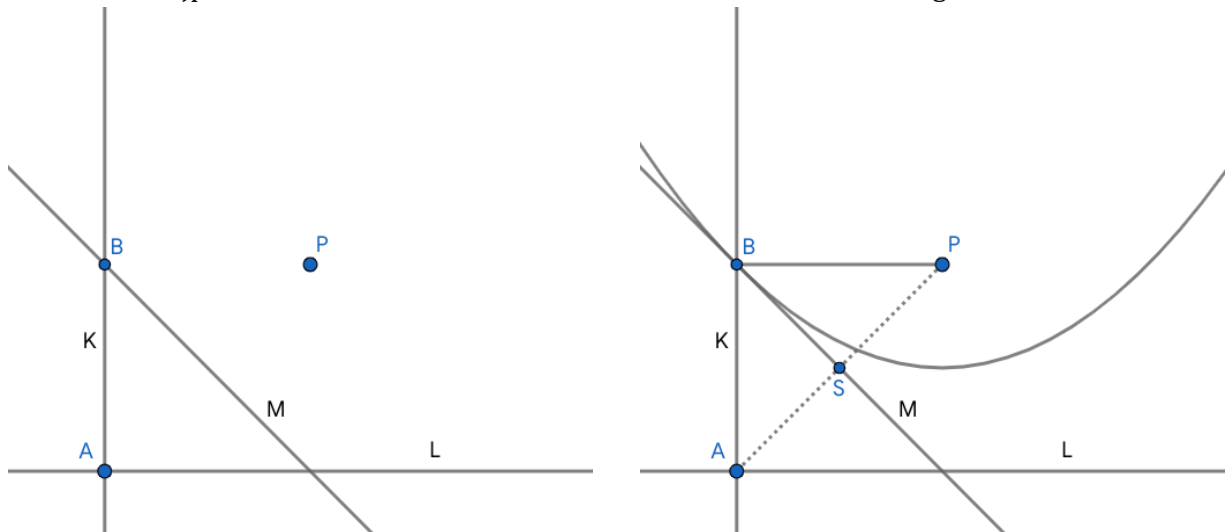
1. Teken het brandpunt P, richtlijn L, en een willekeurig punt A op de richtlijn. Dit is weergegeven in de linker afbeelding hieronder.



2. Teken de loodlijn K van L door A en de middelloodlijn M van A en P. Dit is weergegeven in de rechter afbeelding hierboven.

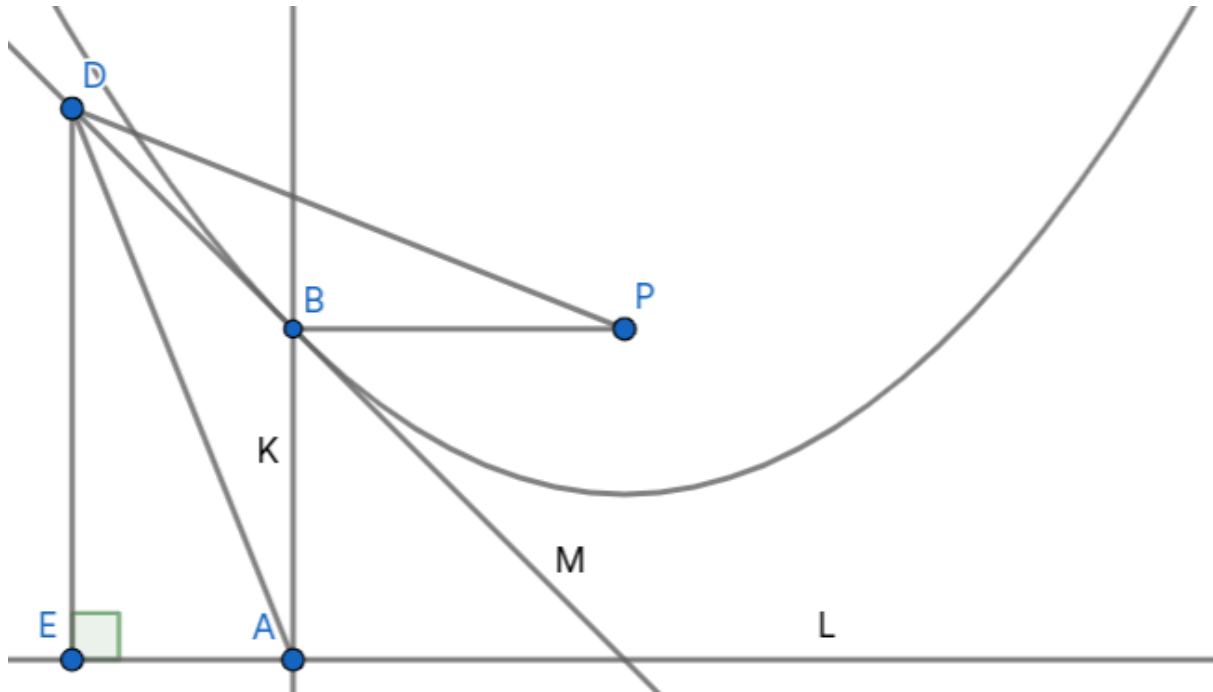
Punten op de middelloodlijn M liggen even ver van A als van P af. De punten op loodlijn K liggen even dicht bij het punt A als bij de lijn L, omdat K loodrecht op L staat en door A gaat.

3. Geef het snijpunt van K en M aan met een B. Dit is te zien in de afbeelding links.



Het punt B is nu een punt dat even ver van P als van L af ligt, dus het ligt op de parabool. De parabool is weergegeven in de rechter afbeelding hierboven, evenals het lijnstuk AP en het snijpunt S van M en AP. Omdat S op de middelloodlijn M ligt, geldt dat  $AS = PS$ . M staat loodrecht op AP, dus M is de vouwlijn die P op A plaatst.

Om axioma 5 te bewijzen, moet alleen nog bewezen worden dat middelloodlijn M inderdaad een raaklijn is aan de parabool. Dat zou betekenen dat M maar één snijpunt heeft met deze conflictlijn. Een bewijs uit het ongerijmde leent zich er uitstekend voor om dit te bewijzen.



Stel dat D een tweede snijpunt is van PQ met de parabool. Teken het punt E zodat DE loodrecht op L staat. Nu moet gelden dat  $DP = DE$ , het punt D ligt immers op de parabool, én dat  $DA = DP$ , want D ligt op de middelloodlijn van A en P.

Voor driehoek ADE geldt dan dat  $DE = DA$  en  $\angle DEA = 90^\circ$ . Dit is natuurlijk niet mogelijk, dus de lijn M heeft één snijpunt met de parabool en is een raaklijn aan de parabool.

Q.E.D.

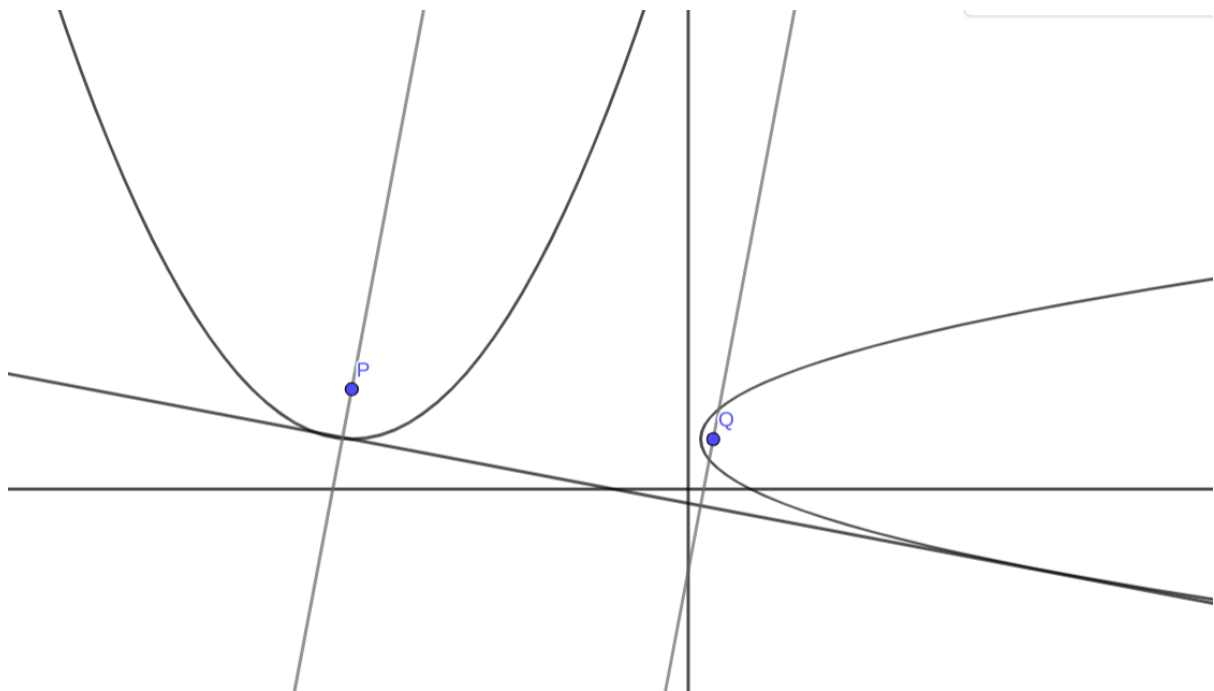
De raaklijn aan een parabool is dus de vouwlijn die brandpunt P op richtlijn L plaatst. De vouw waar axioma 5 over spreekt is dus de raaklijn door Q die P op L plaatst. Door een gegeven punt P op een lijn L te plaatsen met een vouw die door een punt Q gaat, wordt dus een raaklijn aan een parabool geconstrueerd. Deze parabool is de conflictlijn van P en L.

(Klingens, z.d.)

(O6) Gegeven twee punten  $P, Q$  en twee lijnen  $L, M$ , kunnen we, als deze bestaat, een lijn vouwen zo dat  $P$  op  $L$  en  $Q$  op  $M$  terecht komt.

Voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen met origami is het 6e origami-axioma erg belangrijk. De vouw die in dit axioma beschreven wordt, is namelijk de vouw die gevonden moet worden om het antwoord van de derdegraadsvergelijking te vinden.

Bij axioma 5 is al bewezen dat de raaklijn aan een parabool met brandpunt  $P$  en richtlijn  $L$  als vouwlijn  $P$  op  $L$  plaatst. Om ervoor te zorgen dat  $P$  op  $L$  komt én  $Q$  op  $M$ , moet er dus een lijn gezocht worden die zowel de conflictlijn van  $P$  &  $L$  raakt, als die van  $Q$  &  $M$ . Aangezien deze raaklijn niet hoeft te bestaan, is deze vouw niet altijd mogelijk. Als er echter sprake is van een raaklijn aan deze 2 parabolen, dan zorgt het vouwen van het papier volgens deze lijn ervoor dat  $P$  op  $L$  komt en  $Q$  op  $M$ . (Alberts, 2015)



Als  $P, Q, L$  en  $M$  zo liggen dat één parabool de ander volledig insluit, zijn er geen raaklijnen mogelijk aan beide parabolen. In ieder ander geval is er minimaal één raaklijn.

Het bewijzen van het aantal mogelijke raaklijnen aan de twee parabolen is erg ingewikkeld, aangezien de parabolen schuin in het assenstelsel kunnen liggen, zoals op de afbeelding te zien is. Verderop in dit profielwerkstuk wordt enkel gebruik gemaakt van situaties waarbij de richtlijnen loodrecht op elkaar staan. Dat axioma 6 in die situatie gebruik maakt van het oplossen van een derdegraadsvergelijking, kan wel bewezen worden. Ook voor dit bewijs wordt er gebruik gemaakt van analytische meetkunde, maar het bewijs is een stuk algebraïscher dan het dat van axioma 5.

Bewijs dat er voor het vinden van de richtingscoëfficiënt van een raaklijn aan 2 parabolen, wiens richtlijnen loodrecht op elkaar staan, een derdegraadsvergelijking opgelost moet worden. Stel de 2 parabolen als volgt op:

$$p_1: (y - \frac{1}{2} a)^2 = 2b(x + \frac{1}{2} c)$$

$$p_2: y = \frac{1}{2} x^2$$

Parabool  $p_2$  heeft de standaardvorm van een staande parabool en  $p_1$  heeft de standaardvorm van een liggende parabool. De  $a$ ,  $b$  en  $c$  bieden de mogelijkheid tot translatie, zodat dit geldt voor ieder paar van parabolen, waarvan één een horizontale en één een verticale richtlijn heeft. Om het richtingscoëfficiënt van raaklijn  $R$  te vinden, worden  $p_1$  en  $p_2$  impliciet gedifferentieerd.

Voor  $p_1$  geeft dit:

$$(y - \frac{1}{2} a)^2 = 2b(x + \frac{1}{2} c)$$

$$2(y - \frac{1}{2} a) d(y - \frac{1}{2} a) = 2b dx$$

$$2(y - \frac{1}{2} a) dy = 2b dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{2(y - \frac{1}{2} a)} = \frac{b}{y - \frac{1}{2} a}$$

En voor  $p_2$ :

$$y = \frac{1}{2} x^2$$

$$dy = \frac{1}{2} \cdot 2x dx$$

$$dy = x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

De raaklijn  $R$  snijdt  $p_1$  in  $(x_1, y_1)$  en  $p_2$  in  $(x_2, y_2)$ . Het richtingscoëfficiënt van  $R$  is  $g$ . Dit invullen in de vergelijkingen geeft:

$$p_1: (y_1 - \frac{1}{2} a)^2 = 2b(x_1 + \frac{1}{2} c)$$

$$p_2: y_2 = \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{y_1 - \frac{1}{2} a} = g$$

$$\frac{dy}{dx} = x_2 = g$$

Dat  $x_2 = g$  kan worden ingevuld in  $p_2$ .

$$y_2 = \frac{1}{2} g^2$$

Het omschrijven van de afgeleide van  $p_1$  zorgt ervoor dat  $y_1$  uitgedrukt kan worden in  $g$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{y_1 - \frac{1}{2} a} = g$$

$$b = g(y_1 - \frac{1}{2} a)$$

$$b = gy_1 - \frac{1}{2} ag$$

$$-gy_1 = -\frac{1}{2} ag - b$$

$$y_1 = \frac{1}{2}a + \frac{b}{g}$$

Door  $p_1$  om te schrijven wordt ten slotte  $x_1$  uitgedrukt in  $g$ .

$$p_1: (y_1 - \frac{1}{2}a)^2 = 2b(x_1 + \frac{1}{2}c)$$

$$x_1 = \frac{(y_1 - \frac{1}{2}a)^2}{2b} - \frac{1}{2}c = \frac{(\frac{1}{2}a + \frac{b}{g} - \frac{1}{2}a)^2}{2b} - \frac{1}{2}c = \frac{\frac{b^2}{g^2}}{2b} - \frac{1}{2}c = \frac{b}{2g^2} - \frac{1}{2}c$$

Nu  $y_1, y_2, x_1$ , en  $x_2$  zijn uitgedrukt in  $g$ , kan  $g$  anders worden opgeschreven.

$$g = \frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2}g^2 - (\frac{1}{2}a + \frac{b}{g})}{g - \frac{b}{2g^2} + \frac{1}{2}c}$$

$$g(g - \frac{b}{2g^2} + \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}g^2 - \frac{1}{2}a - \frac{b}{g}$$

$$g^2 - \frac{b}{2g} + \frac{1}{2}cg = \frac{1}{2}g^2 - \frac{1}{2}a - \frac{b}{g}$$

$$g^3 - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}cg^2 = \frac{1}{2}g^3 - \frac{1}{2}ag - b$$

$$2g^3 - b + cg^2 = g^3 - ag - 2b$$

$$g^3 + cg^2 + ag + b = 0$$

*Q. E. D.*

Het blijkt dus dat het berekenen van de richtingscoëfficiënten van raaklijnen aan 2 parabolen, equivalent is aan het oplossen van een derdegraadsvergelijking. Dit bewijst dat er 0, 1, 2 of 3 raaklijnen zijn aan twee parabolen wiens richtlijnen loodrecht op elkaar staan. Dit is ook bewezen voor ieder tweetal parabolen, zonder dat de ligging ten opzichte van de ander uitmaakt, maar de richtlijnen van de parabolen in dit profielwerkstuk staan loodrecht op elkaar, dus dan is dit bewijs genoeg. (Alberts, 2015)

### Wanneer heeft O6 0, 1, 2 en 3 oplossingen?

Een derdegraadsvergelijking heeft altijd in ieder geval één reële oplossing, omdat voor iedere complexe oplossing  $a + bi$  de geconjugeerde  $a - bi$  ook een oplossing is van de vergelijking. Als een polynomiale vergelijking een oneven aantal oplossingen heeft, moet er dus minimaal een reële oplossing zijn. Toch kan axioma 6 0 oplossingen hebben. Dit is het geval als één parabool de ander volledig insluit. Op dit moment snijdt iedere raaklijn aan één parabool namelijk de andere parabool. De parabolen die in dit profielwerkstuk gebruikt worden staan loodrecht op elkaar, dus dan is dit nooit het geval.

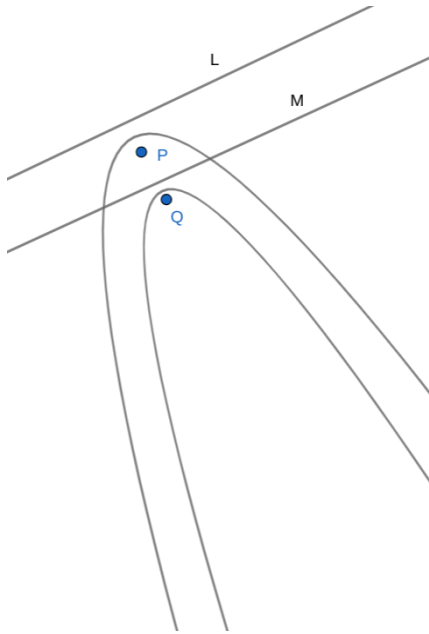
(Alperin, 2000)

Aan de ligging van de parabolen kan worden hoeveel oplossingen de bijbehorende derdegraadsvergelijking heeft, aan de hand van het aantal raaklijnen. Als de richtlijnen van de parabolen loodrecht op elkaar staan, is snel in te zien hoeveel raaklijnen er zijn.

Er zijn 4 gevallen te onderscheiden op basis van het aantal raaklijnen.

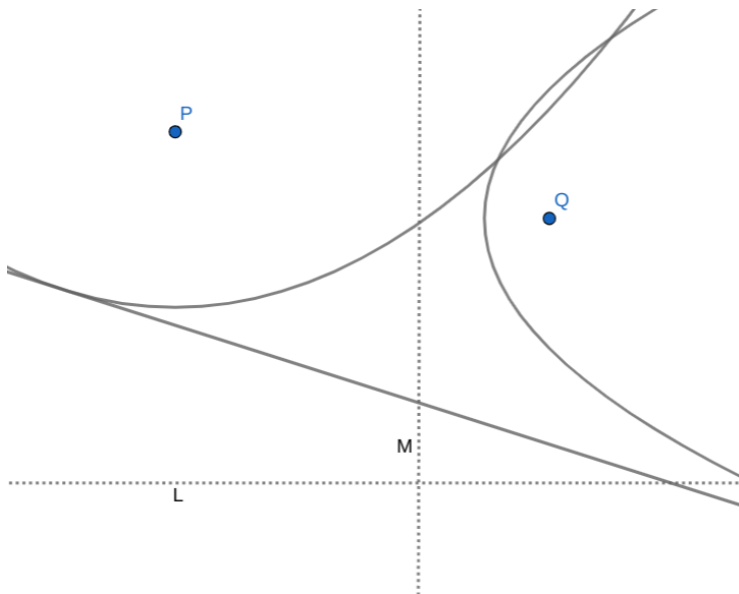
#### 0 raaklijnen

Er zijn enkel 0 raaklijnen als de parabolen elkaar volledig insluiten. In dat geval moeten de richtlijnen parallel aan elkaar liggen. Dit gebeurt dus niet als de richtlijnen van de parabolen loodrecht op elkaar staan.



*1 raaklijn*

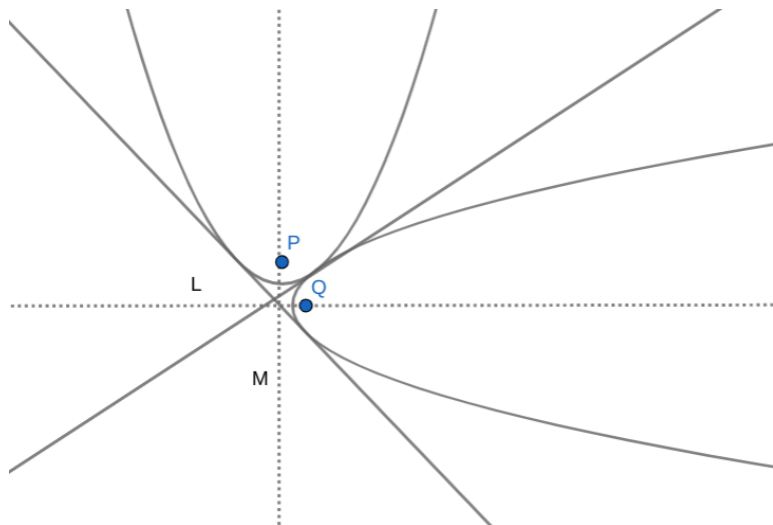
Er is 1 gezamenlijke raaklijn van de twee parabolen als de parabolen elkaar snijden. Een voorbeeld hiervan is in de afbeelding hieronder te zien. De richtlijnen zijn gestippeld aangegeven.





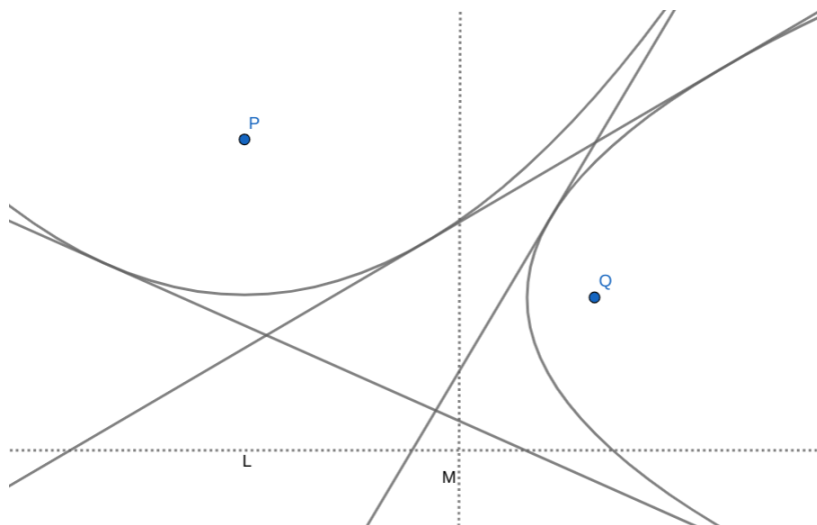
### 2 raaklijnen

Als de parabolen elkaar raken.



### 3 raaklijnen

Als de parabolen elkaar niet raken of snijden.



### Tips voor het vouwen

Het vouwen van een lijn die twee punten op hun bijbehorende lijnen plaatst kan best ingewikkeld zijn. Door eerst een vouw te maken door de twee punten, is beter zichtbaar hoe er gevouwen moet worden. Probeer het papier nou zo te plaatsen, dat één van de punten op de lijn ligt waar die naartoe moet. Verplaats het punt nu over de lijn, totdat ook het andere punt op de bijbehorende lijn ligt. Door nu te vouwen is één van de mogelijke vouwen gevonden. De andere vouwen worden gevonden door dit proces te herhalen.

# 3 Lill's methode

## 3.1 Werking Lill's methode

Eduard Lill werd in 1830 geboren in Tsjechië. Na wiskunde gestudeerd te hebben in Praag, ontwikkelde hij in 1867 een methode om polynomiale vergelijkingen visueel op te lossen.

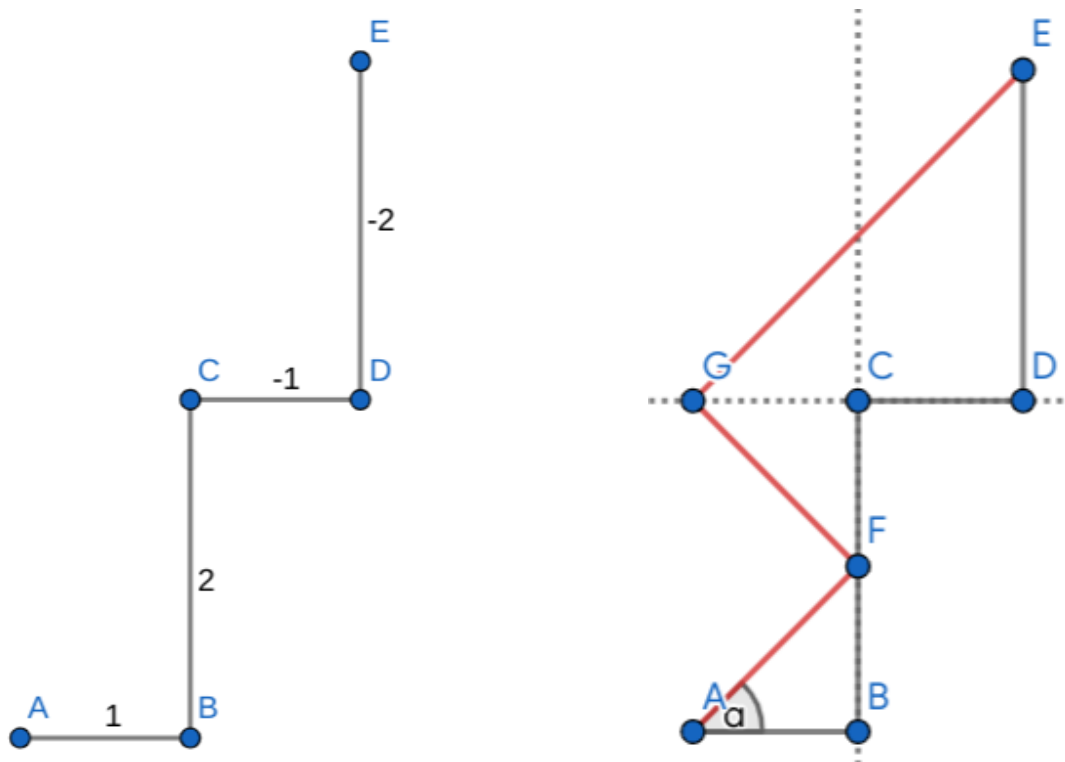
Voor het oplossen van de vergelijking  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = 0$  begint Lill's methode met het tekenen van een pad. Dat gaat als volgt:

Teken een lijnstuk met lengte  $a_n$  naar rechts. Draai  $90^\circ$  tegen de klok in (zie afbeelding rechts voor de richtingen) en teken een lijnstuk met lengte  $a_{n-1}$ , dat start op de plek waar het vorige lijnstuk eindigde. Herhaal dit proces tot en met  $a_0$ .



Teken lijnstukken met een negatief coëfficiënt precies de andere kant op, oftewel achteruit.

Als voorbeeld wordt de vergelijking  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$  gebruikt. Het bijbehorende pad is in de linker afbeelding te zien.



Vervolgens wordt er een laser geschoten vanaf het begin van het pad naar het tweede lijnstuk. Dit lijnstuk heeft lengte  $a_{n-1}$ . Als deze laser het pad raakt, kaatst hij in een rechte hoek af. Daarna raakt de laser het volgende lijnstuk met lengte  $a_{n-2}$ . Dit gaat door totdat de laser het laatste lijnstuk raakt, dus het lijnstuk met lengte  $a_0$ . Ook als de laser het verlengde van een pad raakt, verandert zijn richting. De laser kaatst dan niet af, maar gaat door het pad heen met een hoek van  $90^\circ$ . Dit gebeurt op het punt G in de rechter afbeelding. Het doel is om de laser vanuit het beginpunt zo te richten, dat de laser het eindpunt van het pad raakt. In het voorbeeld betekent

dit dat de laser vanuit het punt A geschoten wordt, richting het punt E. Dit is te zien in de rechter afbeelding. In deze afbeelding wordt de laser niet afgebogen op het moment dat het het verlengde van lijnstuk BC raakt, omdat het dit pad al heeft geraakt.

Om een oplossing van de vergelijking te bepalen, gebruikt Lill's methode de formule  $x = -\tan(\alpha)$ . De  $\alpha$  (=alfa) staat hier voor de hoek van het eerste lijnsegment en de laser. In de afbeelding is deze hoek ook aangeduid met  $\alpha$ . Als het laserpad onder het lijnsegment ligt, is  $\alpha$  negatief.

In ons voorbeeld geldt  $\alpha = 45^\circ$ . Dit geeft  $x = -\tan(45^\circ) = -1$ . Volgens Lill's methode is  $x = -1$  dus een oplossing van de vergelijking  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ . Invullen laat zien dat dit inderdaad klopt.

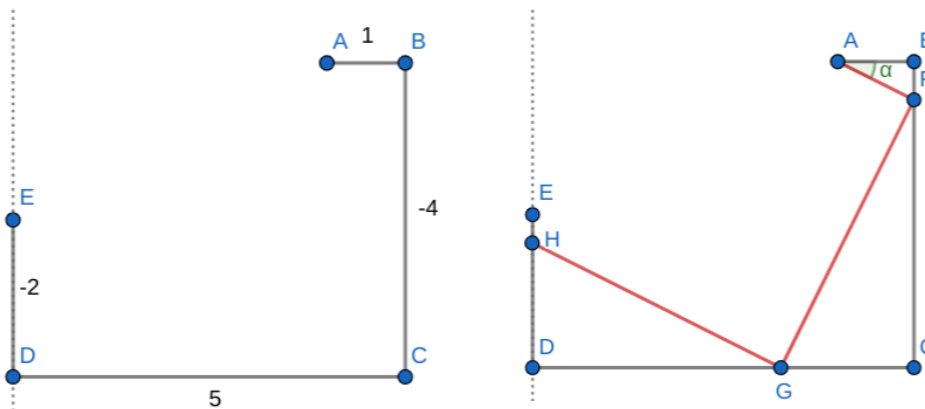
Als een vergelijking meerdere reële oplossingen heeft, zijn er verschillende hoeken waarin de laser geschoten kan worden en het eindpunt geraakt wordt. Hoewel de complexe oplossingen met deze methode niet direct gevonden worden, kunnen ze wel makkelijk achterhaald worden nu de reële oplossingen bekend zijn. De vergelijking kan namelijk met aan de hand van een staartdeling teruggebracht worden naar een tweedegraadsvergelijking (Reniers, 2020).

### 3.2 Bewijs Lill's methode

Om te bewijzen dat Lill's methode werkt, kijken we eerst naar de derdegraadsvergelijking  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ . Nadat er voor deze vergelijking een bewijs is, wordt er gekeken naar de algemene vorm van een derdegraadsvergelijking. De laatste stap is de standaardvorm van een polynomiale vergelijking.

Het pad van  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$  is in de linker afbeelding te zien. Het beginpunt is A en het eindpunt is E. In de rechter afbeelding is een laserpad getekend. Deze laser raakt het punt E niet, maar kan wel gebruikt worden om Lill's methode te bewijzen. Als de laser, die de lijn door E en D in het punt H snijdt, door het punt E gaat, dan is EH gelijk aan 0. Bewijzen dat, uitgaande van  $-x = \tan(\alpha)$ , de lengte van EH gelijk is aan de vergelijking, dus aan  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ , laat zien dat er voor EH = 0 een oplossing te vinden is van  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ . Het doel is dus om EH uit te drukken in x.

Om de lengte van EH te achterhalen, beginnen we met de lengte van AB. Deze is gelijk aan het coëfficiënt van  $x^3$ , dus  $AB = 1$ .



Doordat het pad van de vergelijking en het laserpad allebei rechte hoeken bevatten, zijn er veel gelijkvormige driehoeken te ontdekken in de afbeelding. Aan de hand van deze gelijkvormigheid is te bewijzen dat de hoek  $\alpha$  op meerdere plekken voorkomt.

Stelling:  $\angle GFC = \angle FAB = \alpha$

$$\angle AFB = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha \text{ (hoekensom } \triangle ABF)$$

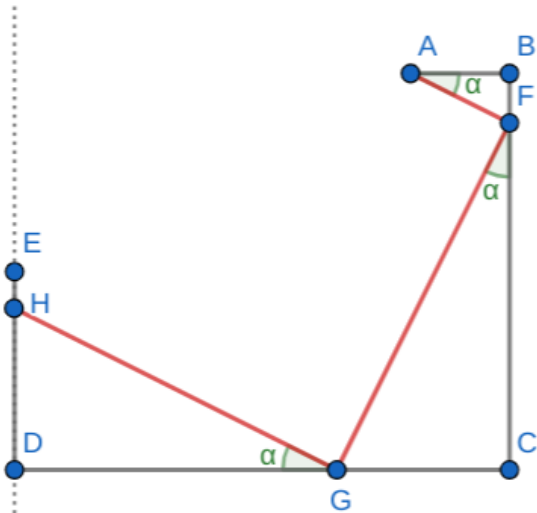
$$\angle GFC = 180^\circ - \angle AFB - \angle AFG \text{ (gestrekte } \angle BFC)$$

$$\angle GFC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ$$

$$\text{Dus } \angle GFC = \angle FAB = \alpha$$

Q. E. D.

Dezelfde redenering gaat ook op voor  $\angle HGD$ . In de afbeelding op de volgende pagina zijn de 3 even grote hoeken  $\alpha$  aangegeven.



Het pad van  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

De volgende lengte die berekend kan worden is BF. Bekend is dat  $AB = 1$  en  $-x = \tan(\alpha)$ . De tangens wordt berekend door de overstaande zijde te delen door de aanliggende zijde.

$$\tan(\alpha) = -x$$

$$\text{Dus } BF = -x$$

Hiermee kan de lengte van het lijnstuk FC berekend worden.

$$FC = BC - BF$$

$$FC = -4 - (-x) = x - 4$$

Nu kan ook de lengte van GC berekend worden.

$$\tan(\alpha) = \frac{GC}{FC}$$

$$GC = \tan(\alpha) * FC$$

$$GC = -x(x - 4)$$

Lijnstuk DG kan op dezelfde manier berekend worden als FC.

$$DG = DC - GC$$

$$DG = 5 - (-x(x - 4))$$

$$DG = 5 + x(x - 4)$$

De laatste driehoek in de afbeelding is  $\Delta DGH$ . Om EH te berekenen, is lengte DH nodig.

$$\tan(\alpha) = \frac{DH}{DG}$$

$$DH = \tan(\alpha) * DG$$

$$DH = -x(5 + x(x - 4))$$

EH berekenen is nou erg simpel.

$$EH = DE - DH$$

$$EH = -2 - (-x(5 + x(x - 4)))$$

$$EH = -2 + x(5 + x(x - 4))$$

Deze vorm van EH ziet er misschien bijzonder uit, maar als de haakjes worden weggewerkt is het duidelijk dat hier de derdegraadsvergelijking staat waar we mee zijn begonnen.

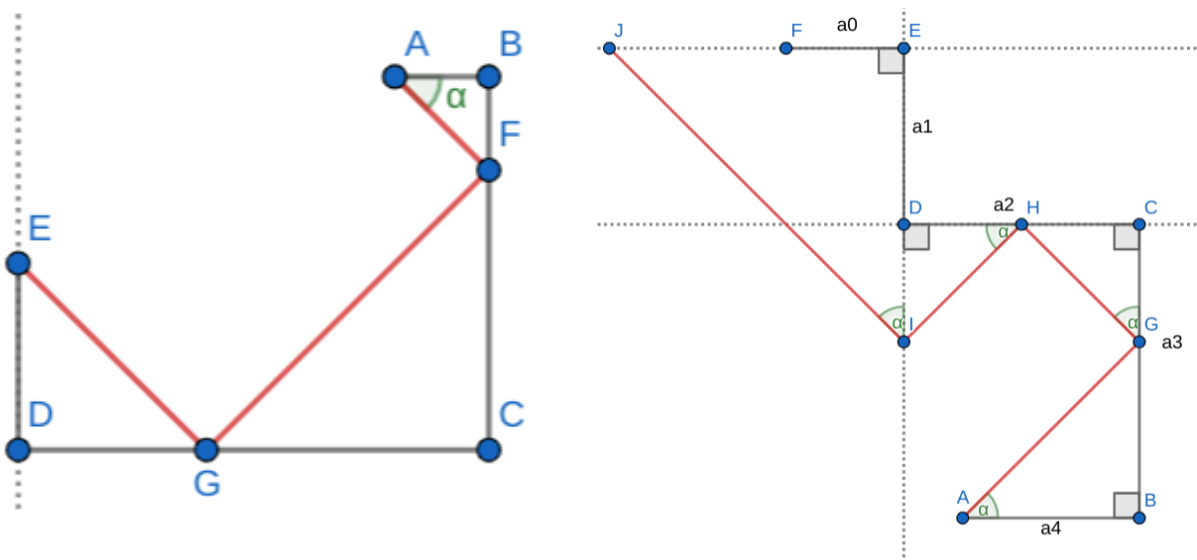
$$EH = -2 + x(5 + x(x - 4)) = -2 + x(5 + x^2 - 4x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

Maar hoe koppelen we dit aan het oplossen van de vergelijking? Daarvoor kijken we naar de lengte van EH. Als de laser zo geschoten wordt dat deze het eindpunt E raakt, dan is de lengte van EH 0. H, het eindpunt van de laser, ligt dan namelijk op E, het eindpunt van het pad van de vergelijking. Zojuist was te zien dat de lengte van EH gelijk is aan de functie. Dat betekent dat voor  $EH = 0$  geldt dat  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ . En  $x = -\tan(\alpha)$ . Dus de  $x$  kan nu berekend worden aan de hand van de hoek tussen het pad en de laser. In dit geval is de hoek  $45^\circ$ .

Aangezien het laserpad onder het pad van de vergelijking ligt, wordt voor  $\alpha$  een negatieve hoek ingevuld. Dit geeft  $x = -\tan(-45^\circ) = 1$ . Invullen geeft:

$$1^3 - 4 * 1^2 + 5 * 1 - 2 = 1 - 4 + 5 - 2 = 0$$

Een reële oplossing van de vergelijking is gevonden. Door de laser opnieuw te richten kan er nog een pad gevonden waarvoor de laser door E gaat. Er zijn namelijk 2 reële oplossingen voor de vergelijking  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ .



Nu duidelijk is waarom Lill's methode werkt, kan er een algemeen bewijs worden opgesteld. Hiervoor gebruiken we de vergelijking  $-a_0 - a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$  en  $-x = \tan(\alpha)$ . Verder gebruiken we het bewijs van de gelijkvormige driehoeken, dat we zojuist hebben geleverd. De afbeelding rechtsboven wordt gebruikt als voorbeeld voor de standaardpolynoom. Hierin zijn de lengtes van de lijnstukken, de rechte hoeken en de hoeken met grootte  $\alpha$  aangegeven. Omdat de coëfficiënten zowel positief als negatief kunnen zijn, zijn voor  $a_1$  en  $a_0$  negatieve coëfficiënten gekozen. De  $a_1$  en  $a_0$  zijn lengtes en dus positieve getallen, en dus is er in het bewijs een minteken voor geplaatst. Alle lengtes  $a$  zijn positief, zoals in de rechter afbeelding te zien is. In dit algemene bewijs is de werkwijze hetzelfde als bij het bewijs met getallen. Als eerst wordt dus  $\triangle ABG$  bekeken, dan  $\triangle GCH$ ,  $\triangle HDI$  en tot slot  $\triangle IEJ$ .

$$\text{Bewijs dat } FJ = -a_0 - a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

$$\tan(\alpha) = \frac{BG}{AB}, \text{ dus}$$

$$BG = \tan(\alpha) * AB = -a_4x$$

$$HC = \tan(\alpha) * (BC - BG) = -x(a_3 + a_4x)$$

$$DI = \tan(\alpha) * (DC - HC) = -x(a_2 + x(a_3 + a_4x))$$

$$EJ = \tan(\alpha) * (DE + DI) = -x(a_1 - x(a_2 + x(a_3 + a_4x)))$$

*De laser raakt hier niet lijnstuk DE, maar het verlengde ervan. Daarom worden de lijnstukken opgeteld. In de afbeelding is dit te zien.*

$$FJ = EJ - EF = -x(a_1 - x(a_2 + x(a_3 + a_4x))) - a_0$$

Deze vergelijking kan als volgt uitgewerkt worden:

$$FJ = -a_0 - x(a_1 - x(a_2 + x(a_3 + a_4x)))$$

$$FJ = -a_0 - x(a_1 - x(a_2 + a_3x + a_4x^2))$$

$$FJ = -a_0 - x(a_1 - a_2x - a_3x^2 - a_4x^3)$$

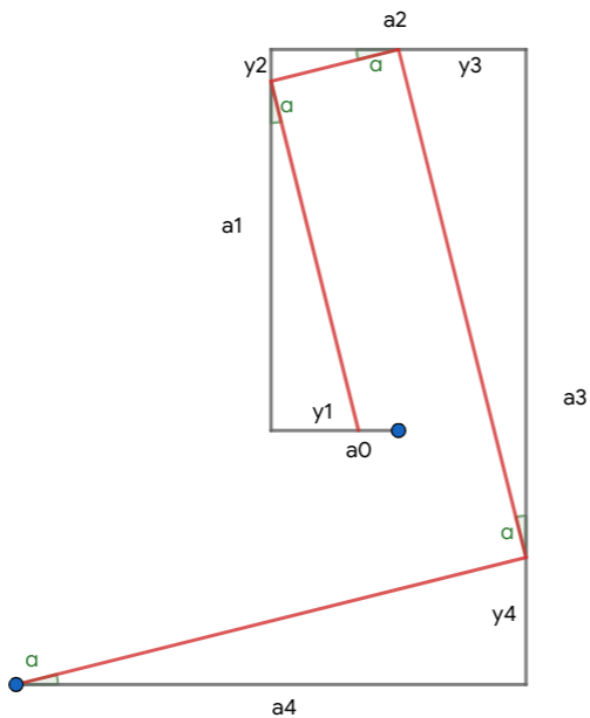
$$FJ = -a_0 - a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

*Q. E. D.*

Lill's methode werkt dus voor derdegraadsvergelijkingen en vierdegraadsvergelijkingen met reële coëfficiënten, zowel positief als negatief.

De laatste stap is de algemene vorm van een polynomiale vergelijking, oftewel

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ . De driehoekszijden overstaand vanuit  $\alpha$  gezien worden aangegeven met  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_0$ . Deze lengtes moeten berekend worden. In de afbeelding op de volgende pagina is een voorbeeld gegeven van een polynomiale vergelijking, waarin de zijdes die bedoeld worden met  $y_n$  zijn aangegeven. De eerste zijde die berekend wordt is  $y_n$ , dan volgt  $y_{n-1}$ , en als laatste wordt de lengte van  $y_1$  berekend.



Bewijs dat  $a_0 - y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$  voor  $x = \tan(\alpha)$

$$\tan(\alpha) = \frac{y_n}{a_n}$$

$$y_n = \tan(\alpha) * a_n = - a_n x$$

$$y_{n-1} = \tan(\alpha) * (a_{n-1} - y_n) = - x(a_{n-1} + a_n x)$$

...

$$y_1 = \tan(\alpha) * (a_1 - y_1) = - x(a_1 + \dots x(a_{n-1} + x(a_n))\dots)$$

$$a_0 - y_1 = a_0 + x(a_1 + \dots x(a_{n-1} + x(a_n))\dots)$$

$$a_0 - y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Q. E. D.

Hoewel de polynomiale vergelijking in de "haakjesvorm" niet zo goed herkenbaar is, kan het uitgewerkt worden naar  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ . Dus voor  $a_0 = y_1$  (als de laser het eindpunt raakt) geldt dat de polynoom gelijk is aan 0. Voor iedere polynomiale vergelijking kunnen dus de reële oplossingen gevonden worden aan de hand van Lill's methode.

(Reniers, 2020)



## 4. Het werk van Beloch

### 4.1 Achtergrond

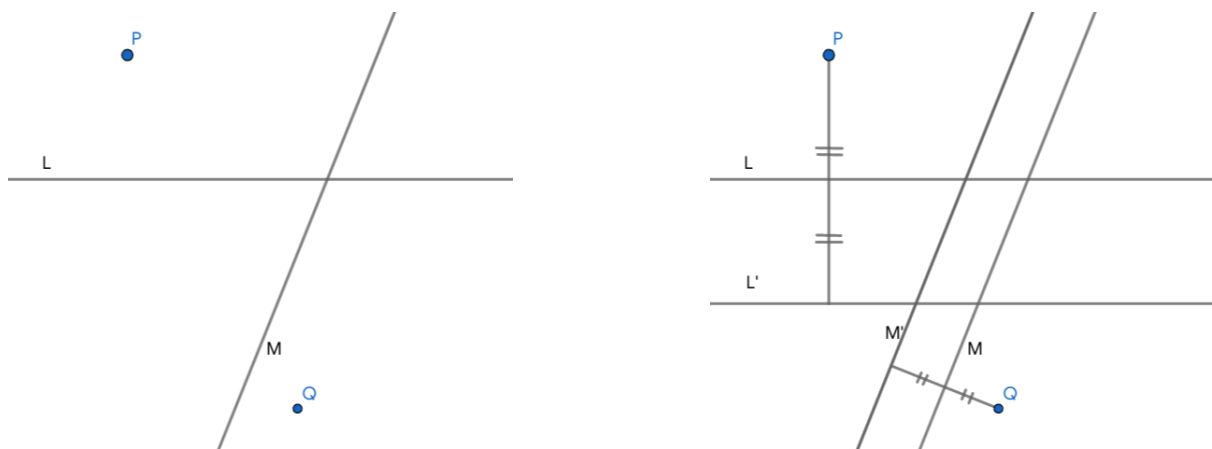
Zo'n 70 jaar na de publicatie van Lill's methode, creëerde Beloch een variatie op zijn methode voor derdegraadsvergelijkingen. Ze loste de vergelijkingen op aan de hand van origami met een vouw die bekend is geworden als de vouw van Beloch. Margherita Piazzolla Beloch was een Italiaanse wiskundige. Ze werd geboren op 12 juli 1879 in Frascati en studeerde in Rome.

Tijdens haar leven hield Beloch zich bezig met verschillende gebieden in de wiskunde. Naast geometrie publiceerde ze werken over algebraïsche topologie en fotogrammetrie. Haar bijdragen aan de wiskunde van origami bewees dat er met origami meer mogelijkheden zijn dan met constructie aan de hand van passer en liniaal. Ze liet namelijk zien dat het mogelijk was om een raaklijn aan twee parabolen te vouwen met de vouw die in axioma 6 besproken is. Hoe deze vouw het mogelijk maakt om derdegraadsvergelijkingen op te lossen met origami, zal in de volgende paragraaf duidelijk worden ("Margherita Piazzolla Beloch", 2019).

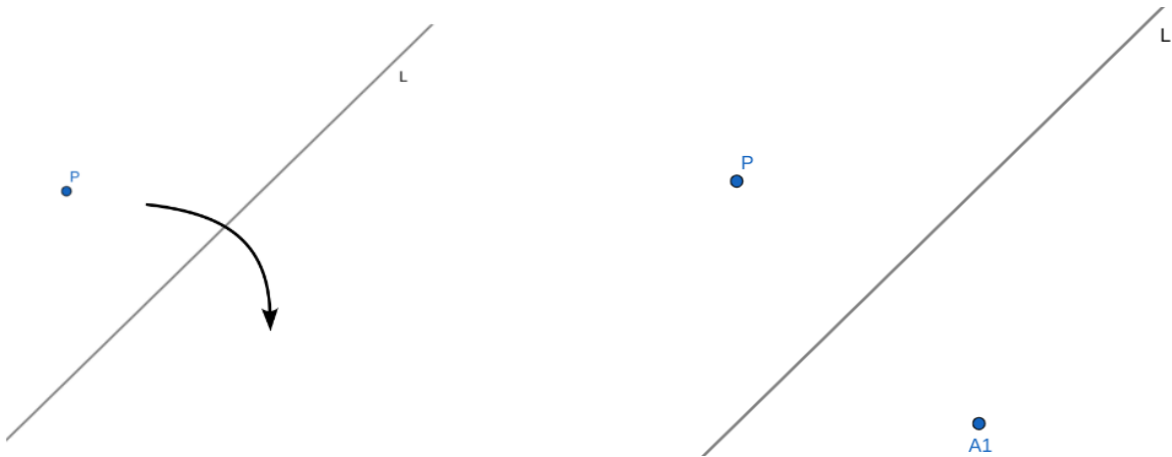
### 4.2 Het vierkant van Beloch

Het werk van Beloch begint met een constructieprobleem:

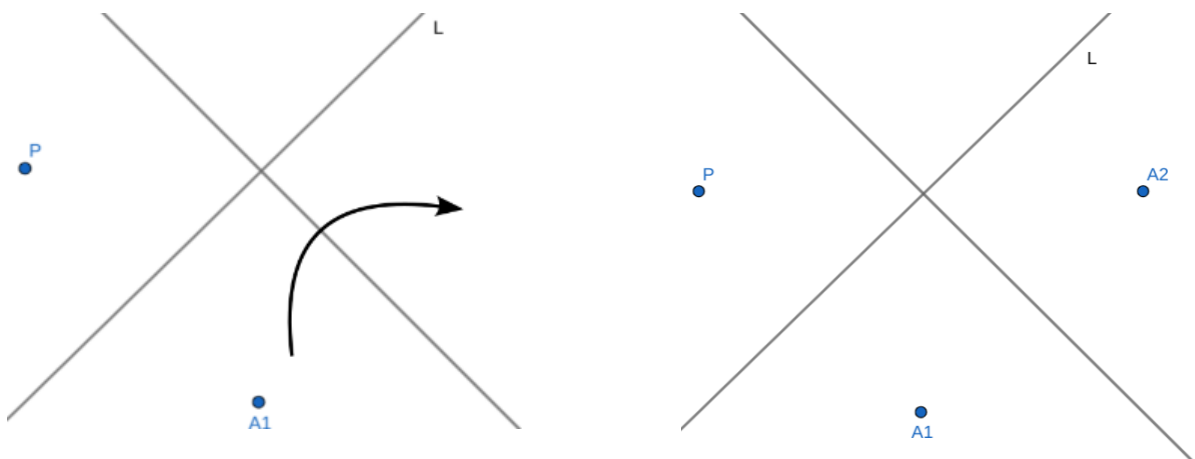
Gegeven zijn twee punten P en Q en twee lijnen L en M. Construeer een vierkant WXYZ zo dat X en Y respectievelijk op L en M liggen, en dat de zijdes, of het verlengde ervan, respectievelijk door P en Q gaan. Een mogelijke situatie is in de afbeelding links te zien.



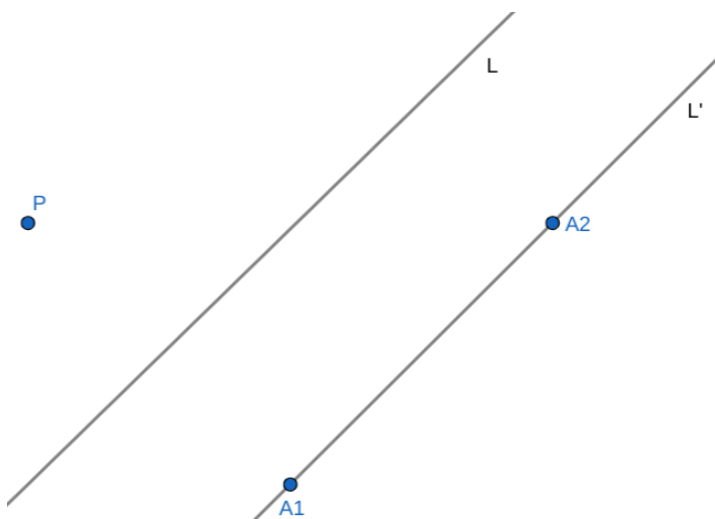
Aan de hand van origami kan dit probleem opgelost worden. Bereken eerst de (loodrechte) afstand van P naar L. Teken nu een lijn L' parallel aan L, zodat de afstand van P tot L gelijk is aan de afstand van L tot L'. Herhaal dit proces met punt Q en lijn M, zodat een lijn M' ontstaat. Dit is in de rechter afbeelding hierboven gevisualiseerd. Op de volgende pagina is aan de hand van een punt P en lijn L uitgelegd hoe deze lijnen L' en M' gevouwen worden.



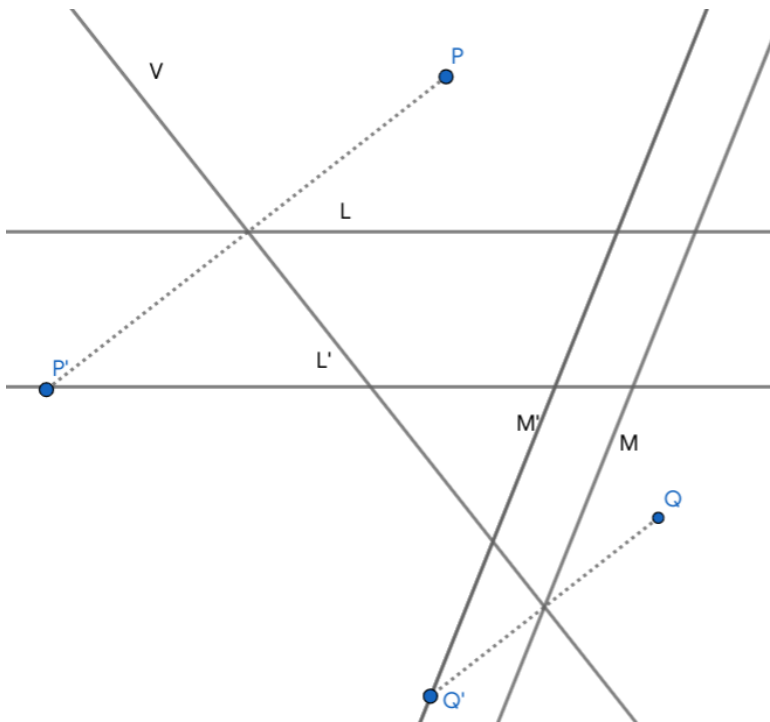
De lijnen  $L'$  en  $M'$  kunnen aan de hand van origami geconstrueerd worden. Hiervoor wordt eerst een vouwlijn langs  $L$  gevouwen (afbeelding linksboven) en het punt  $A_1$  waar  $P$  dan landt wordt aangegeven (afbeelding rechtsboven). Dan wordt er een vouwlijn gemaakt loodrecht op  $L$ , zoals aangegeven in axioma 4 (afbeelding linksonder). De plek waar  $A$  nu landt wordt aangegeven met  $A_2$  (afbeelding rechtsonder).



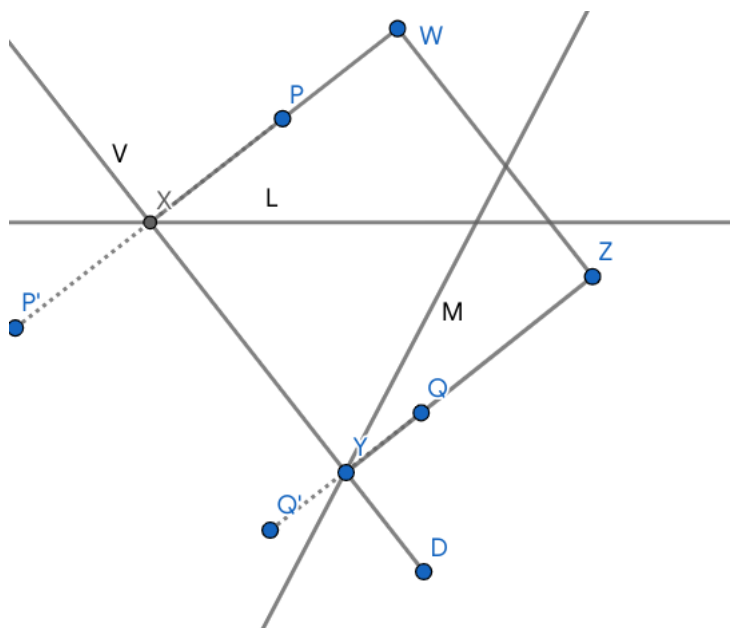
Volgens axioma 1 kan er nu een lijn gevouwen worden door  $A_1$  en  $A_2$  (afbeelding onder). Deze lijn is de gezochte lijn  $L'$ , omdat  $L'$  parallel ligt aan  $L$ ,  $A_1$  en  $A_2$  liggen namelijk even ver van  $L$  vandaan, en omdat de afstand van  $P$  naar  $L$  en van  $L$  naar  $L'$  gelijk is. Dit criterium is volbracht doordat  $L$  de middelloodlijn is van  $P$  en  $A_1$ . Nu  $L'$  gevonden is, kan dit proces herhaald worden voor  $M'$ .



De volgende stap is de vouw van Beloch, die eerder als axioma 6 werd aangeduid. Creëer een vouw die P op L' plaatst en Q op M'. Noem de punten waarop P en Q geplaatst worden respectievelijk P' en Q'. In de afbeelding hieronder is de vouwlijn V getekend.



In de afbeelding is te zien dat vouwlijn V de middelloodlijn is van  $PP'$  en  $QQ'$ . De hoekpunten X en Y van het vierkant van Beloch worden geplaatst op de middelpunten van  $PP'$  en  $QQ'$ , oftewel de snijpunten van die lijnstukken met vouwlijn V. Aangezien L' en M' zo zijn geconstrueerd dat L en M respectievelijk precies tussen L' en P, en M' en Q in liggen, liggen punten X en Y dus op lijnen L en M. In de afbeelding hieronder zijn X en Y getekend. Het vierkant is ook al afgemaakt met hoekpunten W en Z.



Hoe worden de punten  $W$  en  $Z$  geconstrueerd? Het eerste criterium van Belochs vierkant, dat  $X$  en  $Y$  respectievelijk op  $L$  en  $M$  liggen, is volbracht. Aan het tweede criterium, dat  $P$  en  $Q$  op de zijdes of diens verlengdes moeten liggen, is nog geen gehoor gegeven. Wel is duidelijk dat  $P$  en  $Q$  niet op (het verlengde van) zijde  $XY$  liggen, omdat de punten niet op de vouwlijn kunnen liggen.

De lijn door  $X$  en  $P$  staat loodrecht op  $XY$  en gaat door  $P$ . Daarom ligt zijde  $WX$  op de lijn door  $X$  en  $P$ . De lengte van  $WX$  is gelijk aan de lengte van  $XY$ , aangezien  $WXYZ$  een vierkant is. Hetzelfde geldt voor de lijn door  $Y$  en  $Q$ . Zijde  $YZ$  ligt dus op de lijn door  $Y$  en  $Q$ . Ook voor het tekenen van een vierkant kan origami gebruikt worden. Vouw hiervoor eerst een diagonaal van vierkant  $WXYZ$  door lijnstuk  $XY$  op de lijn door  $X$  en  $P$  te vouwen. Deze vouw is beschreven in axioma 3.

Het snijpunt van deze vouwlijn en de lijn door  $X$  en  $P$  is het hoekpunt  $W$  van dit vierkant. Hoekpunt  $Z$  kan dan gevonden worden door de loodlijn van het verlengde van  $XP$  te tekenen die door hoekpunt  $W$  gaat. Het snijpunt van deze loodlijn en het verlengde van  $YQ$  is hoekpunt  $Z$ .

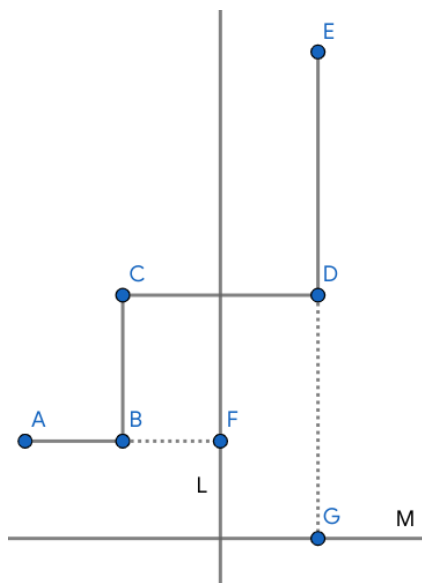
(Hull, 2011)

## 5. De origami-methode

### 5.1 Werking origami-methode

De origami-methode begint op dezelfde manier als de methode van Lill. Het verschil is dat er niet met een laser wordt gezocht naar een resultaat, maar met origami, door middel van de vouw van Beloch.

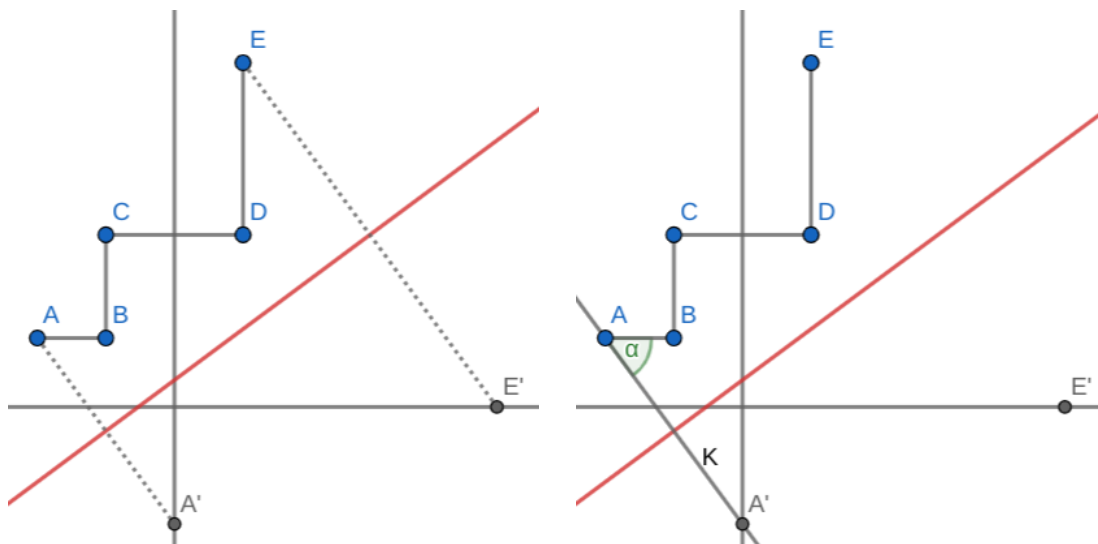
Voor het oplossen van de vergelijking  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = 0$  begint de origami-methode met het tekenen van een pad. Dat gaat op dezelfde manier als Lill's methode: Teken een lijnstuk met lengte  $a_n$  naar links. Draai  $90^\circ$  tegen de klok in en teken een lijnstuk met lengte  $a_{n-1}$ , dat start op de plek waar het vorige lijnstuk eindigde. Herhaal dit proces tot en met  $a_0$ . Teken lijnstukken met een negatief coëfficiënt precies de andere kant op, oftewel achteruit. Nadat het pad is getekend, worden er twee lijnen getekend. De eerste lijn L wordt zo getekend dat deze loodrecht staat op het verlengde van  $a_n$  en dat de afstand tot het beginpunt van het pad van de vergelijking  $2a_n$  is. De lijn M wordt op een vergelijkbare manier getekend. Lijn K staat loodrecht op het verlengde van lijnstuk  $a_0$ , zo dat de afstand tot het eindpunt van het pad van de vergelijking  $2a_0$  is.



Als voorbeeld wordt de vergelijking  $2x^3 + 3x^2 - 4x - 5 = 0$  gebruikt. Het pad is getekend in de afbeelding hierboven, net zoals de lijnen L en M. F ligt op lijn L zodat  $AB = BF$  en G ligt op lijn M zodat  $ED = DG$ .

De tweede stap van de origami-methode is het maken van een vouwlijn die het beginpunt van het pad op L plaatst en het eindpunt op M. Deze vouwlijn, die beschreven is in axioma 6, wordt wel de vouw van Beloch genoemd, aangezien zij ontdekt heeft dat deze vouw gebruikt kan worden om derdegraadsvergelijkingen op te lossen met origami. Zoals in hoofdstuk 2 al staat beschreven, is deze vouw niet altijd mogelijk. De origami-methode heeft daar geen last van, omdat de richtlijnen van de parabolen loodrecht op elkaar staan. Het aantal mogelijke vouwen is dus aan het aantal oplossingen van de vergelijking in  $\mathbb{R}$ . Dit kunnen er 1, 2 of 3 zijn. Geef aan waar het begin- en eindpunt van het pad zijn "geland" op lijnen L en M. Startpunt A wordt aangegeven met A' en eindpunt E wordt aangegeven met E'.

Terug naar het voorbeeld. In de afbeelding links hieronder is een mogelijke vouwlijn in het rood getekend. Ook zijn de punten A' en E' weergegeven. Dit is waar A en E geplaatst worden, als het papier wordt gevouwen volgens de vouwlijn. Hoe deze vouwlijn gevonden kan worden, staat uitgelegd bij axioma 6 in hoofdstuk 2.



De laatste stap van de origami-methode is het berekenen van  $x$  met de formule  $-x = \tan(\alpha)$ . Hiervoor wordt de lijn K getekend vanaf het startpunt van het pad A naar het punt A'. De hoek  $\alpha$  is dan gelijk aan aan de hoek tussen het lijnstuk met lengte  $a_n$  en lijn K. Als lijnstuk  $a_n$  boven lijn K ligt op het snijpunt, geldt dat hoek  $\alpha$  als negatief genomen moet worden. In andere gevallen is  $\alpha$  positief. In de afbeelding rechtsboven is deze hoek weergegeven voor het voorbeeld  $2x^3 + 3x^2 - 4x - 5 = 0$ . De waarde voor  $x$  die een oplossing is voor deze vergelijking kan nou berekend worden. In het voorbeeld geldt  $\alpha = -53,5^\circ$ .

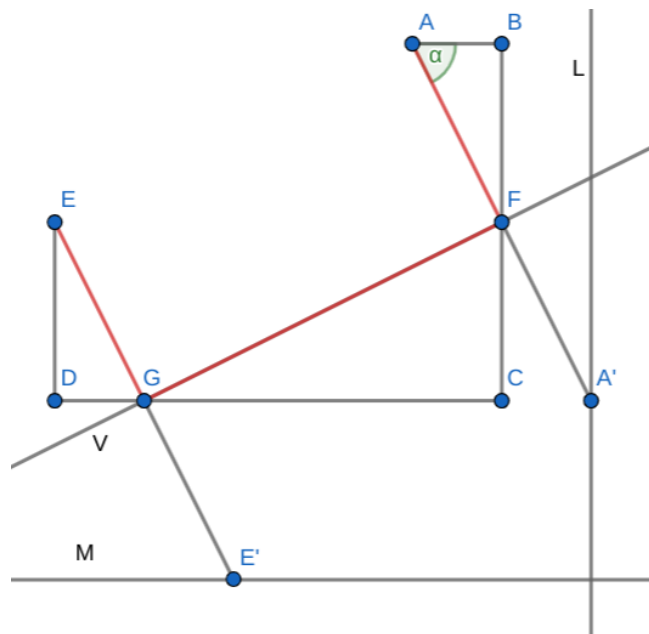
$$-x = \tan(\alpha)$$

$$x = -\tan(-53,5^\circ) \approx 1.35$$

Invullen in de vergelijking  $2x^3 + 3x^2 - 4x - 5 = 0$  laat zien dat deze  $x$  inderdaad een oplossing is.

## 5.2 Bewijs origami-methode

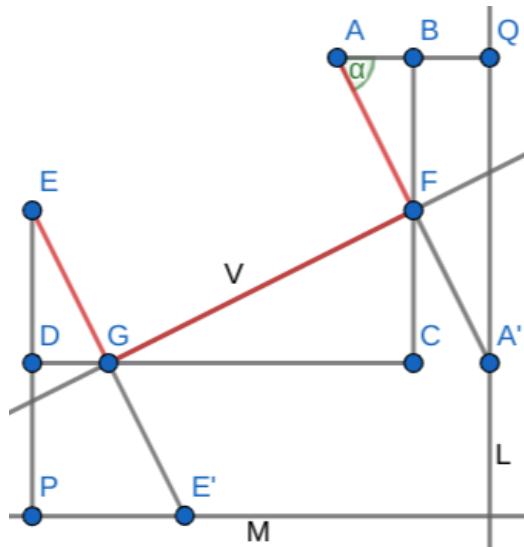
Het lijkt zo te zijn dat derdegraadsvergelijkingen opgelost kunnen worden met origami. Maar waarom werkt dit? Door de origami-methode te vergelijken met Lill's methode, kan Beloch's werkwijze begrepen worden. Hiervoor wordt het voorbeeld  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$  gebruikt. Dit voorbeeld was ook al te zien in hoofdstuk 3. Aangezien deze vergelijking 2 reële oplossingen heeft, is hieronder een ander mogelijk laserpad getekend.



In de afbeelding is het pad getekend van de vergelijking. Ook het pad van de laser van Lill's methode is getekend, inclusief de hoek  $\alpha$ . Volgens de origami-methode zijn de lijnen L en M getekend, en de punten E' en A'. Dit zijn de plekken waar A en E op terechtkomen als het papier volgens vouwlijn V is gevouwen. De hoek  $\alpha$  tussen lijnstuk AB en lijnstuk AA' is ook aangegeven. Deze hoek  $\alpha$  lijkt overeen te komen met de hoek  $\alpha$  van Lill's methode. Verder lijkt het midden van het laserpad, lijnstuk FG, op de vouwlijn te liggen. Als bewezen wordt dat lijnstuk FG op vouwlijn V ligt, dan is de origami-methode bewezen, omdat de hoek  $\alpha$  van de origami-methode dan overeenkomt met de hoek  $\alpha$  van Lill's methode. Deze hoek is via  $-x = \tan(\alpha)$  namelijk direct gekoppeld aan de oplossingen van de vergelijking. Om te bewijzen dat GF op de vouwlijn ligt die E op E' plaatst en A op A', moeten er vier zaken bewezen worden:

1.  $EG = E'G$
2.  $EE'$  loodrecht op GF
3.  $AF = A'F$
4.  $AA'$  loodrecht op GF

Punt 1 en 2 bewijzen samen dat een vouwlijn door GF E op E' plaatst. Een vouwlijn die één punt op een ander punt plaatst is namelijk de middelloodlijn (O2). Punten 3 en 4 werken hetzelfde, maar dan voor A en A'. Op de volgende pagina zijn stellingen 1 t/m 4 bewezen aan de hand van de afbeelding die erboven staat.



1. Bewijs dat  $EG = E'G$

Teken het verlengde van DE, dat de lijn M in het punt P snijdt.  $EP = 2ED$ , dus  $ED:EP = 2 : 1$ .

$$\angle E'EP = \angle E'EP$$

$$EP : PD = 2 : 1$$

$$\angle EDG = \angle EPE' = 90^\circ$$

Dus  $\triangle EDG \cong \triangle EPE'$  (hzh)

$$2 EG = EE' (\triangle EDG \cong \triangle EPE')$$

$$\text{Dus } EG = E'G$$

Q. E. D.

2. Bewijs dat  $EE'$  loodrecht op GF staat

EG en FG zijn beide onderdeel van het laserpad. De definitie van dit pad stelt dat

$$\angle EGF = 90^\circ, \text{ dus } EE' \text{ staat loodrecht op GF.}$$

Q. E. D.

3. Bewijs dat  $AF = A'F$

Teken het verlengde van AB, dat de lijn L in het punt Q snijdt.  $AG = 2AB$ , dus

$$\angle QAA' = \angle QAA'$$

$$AB : AQ = 2 : 1$$

$$\angle ABF = \angle AQA' = 90^\circ$$

Dus  $\triangle ABF \cong \triangle AQA'$  (hzh)

$$2 AF = AA' (\triangle ABF \cong \triangle AQA')$$

$$\text{Dus } AF = A'F$$

Q. E. D.

4. Bewijs dat  $AA'$  loodrecht op GF staat

AF en FG zijn beide onderdeel van het laserpad. De definitie van dit pad stelt dat

$$\angle AFG = 90^\circ, \text{ dus } AA' \text{ staat loodrecht op GF.}$$

Q.E.D.

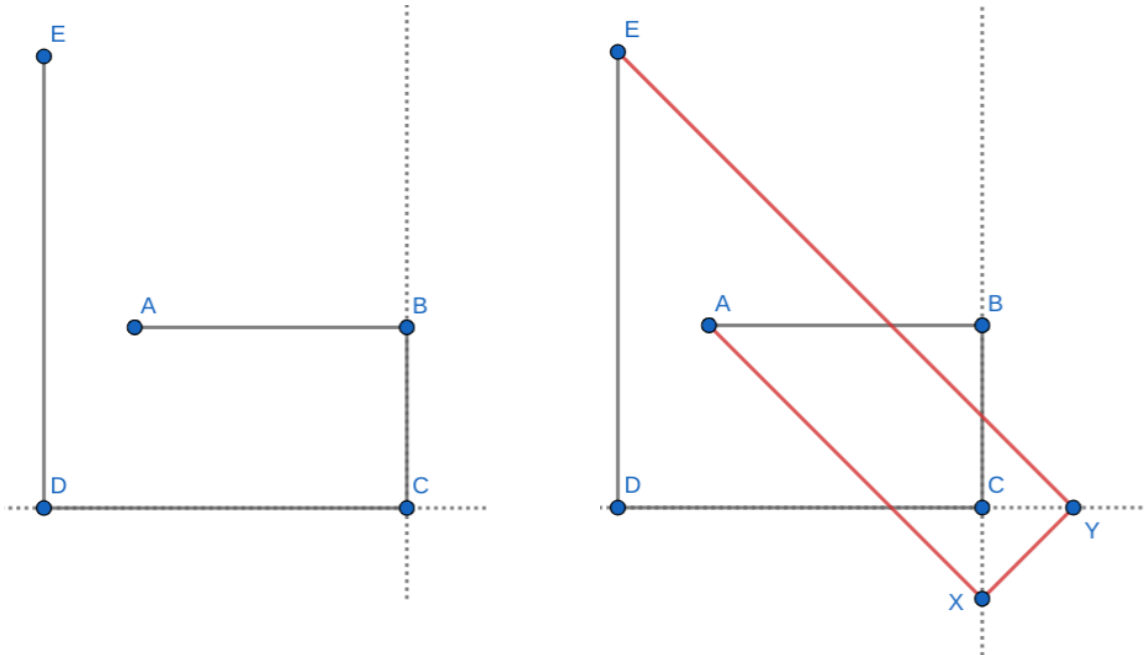
De origami-methode is nu bewezen.

(Reniers, 2020)

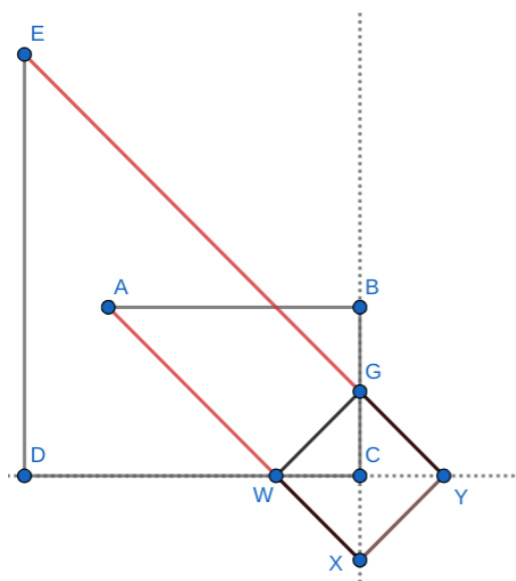


### 5.3 Origami-methode en Beloch's vierkant

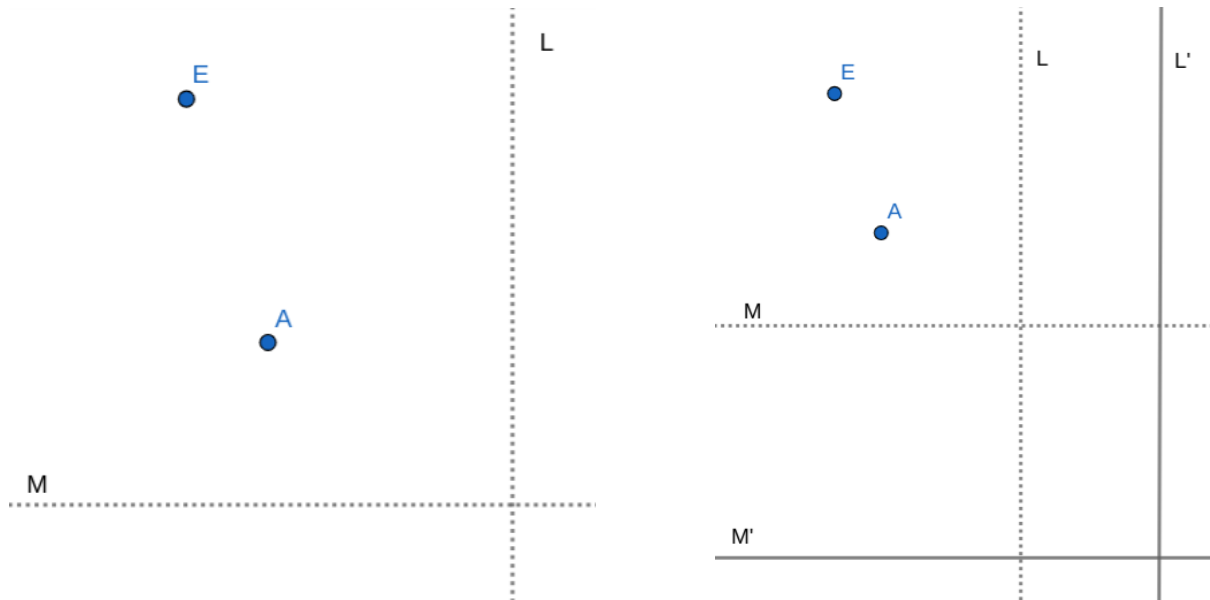
Lill's methode komt voor derdegraadsvergelijkingen overeen met het vouwen van Beloch's vierkant. Hier komt de origami-methode uit voort. De constructie van Beloch's vierkant komt namelijk overeen met het "zoeken" naar een hoek waarvoor de laser het eindpunt van het pad raakt in Lill's methode. Het voordeel van Beloch's vierkant is dat het met papier gemakkelijker te vouwen is dan het vinden van de hoek van de laser voor Lill's methode. Om dit te demonstreren wordt het vierkant van Beloch getekend voor de vergelijking  $y = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ . In de linker afbeelding is het pad van de vergelijking volgens Lill's methode getekend en in de rechter afbeelding is het laserpad erbij getekend.



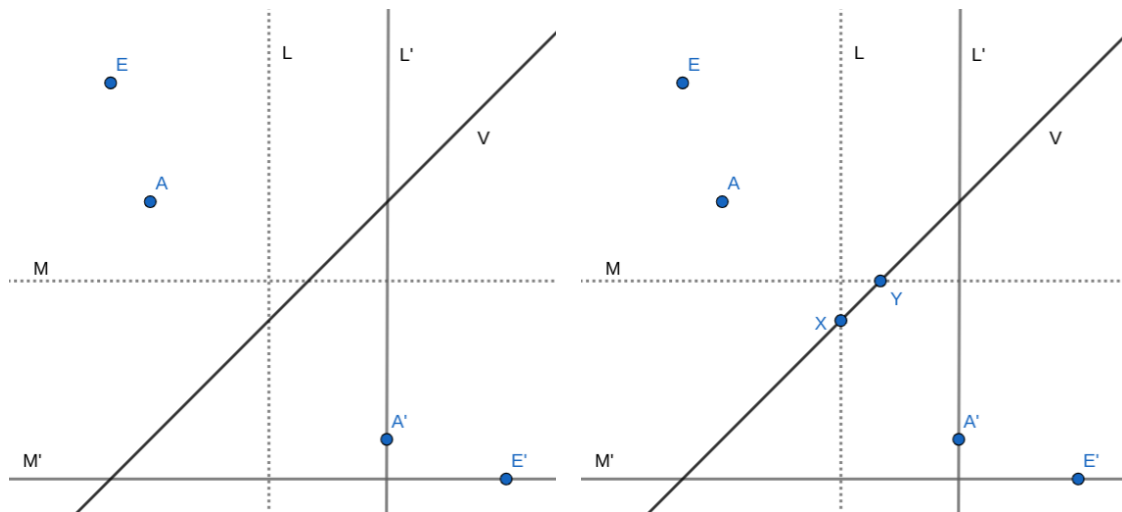
Om het middenstuk van Lill's laserpad te tekenen, wordt er gezocht naar een lijn met hoekpunten X en Y respectievelijk op de lijnen door BC en DC. De punten A en E liggen op zijdes WX en YZ, of het verlengde daarvan. Het vierkant van Beloch is hieronder weergegeven.



De samenhang van Lill's methode en Beloch's vierkant verklaart hoe Beloch op de origami-methode is gekomen. De punten A en E zijn in de afbeelding hieronder aangegeven. Het verlengde van lijnstuk BC is aangegeven met een letter L en het verlengde van lijnstuk CD is aangegeven met een letter M. Volgens het stappenplan van Beloch moeten nu lijnstukken L' en M' getekend worden, waarbij geldt dat  $d(A,L) = d(L,L')$  en  $d(E,M) = d(M,M')$ . Deze lijnen worden in de origami-methode ook getekend.



De tweede stap is de vouw van Beloch. Vouw een lijn die A op L' en E op M' plaatst. Geef de plekken waar A en E op vallen aan met respectievelijk A' en E'. In de linker afbeelding hieronder is de vouwlijn aangegeven met een V. De snijpunten van vouwlijn V en lijnen L en M zijn de punten X en Y. Ze zijn in de rechter afbeelding aangegeven.



Lijnstuk XY is het middelste stuk van Lill's laserpad en vouwlijn V is de vouw die gemaakt wordt bij de origami-methode. Zo heeft Beloch haar vierkant gebruikt om derdegraadsvergelijkingen op te lossen.

(Hull, 2011 )

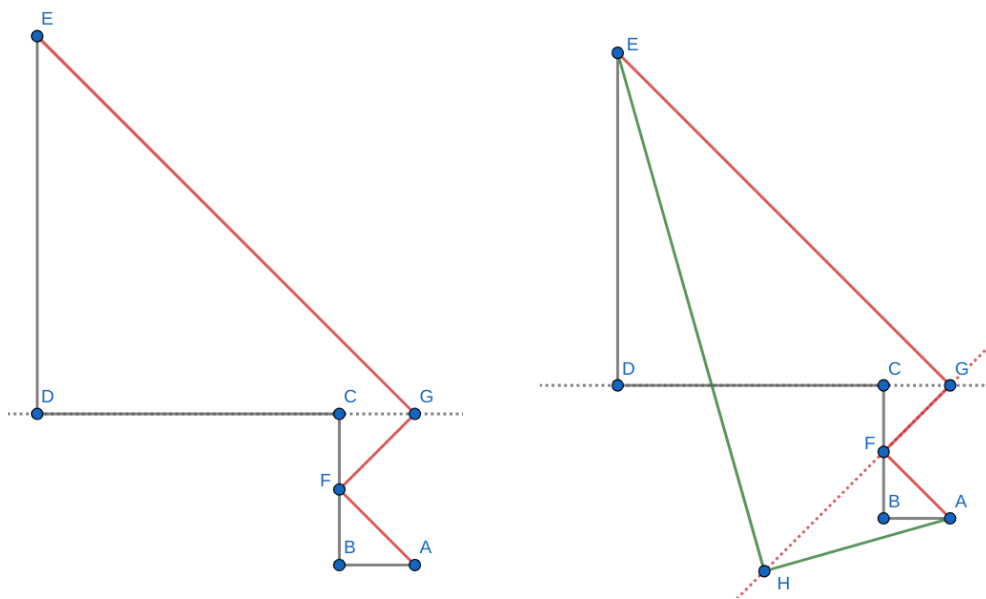
# 6 Meerdere reële oplossingen

## 6.1 Staartdelingen

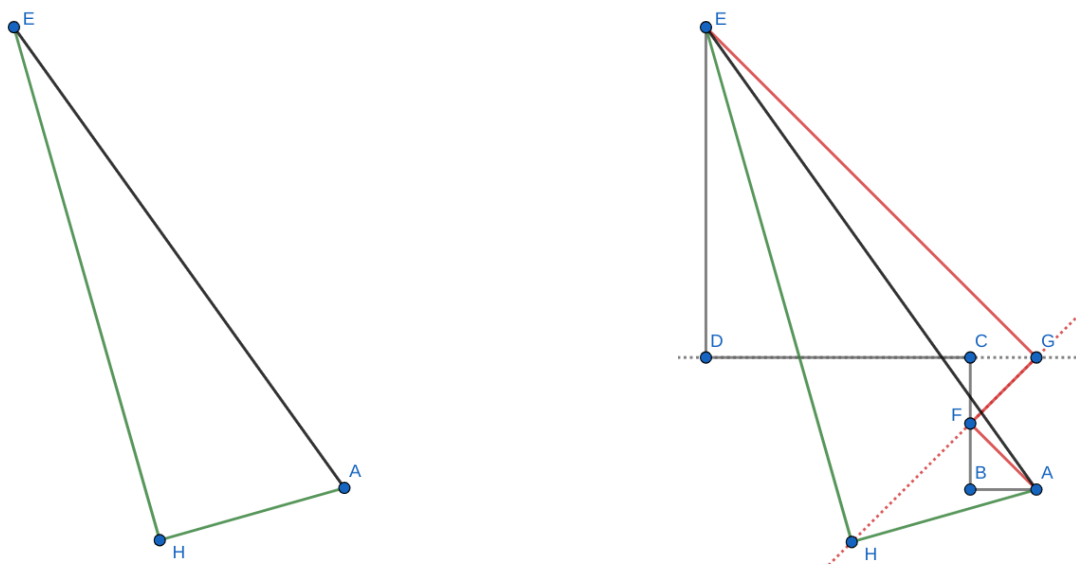
Derdegraadsvergelijkingen kunnen meer dan één reële oplossing hebben. Er bestaat een handig trucje om de tweede en derde oplossing, als deze bestaan in  $\mathbb{R}$ , visueel te vinden. Neem hiervoor de volgende vergelijking:

$$-x^3 + 2x^2 + 4x - 5 = 0$$

Als eerste wordt het pad van de vergelijking getekend via Lill's methode. Het laserpad is in de linker afbeelding ook te zien. De vergelijking heeft echter meer dan één reële oplossing. Om de andere twee te vinden, kunnen er nog twee laserpaden gezocht worden. Er is echter een alternatieve methode. Hiervoor wordt het rode laserpad nu als pad van de vergelijking gebruikt. Hier wordt een laser tegen afgeschoten. In de rechter afbeelding is dit gedaan. Het nieuwe laserpad is met groen aangegeven.

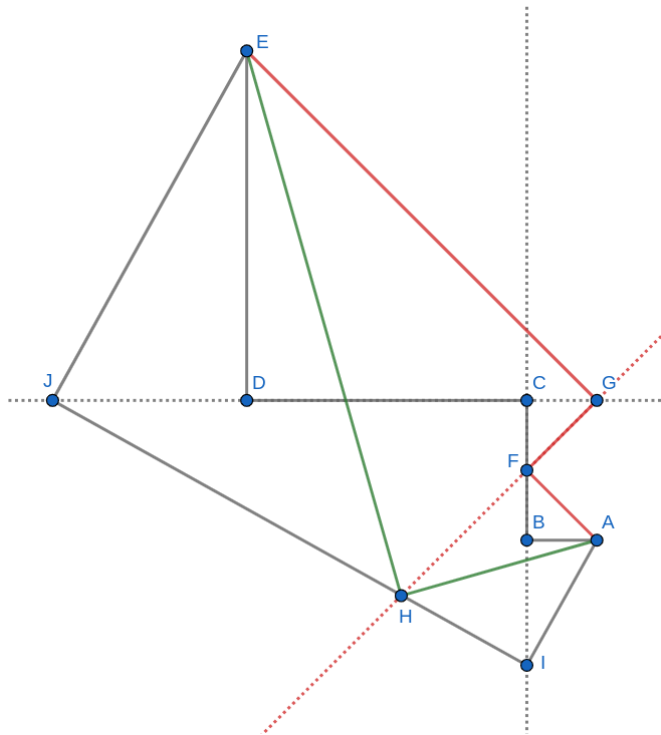


Om het antwoord van de vergelijking te bepalen, wordt ook hier  $x = -\tan(\alpha)$  gebruikt. De hoek  $\alpha$  is dan  $\angle FAH$ . Ook de derde oplossing kan zo bepaald worden. Hiervoor wordt het groene pad als vergelijkingspannd gezien. Voor de duidelijkheid is in de linker afbeelding enkel dit groene pad en de laatste laser weergegeven. Het totaalplaatje is zichtbaar in de afbeelding rechts.



Waarom werkt dit? En wat is het verband tussen de verschillende vergelijkingen?

De totaalvergelijking  $-x^3 + 2x^2 + 4x - 5 = 0$  en de vergelijking van het rode pad  $-x^2 + x + 5 = 0$  zijn met elkaar verbonden. .



Ieder polynoom kan geschreven worden als  $a(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)\dots(x - b_n) = 0$ , waarbij geldt dat iedere  $b$  staat voor een  $x$ -coördinaat van een snijpunt met de  $x$ -as. Voor derdegraadsvergelijkingen geeft dit  $a(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) = 0$ . Aangezien er op deze manier één oplossing gevonden wordt, is de vergelijking horende bij het laserpad  $a(x - b_1)(x - b_2) = 0$ . Er is namelijk één oplossing uitgedeeld. Als hier weer een laser op af wordt geschoten, heeft deze de vorm  $a(x - b_1) = 0$ . Zo kunnen alle oplossingen van de derdegraadsvergelijking worden gevonden.

De vergelijking  $y = 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4 = 0$  heeft één reële oplossing. Wat gebeurt er als we alsnog deze methode toepassen? Dan vinden we geen oplossing, omdat de kwadratische vergelijking die dan ontstaat geen snijpunten met de  $x$ -as heeft.

(Francesco, 2021)

## 6.2 Bewijs

Een derdegraadsvergelijking van de vorm  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$  omschrijven naar een vergelijking van de vorm  $a(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) = 0$ , waarin de snijpunten met de x-as zichtbaar zijn, wordt gedaan door middel van een staartdeling. Om te bewijzen dat het laserpad dezelfde formule heeft als de originele vergelijking, maar dan als kwadratische vergelijking omdat er één snijpunt is weggehaald, moet dus bewezen worden dat het zoeken van een laserpad bij Lill's methode overeenkomt met een staartdeling. De vergelijking  $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$  wordt gebruikt in de afbeelding, maar het bewijs is algemeen. Hiervoor wordt dus de vergelijking  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  gebruikt. Verder kiezen we  $x = -e$ . Het pad van de vergelijking en het laserpad zijn in de figuur hieronder getekend. Daarnaast zijn de lengtes van lijnstukken AB, CF, DG en HE aangegeven. Deze zijn op dezelfde manier berekend als in het hoofdstuk over Lill's methode. De lengte van lijnstuk BF is in dit geval  $ae$ :

$$x = -\tan(\alpha)$$

$$x = -e$$

$$\tan(\alpha) = e = \frac{BF}{AB}$$

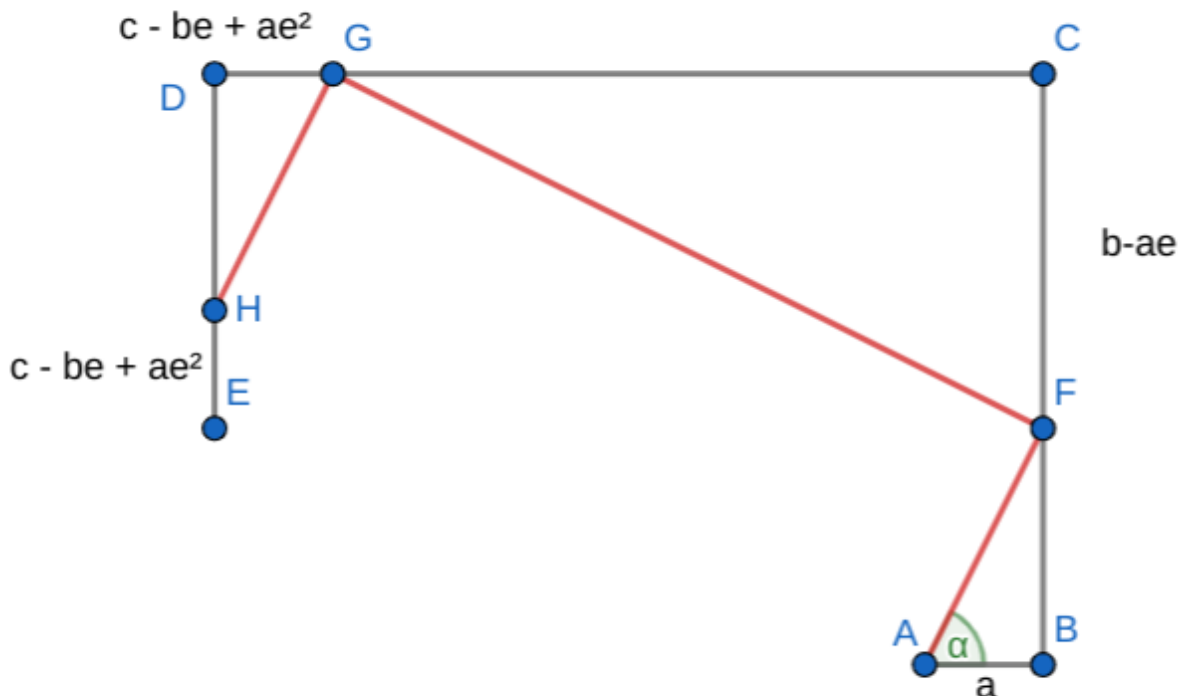
$$BF = e \cdot AB = ae$$

De lengte van CF is dan  $b - ae$ :

$$CF = BC - BF$$

$$CF = b - ae$$

De overige lijnstukken zijn op dezelfde manier berekend.



Vervolgens wordt de staartdeling uitgevoerd.

$$\begin{array}{r}
 x + e / ax^3 + bx^2 + cx + d \setminus ax^2 + (b - ae)x + (c - be + ae^2) \\
 ax^3 + aex^2 - \\
 \hline
 (b - ae)x^2 + cx + d \\
 (b - ae)x^2 + (b - ae)ex - \\
 \hline
 (c - be + ae^2)x + a \\
 (c - be + ae^2)x + (c - be + ae^2)e - \\
 \hline
 d - cd + be^2 - ae^3
 \end{array}$$

Deze waarden komen bekend voor. Ze zijn namelijk gelijk aan de lengtes van respectievelijk AB, CF, DG en EH. Dit bewijst dat er inderdaad een staartdeling wordt uitgevoerd door Lill's methode. Dat betekent dat het laserpad overeenkomt met een tweedegraadsvergelijking die 1 snijpunt minder heeft dan de derdegraadsvergelijking waar het oorspronkelijke pad van gemaakt was. Voor het vinden van de tweede en derde reële oplossingen van een derdegraadsvergelijking, kan dus het laserpad van Lill's methode gebruikt worden als laserpad. Zo wordt de vergelijking met iedere gevonden waarde van x een stukje minder ingewikkeld en het vinden van het laserpad een stukje makkelijker.

## 7. Slot

### 7.1 Conclusie

In dit profielwerkstuk is bewezen dat het mogelijk is om derdegraadsvergelijkingen op te lossen met origami. Beloch's vierkant heeft zowel de wiskunde als de origami vooruit geholpen. De hoofdvraag was: *"In hoeverre sluit het oplossen van derdegraadsvergelijkingen met origami aan bij de wiskunde die op het VWO wordt behandeld?"*

De benodigde wiskunde voor de origami-methode is in de lessen wiskunde D aan bod is gekomen. Dit betekent dat het PWS daar goed op aan sluit. Wel is het lesprogramma wiskunde D verschillend per school, dus dat dit op het Odulphuslyceum aan het bod komt, betekent niet dat dat overal zo is. Voor leerlingen uit vwo 6 met enkel wiskunde B moet het grootste gedeelte van dit profielwerkstuk te begrijpen zijn. Bepaalde begrippen zoals analytische meetkunde en axioma's komen hen niet bekend voor, maar dat zou het begrip van de origami-methode niet veel moeten belemmeren. Het bewijs van de origami-methode zelf rust slechts enkel op gelijkvormige driehoeken, dus dat is voor de meeste leerlingen uit vwo 3 ook te begrijpen. De methode zelf is nog minder complex; enkel de tangens en hoeken van  $90^\circ$  komen aan bod. Het gevaar hiervan is dat de origami-methode een trucje zal zijn, zolang het bewijs niet begrepen wordt. Een beetje extra wiskundekennis maakt dit mogelijk.

Door de hoofdstukken in dit profielwerkstuk in te delen op wiskundig niveau, wordt duidelijk in hoeverre de origami-methode kan worden uitgelegd aan leerlingen met een bepaalde wiskundige kennis. Neem als eerst de origami-axioma's. De eerste 4 axioma's gaan over lijnen, hoeken, bissectrices en loodlijnen. Dit is te begrijpen voor leerlingen uit de onderbouw van het vwo. Het begrijpen van axioma 5 en 6 vereist echter kennis van analytische meetkunde. Ook wordt er gebruik gemaakt van een bewijs uit het ongerijmde; deze onderwerpen komen bij wiskunde D in 5 vwo aan bod. Aangezien axioma 6 de basis is van de origami-methode, is het belangrijk dat dit goed begrepen wordt. Dit hoofdstuk leent zich beter voor mensen met een wat grotere basiskennis van wiskunde, dus voor leerlingen uit de 5e of 6e met wiskunde D in hun pakket.

Lill's methode is echter een stuk minder ingewikkeld. De methodiek kan aan iedere onderbouwleerling uitgelegd worden en het bewijs is ook niet bijzonder complex. Leerlingen uit 3 vwo kunnen op deze manier vergelijkingen met hogere machten oplossen, op een begrijpelijke manier. Dit zal een welkome afwisseling zijn van de tweedegraadsvergelijkingen waar ze veel mee te maken krijgen.

Het vierkant van Beloch lijkt ingewikkeld, maar is goed uit te leggen aan vwo-leerlingen, zolang ze de kans krijgen om zelf mee te vouwen. Het probleem is wel van een hoger niveau dan Lill's methode en meer geschikt voor leerlingen uit de bovenbouw, vooral als ze bezig zijn geweest met analytische meetkunde.

De origami-methode is in een bepaalde zin nog simpeler dan Lill's methode. Beloch's aanpak is bijzonder makkelijk uit te leggen, en het bewijs kan aan de hand van gelijkvormige driehoeken geleverd worden. Om te begrijpen hoe ze hierop is gekomen, is wel een betere kennis van zaken nodig. Door origami worden derdegraadsvergelijkingen tastbaar en is het antwoord zo gevonden. Deze visuele methode is te begrijpen voor leerlingen vanaf vwo 3, maar leerlingen uit

vwo 6 zullen beter begrijpen hoe Beloch hierop is gekomen. Ook is de relatie tussen staartdelingen en origami interessant voor deze doelgroep.

Het oplossen van complexe vergelijkingen met origami maakt wiskunde tastbaarder en begrijpelijker. Ook laat de origami-methode zien dat er meer takken van de meetkunde zijn dan enkel de Euclidische variant. Daarnaast wordt duidelijk dat wiskundige onderwerpen, zoals analytische meetkunde en staartdelingen, veel met elkaar te maken kunnen hebben. Hoewel de origami-methode geen exacte of complexe antwoorden zal geven, is het toch een waardevol stukje wiskunde, dat qua wiskundeniveau uitermate geschikt is voor leerlingen op het vwo.



## 7.2 Evaluatie

Ik vond het heel leuk om aan dit profielwerkstuk te werken. Dat het combineren van origami en wiskunde zou leiden tot een creatieve manier om derdegraadsvergelijkingen op te lossen, had ik niet verwacht voordat ik aan dit PWS begon. Ook bleek toevallig dat de wiskunde die nodig was om dit onderzoek uit te voeren minder complex was dan ik eerst dacht. Het is zonde dat dit werk van Beloch en Lill nauwelijks meer wordt gebruikt, aangezien het een prachtige manier is om met wiskunde bezig te zijn. Hoewel ik het jammer vond dat deze methode enkel in ingewikkelde wiskundescripties werd beschreven, gaf het me wel de kans om een interessant profielwerkstuk te schrijven.

Mijn doel, om op de Japan Super Science Fair dit profielwerkstuk te presenteren, zorgde voor een grote tijdsdruk. De deadline werd verplaatst van januari naar oktober! Ook moest ik mijn onderzoek presenteren in het Engels door middel van een powerpoint en een poster. Hoewel ik het pittig vond om alles op tijd af te krijgen, ben ik blij dat ik hier toch voor heb gekozen. De science fair was een geweldige ervaring en ik heb met zowel leerlingen als docenten van over de hele wereld gepraat over dit onderzoek. Daarnaast was ik, eenmaal terug in Nederland, zo goed als klaar met mijn PWS en hoefde ik me niet druk te maken over of ik het wel af zou krijgen.

Tijdens de science fair kreeg ik veel positieve reacties op mijn onderzoek. Een docent raadde mij aan om mijn onderzoek te versimpelen, aangezien de methode ook voor jongere kinderen te begrijpen is. Door de ingewikkelde delen zoals de analytische meetkunde weg te laten, zouden zij een voorproefje krijgen van wat wiskunde allemaal inhoudt. Dit zou een goed vervolgonderzoek zijn, maar ik ben wel bang dat de methode door versimpeling te veel op een trucje gaat lijken. Om te zorgen dat leerlingen snappen hoe de origami-methode werkt, moeten ze het bewijs snappen.

Een docent uit India was gefascineerd door de visualisatie van derdegraadsvergelijkingen. Hij was zelf natuurkundedocent geworden, omdat hij vond dat complexe wiskunde te abstract werd. Daarom vroeg hij zich af of deze methode ook de mogelijkheid om complexe getallen te visualiseren. Aangezien Lill hier later in zijn carrière nog onderzoek naar heeft gedaan, lijkt het me erg interessant om hier meer over te weten te komen. Ook ben ik benieuwd of complexe oplossingen ook met de origami-methode gevonden kunnen worden. En bestaat er ook een visuele oplosmethode voor complexe vergelijkingen? Deze vragen zijn erg geschikt voor vervolgonderzoek.

Het maken van dit profielwerkstuk heeft geen grote problemen opgeleverd. Het was pittig om door te zetten als ik een bepaald stukje wiskunde na er een tijd mee bezig te zijn geweest nog niet snapte, maar uiteindelijk lukte dit wel. Ook ben ik tevreden met mijn keuze om alleen te werken, aangezien ik zo de mogelijkheid kreeg om een onderwerp te kiezen dat me erg aansprak.

## 8. Bijlagen

### 8.1 Bronnenlijst

Akira Yoshizawa. (2022, 6 mei). Wikipedia. Geraadpleegd op 20 september 2022, van [https://en.wikipedia.org/wiki/Akira\\_Yoshizawa](https://en.wikipedia.org/wiki/Akira_Yoshizawa)

Alberts, S. (2015, 26 juni.). Origami [Bachelorscriptie]. Universiteit Leiden.

Cartwright, M. (2017, 15 september). Paper in Ancient China. World History Encyclopedia. Geraadpleegd op 20 september 2022, van <https://www.worldhistory.org/article/1120/paper-in-ancient-china/>

Constructie met passer en liniaal. (2021, 18 oktober). In Wikipedia. Geraadpleegd op 20 september 2022, van [https://nl.wikipedia.org/wiki/Constructie\\_met\\_passer\\_en\\_liniaal](https://nl.wikipedia.org/wiki/Constructie_met_passer_en_liniaal)

Driedeling van de hoek. (2015, 25 februari) In Wikipedia. Geraadpleegd op 20 september 2022, van [https://nl.wikipedia.org/wiki/Driedeling\\_van\\_de\\_hoek](https://nl.wikipedia.org/wiki/Driedeling_van_de_hoek)

Euclidische meetkunde. (2013, 6 december) In Wikipedia. Geraadpleegd op 11 september 2022, van [https://nl.wikipedia.org/wiki/Euclidische\\_meetkunde](https://nl.wikipedia.org/wiki/Euclidische_meetkunde)

Francesco, R. & Zanardo, A. (2021). Exploring Lill's Method: Beyond Graphical Solution of Polynomial Equation. Math en Jeans. Geraadpleegd op 20 oktober 2022, van [https://www.mathenjeans.fr/sites/default/files/comptes-rendus/Exploring\\_Lill\\_s\\_method\\_0.pdf](https://www.mathenjeans.fr/sites/default/files/comptes-rendus/Exploring_Lill_s_method_0.pdf)

Huzita-Hatori Axioms. (2018, 24 augustus) In Wikipedia. Geraadpleegd op 11 september 2022, van [https://en.wikipedia.org/wiki/Huzita%E2%80%93Hatori\\_axioms#Axiom\\_7](https://en.wikipedia.org/wiki/Huzita%E2%80%93Hatori_axioms#Axiom_7)

Klingens, D. (z.d.). Parabool: meetkunde. Geraadpleegd op 15 oktober 2022, van <https://www.pandd.nl/parab/parab.htm#:~:text=Een%20parabool%20is%20de%20meetkundige,eventueel%20%22Analytische%20meetkunde%22>

"Margherita Piazzolla Beloch" (2019, 13 juli) In Wikipedia. Geraadpleegd op 6 oktober 2022, van [https://en.wikipedia.org/wiki/Margherita\\_Piazzola\\_Beloch](https://en.wikipedia.org/wiki/Margherita_Piazzola_Beloch)

Mitchell, D. (2020). Mathematical Origami. Tarquin Publications.

Reniers, N. (2020). Mathematical Origami [Bachelorscriptie]. Eindhoven University of Technology.

Roger C. Alperin. (2000). A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers. New York Journal of Mathematics. Geraadpleegd op 20 oktober 2022, van <https://nyjm.albany.edu/j/2000/6-8.pdf>

Robert Lang [TED]. (2008, 31 juli). The math and magic of origami | Robert Lang [Video]. YouTube. Geraadpleegd op 22 september 2022, van <https://www.youtube.com/watch?v=NYKcOFQGeno>

Robinson, N. (2014, 3 december). Origami | Definition, History, Styles & Facts. Encyclopedia Britannica. Geraadpleegd op 20 september 2022, van <https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami>

Thomas C. Hull. (2011). Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill. The American Mathematical Monthly, 118(4), 307. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.04.307>

Tiggelaar, E. (1985). Origami feest: 100 nieuwe modellen voor feestelijke gelegenheden (1ste editie). Tirion Uitgevers.

(2021, 17 juli). Traditional Origami Bases. Abrashi Origami School. Geraadpleegd op 20 september 2022, van <https://abrashiorigami.com/traditional-origami-bases/>

Verdubbeling van de kubus. (2021, 19 oktober) In Wikipedia. Geraadpleegd op 20 september 2022, van [https://nl.wikipedia.org/wiki/Verdubbeling\\_van\\_de\\_kubus](https://nl.wikipedia.org/wiki/Verdubbeling_van_de_kubus)

## 8.2 Logboek

Datum	Status	Opdracht	Tijd besteed
24-05 t/m 30-05	Afgemaakt ▾	Oriëntatie: onderwerp kiezen adhv bronnenonderzoek	4 uur
30-05 t/m 01-06	Afgemaakt ▾	Probleemanalyse 1, 2 en 3	4 uur
31-05 t/m 01-06	Afgemaakt ▾	Grove opzet Plan van Aanpak schrijven	1 uur
31-05	Afgemaakt ▾	2 Youtube-filmpjes kijken om methode te begrijpen	0.5 uur
01-06	Afgemaakt ▾	Presentatie voorlopig PvA maken	1.5 uur
01-06 t/m 29-06	Afgemaakt ▾	PvA schrijven	1.5 uur
09-09 t/m 11-09	Afgemaakt ▾	Leren werken met Inkscape voor vouwpatronen	3 uur
10-09 t/m 12-09	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 2.1 schrijven	3 uur
12-09 t/m 26-09	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 2.2 schrijven	6 uur
20-09 t/m 22-09	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 1 schrijven	4 uur
25-09 t/m 03-10	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 3.1 schrijven	4 uur
25-09 t/m 06-10	Afgemaakt ▾	Bronnenonderzoek doen + schrijven hoofdstuk 3.2	6 uur

Totaal deze pagina: 38.5 uur

	Status	Opdracht	Tijd besteed
06-10	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 4.1 schrijven	.5 uur
08-10 t/m 09-10	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 5.1 schrijven	3.5 uur
09-10 t/m 12-10	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 5.2 schrijven	4 uur
15-10	Afgemaakt ▾	Bewijs axioma 5 verbeteren	1.5 uur
15-10 t/m 20-10	Afgemaakt ▾	Bewijs axioma 6 schrijven	5 uur
19-10	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 4.2 schrijven	3.5 uur
19-10	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 1.3 schrijven	1 uur
19-10	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 5.3 schrijven	3 uur
20-10	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 6 schrijven	8 uur
20-10 t/m 24-10	Afgemaakt ▾	Poster voor science fair maken	4 uur
21-10	Afgemaakt ▾	Presentatie voor science fair maken	7 uur
01-11 t/m 06-11	Overig ▾	Science fair in Kyoto: presentatie oefenen, mondelinge presentatie en posterpresentatie.	3 uur
1-12 t/m 8-12	Afgemaakt ▾	Concept PWS verbeteren	7 uur
3-12 t/m 8-12	Afgemaakt ▾	Hoofdstuk 7 schrijven	5 uur
20-12 t/m 18-01	Afgemaakt ▾	PWS verbeteren: van concept naar eindversie	6 uur

Totaal deze pagina: 62 uur

Totaal van beide pagina's: 100.5 uur