

Het runderenprobleem

Waar wiskunde en Grieks samenkomen

Lisan M. ten Hove

Begeleider profielwerkstuk: M.V.K. Boon MA MSc

Profielwerkstuk, Oostvaarders College, Almere.

Omslag: het gezelschap van Odysseus steelt de runderen van Helios, fresco van Pellegrino Tibaldi, 1554/56.

Omslagontwerp: Gerben ten Hove.

Eerste druk: november 2019.

Copyright © 2019, Lisan M. ten Hove, Almere.

Alle rechten behouden.

Het runderenprobleem

Waar wiskunde en Grieks samenkomen

Profielwerkstuk

Voor het behalen van het eindexamen VWO
aan het Oostvaarders College
te Almere

door

Lisan Marianne ten Hove

*"There are things which seem incredible to most
men who have not studied Mathematics."*

~ Archimedes

*"Mathematics reveals its secrets only to those who
approach it with pure love, for its own beauty."*

~ Archimedes

Voorwoord

Dit werkstuk heb ik geschreven als profielwerkstuk, een verplicht onderdeel voor het eindexamen. Het betreft de vakken wiskunde en Grieks. Omdat ik na mijn vervroegd wiskunde B examen tijd over had tijdens de wiskundelessen en ik me verveelde in de zomervakantie is het een uitgebreider werkstuk geworden dan noodzakelijk is. Ik hoop dat u het net zo interessant vindt om te lezen, als ik het vond om te maken.

Ik wil de volgende mensen bedanken voor hun medewerking:

M. Boon, docent wiskunde en klassieke talen en mijn PWS-begeleider, die me hielp om een onderwerp te vinden, dat zowel een wiskundig als een Grieks aspect heeft (zelf had ik de grootste moeite om iets te vinden wat beide vakken besloeg), en aan wie ik vragen kon stellen als ik vastliep;

T. Turk, docent klassieke talen, die mij heeft geholpen met het Griekse deel van dit PWS, vooral met de vertaling van de Griekse tekst. We zijn samen door mijn vertaling gelopen, waarbij hij me verbeteringen en/of aanvullingen adviseerde;

F. Beukers, professor aan de Universiteit van Utrecht, die me hielp met begrijpen van het laatste wiskundige stukje, waardoor ik mijn wiskundig bewijs kon afronden;

R. Snel en meneer Teunissen, docenten wiskunde, aan wie ik vragen over het wiskundedeel kon stellen en meneer Snel, die mijn programmeercode wilde bekijken;

H. Snoerwang, mijn mentor, die aanstekelijk enthousiast was tijdens het proces van het schrijven van mijn profielwerkstuk;

Mijn ouders voor het nalezen van de conceptversie en de ideeën wat betreft de opmaak.

Almere,
23-11-2019

Inhoudsopgave

Inleiding	13
-----------------	----

I. Context van Πρόβλημα

Archimedes.....	19
Alexandrië	19
Uitvindingen van Archimedes	22
Graf van Archimedes	24
De runderen van Helios.....	25
Metrum.....	27
Genre	31
Elegieën.....	31
Epigrammen.....	31
Genre van Πρόβλημα	32

II. Vertaling en interpretatie van Πρόβλημα

Vertaling van Πρόβλημα	37
Tekstinterpretatie.....	49
Inhoud van de tekst.....	49
σοφίη.....	53
Invloed van Homerus in Πρόβλημα	54
Wiskundig probleem.....	58

III. Het wiskundige probleem

Het wiskundige aspect van de tekst	63
De vergelijkingen op een rijtje	63
Het eerste probleem	64
Het uitgebreide probleem	64
Het oplossen van de twee problemen	64
Het eerste probleem: oplossing	67
Vergelijkingen over de stieren	67
Vergelijkingen over de koeien	69
De stieren en de koeien	71
Het uitgebreide probleem: de oplossing	73
Twee extra eisen	73
Kettingbreuken	75
Introductie kettingbreuken	75
Kettingbreukontwikkeling	76
Repeterende kettingbreukontwikkelingen	78
De kettingbreukontbinding van N	81
Convergenten	91
De Pell-vergelijking	97
De Pell-vergelijking oplossen met behulp van convergenten	102
Bewijs: Pell-vergelijking oplossen met behulp van convergenten	104
Terug naar het runderenprobleem	109

IV. Slot

Lekensamenvatting	115
Interessante samenvatting.....	117
Nawoord	123
Bronvermelding (Grieks).....	125
Bronvermelding (wiskunde).....	127
Bijlage 1: Eigen programmacode voor de kleinste oplossing van een Pell- vergelijking	129
Bijlage 2: Transcriptie van de Griekse tekst Προβλημα	133

Inleiding

Dit profielwerkstuk staat in het teken van de Griekse tekst *Πρόβλημα*¹, dat is geschreven door Archimedes. Deze tekst is een brief in de vorm van een gedicht, die Archimedes heeft opgedragen aan Eratosthenes² van Cyrene. Hij daagt hem hierin uit met een moeilijk wiskundig raadsel³ over het aantal runderen van Helios⁴. In het gedicht wordt een aantal vergelijkingen beschreven, waarmee het aantal runderen kan worden berekend en het raadsel dus kan worden opgelost. Opvallend is dat de oplossing⁵ zeer grote aantallen bevat.

In dit profielwerkstuk wordt beschreven hoe een oplossing voor het runderenprobleem uit de tekst *Πρόβλημα* van Archimedes kan worden gevonden. Om dit duidelijk te kunnen weergeven wordt er eerst het een en ander aan context bij de tekst duidelijk gemaakt. Hierna is mijn vertaling van de Griekse tekst naar het Nederlands weergegeven. Deze vertaling is voorzien van voetnoten, waarin bepaalde keuzes voor mijn vertaling zijn toegelicht of waarin de inhoud van de vertaling wordt verduidelijkt. Vervolgens is beschreven hoe ik de tekst heb geïnterpreteerd en welke wiskundige vergelijkingen in de tekst te vinden zijn. Dit stuk is tevens de overgang van het Griekse deel naar het wiskundige deel. Hierna is namelijk een oplossing voor het in de Griekse tekst beschreven probleem uitgewerkt. Ik heb in het wiskunde deel alle gebruikte stellingen bewezen, voordat ik ze gebruikte, opdat ik er zo zeker mogelijk van ben, dat alles klopt.

Omdat ik diep inga op zowel de Griekse als de wiskundige component van de tekst, heb ik twee verschillende samenvattingen gemaakt: een “lekensamenvatting” voor de algemeen geïnteresseerde lezer en een

¹ “*Πρόβλημα*” betekent (wiskundig) probleem.

² Een groot wiskundige. Wordt later meer toegelicht.

³ Dit wiskundige raadsel wordt ook wel het “runderenprobleem” genoemd.

⁴ De Griekse zonnegod. Wordt later meer toegelicht.

⁵ De oplossing staat niet in de brief beschreven, maar wanneer het probleem wordt opgelost blijken hier zeer grote getallen uit te komen.

“interessante samenvatting” die alle besproken theorie nog eens kort aanstipt.

Let op: de Griekse tekst is op meerdere manieren te vertalen en te interpreteren. Ook het probleem zelf is op verschillende wijzen op te lossen. In dit profielwerkstuk geef ik van de Griekse tekst slechts *een* vertaling en *een* interpretatie weer, namelijk die van mijzelf. Deze zouden dus kunnen afwijken van andere bronnen.

DEEL I

Context van Πρόβλημα

Archimedes

Archimedes, de schrijver van het gedicht *Πρόβλημα* (de tekst over het runderenprobleem), was een Griekse geleerde⁶ uit de oudheid. Hij werd geboren en groeide op in Syracuse. Zijn geboortjaar is echter niet precies bekend. Er is namelijk slechts één bron⁷ over zijn geboortjaar bewaard gebleven. Deze bron en het daarin genoemde geboortjaar zijn daarom niet heel betrouwbaar. Wel is zeker dat hij in 212 v.Chr. in Syracuse is gestorven. Hij stierf namelijk bij de verovering⁸ van Syracuse door de Romeinen, die zeker plaatsvond in 212 v.Chr. Volgens de Byzantijnse geleerde Johannes Tzetzes⁹ (van wie de eerder genoemde enige bron over het geboortjaar van Archimedes is) is Archimedes 75 jaar oud geworden en zou hij dus in 287 v.Chr. geboren moeten zijn.

Alexandrië

Archimedes heeft een tijd van zijn leven in Alexandrië doorgebracht. Hier studeerde hij wiskunde en heeft een aantal zaken op zowel wiskundig gebied als natuurkundig gebied uitgevonden. Ook nadat Archimedes terugkeerde naar zijn geboortestad Syracuse, hield hij contact met Alexandrijnse wiskundigen door middel van brieven.

Aan het begin van de 3^e eeuw voor Christus - na de dood van Alexander de Grote - werd generaal Ptolemaeus koning van Egypte. Hij was geïnspireerd

⁶ Archimedes was op verschillende vakgebieden zeer gevorderd. Hij was onder andere een wiskundige, natuurkundige, technicus en dichter.

⁷ Deze bron is van Johannes Tzetzes en wordt straks toegelicht.

⁸ Tijdens de belegering zou Archimedes een wiskundig cirkeldiagram op de grond hebben getekend en hierover aan het denken zijn. Toen vervolgens een soldaat binnenkwam en over de tekening liep, zei hij: "Verstoort mijn cirkels niet!" Hierop stak de soldaat hem dood met zijn zwaard.

⁹ Johannes Tzetzes leefde in Constantinopel in de 1^e helft van de 12^e eeuw. Hij schreef o.a. een historisch werk, dat als de Chiliades bekend staat. De mededeling over de leeftijd van Archimedes is te vinden in Chiliades II, Hist. 35, 105.

door de Hellenistische cultuur en probeerde deze in Alexandrië door te voeren. Zo probeerde hij de beroemdste geleerden van de hellenistische wereld naar Alexandrië te krijgen. Hiervoor richtte hij een academie van kunsten en wetenschappen met een geavanceerd centrum voor wetenschappelijk onderzoek op: het Mouseion¹⁰. Hier heeft ook Archimedes gestudeerd.

De Bibliotheek van Alexandrië

Het bekendste uit het Mouseion is de Koninklijke Bibliotheek van Alexandrië, waar Ptolemaeus veel geld in investeerde, opdat geleerden naar Alexandrië zouden komen en hier alle kennis die ze maar nodig hadden, tot hun beschikking zouden hebben. Op haar hoogtepunt was de Bibliotheek de grootste van het Middellandse Zeegebied en bevatte ze meer dan een half miljoen papyrusrollen¹¹.

Zo'n grote bibliotheek had uiteraard een bestuurder nodig. Dit waren belangrijke kunstenaars of wetenschappers. In de tijd van Archimedes waren dit Apollonius van Rhodos¹² (270-245 v.Chr.) en Eratosthenes¹³ van Cyrene (276-194 v.Chr.). Apollonius staat vooral bekend als de dichter die de *Argonautica*¹⁴ heeft geschreven. Eratosthenes was onder andere een astronoom, dichter en wiskundige. Hij leidde de Bibliotheek van 245 tot 204 v.Chr.

¹⁰ Mouseion (Μουσείον) is de Griekse naam voor “tempel der muzen”. De muzen waren personificaties in de vorm van godinnen van de “negen schone kunsten” (wetenschappen en kunsten).

¹¹ Een papyrusrol bevatte gemiddeld ongeveer twintigduizend woorden.

¹² Er werden nog geen achternamen gebruikt, op deze manier (het noemen van het vaderland) werd duidelijk gemaakt wie er precies bedoeld werd.

¹³ Eratosthenes is ook de man aan wie Archimedes zijn brief met daarin het wiskundige raadsel heeft gestuurd.

¹⁴ Een epos waarin de zoektocht van Jason en de Argonauten naar het Gulden Vlies wordt beschreven.

Eratosthenes van Cyrene

Eratosthenes was een veelzijdig geleerde. Zijn bekendste prestatie is zijn bepaling van de omtrek van de aarde. Hij maakte hierbij gebruik van het feit dat de aarde bolvormig is en van de lengte van schaduwen in twee verschillende plaatsen¹⁵. Hij kwam uit op een omtrek van 250.000 stadiën¹⁶, wat waarschijnlijk neerkomt op ongeveer 39.500 km. De werkelijke omtrek is 40.070 km. Zijn bepaling is opvallend nauwkeurig ¹⁷, zeker als wordt bedacht dat hij geen beschikking had over nauwkeurige meetinstrumenten.

Het is niet gek dat een wiskundige als Eratosthenes het hoofd van zo'n grote, belangrijke bibliotheek was. Door Ptolemaeus was Alexandrië de hoofdstad van het wiskundig onderzoek geworden. Belangrijke wiskundigen zoals Euclides¹⁸, Aristarchus van Samos en Apollonius van Perga zouden er gewerkt hebben.

¹⁵ In Alexandrië is er altijd schaduw, maar in de Egyptische stad Syene staat de zon op 21 juni recht boven de stad en zijn er dus geen schaduwen te zien. Hieruit concludeerde Eratosthenes dat de aarde bolvormig is. Vervolgens mat hij de lengte van een hoge toren in Alexandrië en de lengte van de schaduw hiervan. Hiermee kon hij de hoek tussen de zonnestralen en de toren in Alexandrië berekenen. Dit bleek een vijftigste van een cirkel te zijn. Hij stelde vast dat de omtrek van de aarde dan vijftig keer zo groot was als de afstand tussen Alexandrië en Syene. Deze afstand schatte hij met behulp van reisverslagen op 5.000 stadiën. Hieruit volgde zijn bepaling van de omtrek van de aarde van 250.000 stadiën.

¹⁶ Een lengte tussen de 157 en 209 meter, waarschijnlijk is het ongeveer 157,7 meter.

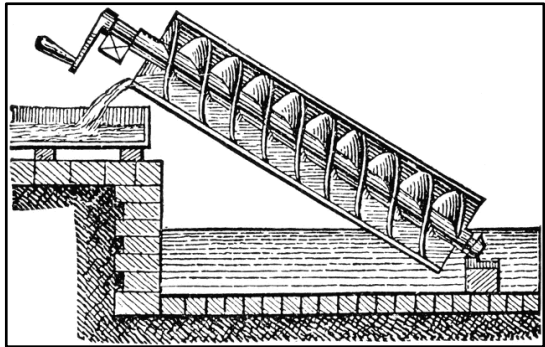
¹⁷ De bepaling van Eratosthenes is twee cijfers significant en op twee significante cijfers is zijn bepaling zelfs helemaal correct.

¹⁸ Euclides had er zijn "Elementen" en andere werken geschreven.

Uitvindingen van Archimedes

Om een indruk te krijgen van de geleerdheid van Archimedes worden hier een aantal van zijn wetenschappelijke prestaties toegelicht.

Archimedes is bekend van zijn “De schroef van Archimedes”, die hij in Alexandrië heeft uitgevonden¹⁹. Met deze schroef kon een vloeistof of poeder door middel van een simpele constructie met relatief weinig kracht (opwaarts) worden verplaatst. In Egypte wordt het principe nog steeds gebruikt om water uit de grond te halen om akkers mee te besproeien.



Figuur 1 De Schroef van Archimedes

Daarnaast heeft Archimedes op puur wiskundig gebied met een bepaling pi benaderd en methodes voor het berekenen van oppervlakten en volumes van meetkundige²⁰ figuren uitgewerkt. Zijn bepaling van pi was in vier decimalen precies:

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$

Voor zijn methodes voor oppervlakte- en volumeberekeningen gebruikte hij een voorloper van de integraalrekening. Deze techniek zou door anderen zijn uitvonden, maar door Archimedes het best zijn toegepast.

Ten slotte zijn twee wetten het nog waard om hier genoemd te worden: “De hefboomwet” en “De wet van Archimedes”. Volgens “De hefboomwet” is het product van de kracht en het moment aan beide kanten van een draaipunt gelijk. “De wet van Archimedes” luidt als volgt:

¹⁹ Of als het al bestond: verder heeft uitgewerkt en verbeterd.

²⁰ Meetkundige figuren zoals bijvoorbeeld een bol of een cilinder.

De opwaartse kracht die een lichaam in een vloeistof of gas ondervindt is even groot als het gewicht van de verplaatste vloeistof of gas.

Hierbij wordt de *opwaartse kracht* ook wel de Archimedeskracht genoemd. Deze kracht wordt veroorzaakt door het drukverschil tussen de bovenkant van het lichaam en de onderkant²¹. Volgens de “wet van Archimedes” is deze kracht gelijk aan *het gewicht van de verplaatste vloeistof of gas*. Hiermee wordt het gewicht van de vloeistof/gas dat op de plek van het lichaam zou zijn, als het lichaam er niet was, bedoeld.

Met deze wet kan het volume van (onregelmatige) voorwerpen gemakkelijk berekend worden: wanneer er bijvoorbeeld een voorwerp wordt ondergedompeld in een bak water, stijgt het wateroppervlak. Hiermee is het toegevoegde volume van het voorwerp te berekenen.

Het verhaal gaat dat Archimedes deze wet heeft bedacht naar aanleiding van een opdracht van koning Hiëro van Syracuse. De koning had namelijk een gouden kroon laten maken, maar twijfelde of de kroon wel van puur goud was gemaakt en of er geen zilver was gebruikt. Hij droeg Archimedes op om te bepalen of de kroon volledig van goud was zonder dat hij de kroon mocht smelten. Archimedes besloot na een tijd van diep nadenken een ontspannend bad te nemen. Toen hij het bad instapte en het wateroppervlak zag stijgen, zou hij op het idee van “De wet van Archimedes” zijn gekomen. Hij bedacht dat hij met een bak water het volume van de kroon zou kunnen berekenen en vervolgens het gewicht van de kroon zou kunnen vergelijken met een blok goud met hetzelfde volume als de kroon. Als de kroon lichter zou zijn dan het blok goud, zou hij aangetoond hebben dat de kroon andere (lichere) stoffen dan goud bevatte (zoals bijvoorbeeld zilver). Hierop zou hij zo blij zijn geweest met zijn oplossing, dat hij het bad uit was gesprongen en

²¹ Dit verschil bestaat omdat de kracht door druk op een oppervlak afhangt van de diepte van het oppervlak. De bovenkant van het lichaam ligt minder diep in de vloeistof/gas dan de onderkant, dus er is sprake van een verschil in krachten op de boven- en onderkant. Dit verschil is gelijk aan de opwaartse kracht of Archimedeskracht.

zonder zich aan te kleden naar de koning was gerend terwijl hij riep: “Εύρηκα, εύρηκα” – Ik heb het gevonden, ik heb het gevonden!

Graf van Archimedes

Nadat Archimedes bij de verovering van Syracuse gedood werd door een soldaat (zie voetnoot 8 op bladzijde 19) werd hij begraven. Cicero zou zijn graf later gevonden en bezocht hebben. In zijn beschrijving van dit bezoek beschreef hij dat er een bol, ingeschreven in een cilinder, in reliëf op de graftombe van Archimedes stond.

Archimedes had namelijk aangetoond dat er een bijzondere verhouding tussen de bol en de cilinder bestaat: de inhoud van de bol is gelijk aan $\frac{4}{3}\pi r^3$ en de inhoud van de cilinder aan $2\pi r^3$, het oppervlakte van de bol is gelijk aan $4\pi r^2$ en het oppervlakte van een cilinder aan $6\pi r^2$. Zowel de inhoud als het oppervlakte van de bol is dus gelijk aan twee derde van die van de cilinder! Archimedes beschouwde het bewijs hiervan als zijn grootste wiskundige prestatie.

De runderen van Helios

In het gedicht *Πρόβλημα* worden Ἡελίοιο βόες (de runderen van Helios) vaak genoemd. Helios is een Griekse god, de god van de zon, en hij heeft een grote kudde runderen. Deze runderen komen ook voor in de Odyssee, een heldenverhaal over Odysseus' thuisreis van Troje naar zijn vaderland Ithaka, dat geschreven is door Homerus²². Op een gegeven moment strandden Odysseus en zijn makkers op het eiland Thrinakia, waar de runderen van Helios grazen.

In onderstaande passage uit de Odyssee vertelt Circe²³ Odysseus over de runderen van Helios, dezelfde runderen als in het probleem van Archimedes:

Θρινακίαν δ' ἐς νῆσον ἀφίξεαι· ἔνθα δὲ πολλὰ
Βόσκοντ' Ἡελίοιο βόες καὶ ἴφια μῆλα,
ἐπταῖ βοῶν ἀγέλαι, τόσα δ' οἰῶν πῶεα καλά,
πεντήκοντα δ' ἕκαστα.
(*Odyssee* 12.127-30)

Jij zult aankomen bij het Thrinakiaïsche eiland, waar vele runderen van Helios en forse schapen zich voeden,
in zeven kuddes van runderen, even veel <kuddes> als de mooie
kuddes van schapen,
die allen uit vijftig <bestaan>.

Met de informatie die Circe over het aantal runderen geeft, is er slechts een simpel rekensommetje nodig om het aantal runderen te berekenen:

²² Homerus is een bekende dichter uit de oudheid. Zijn bekendste werken zijn de Ilias en de Odyssee. Hij werd en wordt gezien als een van de beste dichters allertijden.

²³ Odysseus was gestrand op het eiland van Circe, hier heeft hij een jaar gewoond. Uiteindelijk liet Circe hem gaan en heeft ze hem voorbereid op de rest van zijn reis.

7 kuddes met 50 runderen geeft $7 \cdot 50 = 350$ runderen.

Archimedes geeft zelf een veel uitdagendere beschrijving van het aantal runderen in zijn brief naar Eratosthenes.

Odysseus wordt gewaarschuwd door Circe: blijf van de runderen van Helios af, anders zul je nooit levend je thuisland bereiken. De makkers van Odysseus worden ingelicht en beloven van de runderen af te blijven, hoewel ze veel honger hebben en weinig voedsel kunnen vinden. Wanneer door slecht weer blijkt dat zij nog langer op het eiland moeten blijven, wint echter het hongergevoel en slachten zij een aantal runderen. Hierna worden Odysseus en zijn makkers gestraft: ze komen in een hevige storm terecht. Hierin sterven alle (overgebleven) makkers en scheelde het voor Odysseus niet veel of hij had het ook niet overleefd.

Metrum

De oude Grieken deden niet aan rijm²⁴. Wel werd poëzie vaak geschreven in een bepaald metrum. Teksten werden in de oudheid namelijk vaak voorgedragen voor publiek of voor zichzelf voorgelezen en het metrum gaf hierbij aan welke lettergrepen beklemtoond of lang moesten worden uitgesproken en welke niet. Het gedicht *Πρόβλημα* van Archimedes is in een elegisch distichon²⁵, een combinatie van de dactylische hexameter en de dactylische pentameter, geschreven. Hierbij wisselen de hexameter en de pentameter elkaar om de regel af.

Bij een dactylische (*dactylus* betekent voet) hexameter (*hexa* betekent zes) is de versregel op te delen in zes voeten en bij een dactylische pentameter (*penta* betekent vijf) in vijf ²⁶ voeten. Een voet bestaat uit een lange klank en twee korte klanken (- ~) of (als de twee korte klanken vervangen worden door één lange) uit twee lange klanken (- -). Binnen een lettergreep bepaalt de klinker of de lettergreep een lange of een korte klank heeft. De korte klinkers (α, ι, υ, ε) zorgen meestal voor een korte klank en de lange klinkers (η, ω) en tweeklanken (αι, αυ, ει, ευ, οι, ου, ᾱ, ῆ, ῶ) geven de lettergreep een lange klank. Hierop zijn er vele uitzonderingen (zie voor twee voorbeelden de voetnoten in de gescandeerde tekst op bladzijde 29), waarbij de lange klank

²⁴ Dit zou niet veel toevoegen, aangezien bijna alle woorden in een naamval met een bijhorende uitgang geschreven staan. Deze uitgangen kunnen niet op elkaar rijmen, want ze zijn òf anders òf hetzelfde.

²⁵ “Di” komt van δυο (twee) en “stichon” van στιχος (dichtregel). Het gedicht bestaat uit “duo’s van versregels”. In een elegische distichon is de eerste regel van het duo steeds een hexameter en de tweede een pentameter.

²⁶ Eigenlijk uit 2x 2 ½ voeten. De halve voet bestaat uit slechts één lange klank (een hele voet duurt twee keer zo lang). De regel wordt dus eigenlijk ook in zes stukken verdeeld (zie het voorbeeld op bladzijde 29), maar door de halve voeten is het ritme van een pentameter heel anders dan die van een hexameter.

bij een lettergreep bestaande uit een korte²⁷ klinker gevolgd door twee medeklinkers het vaakst voorkomt.

Op de volgende bladzijde staan de eerste vier regels van *Πρόβλημα* gescandeerd²⁸. Alle regels van het gedicht vallen op deze manier te verdelen in voeten, waarbij de regels in de hexameter en de regels in de pentameter elkaar om de regel afwisselen.

²⁷ Een korte klinker zorgt in eerste instantie voor een korte klank. De uitzondering is dus dat wanneer deze korte klinker gevolgd wordt door twee medeklinkers, de klank van de lettergreep binnen het metrum toch lang wordt.

²⁸ Scanderen is het aangeven van de versvoeten. Hierbij wordt “ – ” boven een lange klank gezet, “ ~ ” boven een korte klank en een “ / ” tussen twee voeten.

- ⁻²⁹/ - √ √/- √ √/- - / - √ √³⁰/ - ⁻³¹
 Πληθὺν Ἡελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
⁻³² √ √/- - / ⁻³³ / - √ √/- √ √/-
 φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
⁻³⁴ ³⁵ √ / - √ √/- √ √/- √ √/- √ √/- -
 πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
⁻³⁶ √ √/- √ √/- / ⁻³⁷ √ √/- √ √/-
 Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένα

²⁹ Deze lettergreep (θὺν) is lang door positie. De vorige en de volgende lettergreep zijn namelijk lang door de η, een lange klinker. De voet (- √ -) is niet mogelijk binnen het elegisch distochon, dus moet de lettergreep θὺν ook lang zijn.

³⁰ Deze lettergreep (μέ) bevat een korte klinker (έ) die gevolgd wordt door twee medeklinkers (τq). In eerste instantie zou dit dus een lange klank moeten zijn. Er is hier echter sprake van “muta (een χ, κ, γ, φ, π β, θ, τ of δ) cum (= voor) liquida (een μ, λ, ν of ρ)”. Hierbij krijgt de lettergreep, hoewel de klinker wordt gevolgd door twee medeklinkers, toch een korte klank.

³¹ Deze lettergreep (σον) is lang, omdat het de laatste lettergreep van de regel is. Onlangs is afgesproken dat de laatste lettergreep altijd lang is, aangezien er een pauze wordt gehouden aan het eind van de regel.

³² Deze lettergreep (φρον) is lang omdat de (korte) klinker wordt gevolgd door twee medeklinkers: φροντίδ'. Hetzelfde geldt voor de lettergreep πι uit ἐπιστήσας (r. 2), voor πό uit πόσση (r. 3), voor ἐν (want ἐν πεδίοις) (r. 3), voor βόσ uit ἐβόσκετο (r. 3), voor δα uit δασσαμένα (r. 4).

³³ Deze lettergreep (σας) is lang, omdat de α in deze uitgang (ptc. aor. m. ev. nom. A.) een lange klank is.

³⁴ Hier was een lange lettergreep nodig, anders zouden er geen zes voeten in de regel passen. Daarom heeft Archimedes een extra σ toegevoegd. (De korte klinker ó krijgt toch een lange klank, omdat hij wordt gevolgd door twee medeklinkers.) Dit is een homerisch verschijnsel; πόσση is een homerische vorm (zie bladzijde 57).

³⁵ Deze lettergreep (σση) bevat een lange klinker, toch heeft deze lettergreep een korte klank. Er is sprake van “epische correctie”: omdat de lange klinker wordt gevolgd door een korte klinker (ἄ uit het volgende woord), kan de lettergreep toch een korte klank krijgen.

³⁶ De eerste lettergreep van een voet is altijd lang. Daarom is de eerste lettergreep van de regel (in dit geval Θqi) lang. Hier begint namelijk altijd een nieuwe voet.

³⁷ Deze lettergreep (στί) is lang, omdat de ί in dit geval een lange klank is.

Genre

Πρόβλημα behoort tot de oud-Griekse poëzie. Binnen deze poëzie wordt er onderscheid gemaakt tussen verschillende genres. Voor het vaststellen van het genre van *Πρόβλημα* kan er gebruik worden gemaakt van het metrum, waarin het gedicht is geschreven. Er zijn twee verschillende genres die aansluiten bij een elegisch distichon: zowel elegieën als epigrammen werden in dit metrum geschreven.

Elegieën

Elegieën zijn treurdichten en worden, zoals de naam van het metrum al doet vermoeden, altijd in een elegisch distichon geschreven. Hoewel het gedicht *Πρόβλημα* een wiskundig probleem moet overdragen aan de lezer, heeft het ook een treurig thema en zou het dus een elegie kunnen zijn.

In de eerste zin wordt dit treurige thema duidelijk: de toon wordt meteen gezet door de woorden Ἡελίοιο βοῶν en ξεῖνε. Deze woorden verwijzen namelijk naar de Odyssee. Deze epos lijkt uiteindelijk enigszins goed af te lopen (Odysseus bereikt uiteindelijk zijn vaderland), maar Odysseus heeft zijn makkers niet kunnen redden, was zelf bijna dood en moest eenmaal thuisgekomen eerst de vrijers van zijn vrouw verslaan, wat allemaal enigszins te betreuren valt.

ξεῖνε (vreemdeling) verwijst naar Odysseus, die overal waar hij kwam, voordat hij bij Ithaka aankwam, een vreemdeling was. Ἡελίοιο βοῶν (de runderen van Helios) verwijzen naar een specifiek (treurig) stuk uit de Odyssee, waarin de makkers van Odysseus een paar van de runderen van Helios geslacht en opgegeten hebben. Hierdoor belanden Odysseus en zijn makkers in een storm waarin alle makkers sterven en Odysseus bijna dood gaat.

Epigrammen

Aan de andere kant werd ook een epigram vaak in een elegisch distichon geschreven. Een epigram is een kort gedicht met een korte boodschap. Dit genre zou goed aansluiten op de inhoud van het gedicht, aangezien wiskundige gedichten vaak als een epigram werden geschreven.

Genre van Πρόβλημα

Het is niet vastgesteld in welk genre het gedicht *Πρόβλημα* thuishoort. Ik zou het zelf een elegie noemen, omdat het wiskundige probleem niet het enige is wat er door middel van dit gedicht wordt overgebracht. Zoals later in dit PWS duidelijk(er) wordt, heeft Archimedes zijn kennis van Homerus gebruikt om het gedicht meerdere lagen te geven. Daarom is dit gedicht ook op literair gebied een goed stuk. Aangezien een elegie een hogere literaire waarde heeft dan een epigram, denk ik dat *Πρόβλημα* een elegie is.

DEEL II

Vertaling en
interpretatie van

Πρόβλημα

Vertaling van Πρόβλημα

In dit hoofdstuk wordt een vertaling weergegeven van Πρόβλημα. Hiervoor is gebruik gemaakt van de volgende woordenboeken/hulpmiddelen:

- Hupperts, C. (2011), *Grieks-Nederlands woordenboek*, 3^e druk, Leeuwarden: Eisma Edumedia B.V.
- Muller, F. (2001), *Wolters' Handwoordenboek Grieks-Nederlands*, 3^e druk, Utrecht: Vbk Media.
- L.S.J. : Liddell, H. G., Scott, R., Jones, H. S., (1996) *A Greek-English Lexicon*, 9^e druk, Oxford: Clarendon Press.
- Perseus.tufts.edu: Greek Word Study Tool
<http://www.perseus.tufts.edu/hopper/morph>

Er is in de vertaling gebruik gemaakt van de volgende notatie: "<...>". De woord(en) tussen de haken zijn aangevulde woord(en), die niet in het Griekse betreffende zinsdeel staan. Deze woorden zijn echter wel nodig of zijn verduidelijkend voor de Nederlandse vertaling. De aangevulde woorden zijn meestal overgenomen uit zinsdelen uit de context.

Op de linker pagina staat steeds de Griekse tekst afgebeeld en op de rechter pagina is de vertaling voorzien van voetnoten weergegeven.

Πρόβλημα,

ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὐρών τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα
πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον
ἐπιστολῇ.

1. Πληθὺν Ἡελίοιο βοῶν, ὧ ξεῖνε, μέτρησον
2. φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
3. πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελίης ποτ' ἐβόσκετο νήσου
4. Θρινακίης τετραχῇ στίφει δασσαμένη
5. χροίην ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
6. κυανέω δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
7. ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. ἐν δὲ ἐκάστῳ

Het probleem³⁸

in de epigrammen, dat Archimedes bedacht heeft, heeft hij naar degenen in Alexandrië, die zich bezighouden met het onderzoeken van zulke dingen ³⁹, gestuurd in de brief naar Eratosthenes uit Cyrene.

Meet ⁴⁰, vreemdeling, het aantal van de runderen van Helios

nadat u aan het hoofd van uw verstand⁴¹ bent gaan staan, als⁴² u kennis heeft,

<Meet ⁴³> welk aantal ooit graasde op de vlaktes van het Siciliaanse eiland

Thrinacia, nadat het verdeeld is in vier⁴⁴ groepen, die verschillen⁴⁵

wat betreft de kleur: de eerste <groep> heeft <de kleur> van witte melk,

een andere <groep> valt zelf⁴⁶ op door hun donkere kleur,

<weer>⁴⁷ een andere <groep> is blond, <en de laatste>⁴⁸ is gevlekt. In iedere

³⁸ Titel en tevens onderdeel van de eerste zin van de inleiding.

³⁹ Eigenlijk: zich bezighouden met zulke dingen te onderzoeken.

⁴⁰ (μέτρησον) Bedoeld wordt: bereken/bedenk.

⁴¹ φροντίδ': de geëlideerde klinker zou een ι kunnen zijn, dan heeft dit woord de naamval dativus en kan het als object bij ἐπιστήσας (wat gaat met een dativus) worden vertaald.

⁴² Lichtelijk ironische toevoeging: als u geen kennis heeft, kunt u ook niet aan het hoofd van uw kennis/verstand staan (en deze kennis gebruiken voor het oplossen van het probleem).

⁴³ Deze zin zou grammaticaal gezien ook een object kunnen zijn bij μετέχεις σοφίας (kennis hebben van), maar gezien de context leek het mij logischer om de imperativus μέτρησον (meet) uit de eerste regel aan te vullen. Het gaat namelijk niet om het hebben van (voor)kennis over het aantal runderen, maar om het hebben van genoeg kennis om zelf het aantal te berekenen.

⁴⁴ Grammaticaal gezien horen τετραχῇ στίφειν niet bij elkaar, aangezien ze niet congrueren (ze staan respectievelijk in de dativus en in de accusativus). Een letterlijke vertaling kan zijn: "verdeeld in vieren wat betreft groepen". De accusativusvorm is hier vertaald als een accusativus van betrekking. Dit komt wat betreft betekenis op hetzelfde neer, maar is niet gebruikelijk Nederlands.

⁴⁵ ἀλλάσσοντα betekent eigenlijk "veranderen". Gezien de context is "verschillen" toepasselijker.

⁴⁶ λαμπόμενον is een mediumvorm, dus het kan reflexief vertaald worden.

⁴⁷ De verschillende woorden die in het Griekse worden gebruikt voor de opsomming (ἕτερον en ἄλλο) hebben in het Nederlands dezelfde betekenis. Daarom heb ik hier het woord "weer" toegevoegd om zo toch de woordvariatie te kunnen nabootsen. Daarnaast geeft "weer" de nadruk weer, die γε aan ἄλλο (andere) meegeeft.

⁴⁸ Dit is een vertaling van ἄλλο μὲν ... τὸ δὲ, omdat dit goed past binnen de opsomming.

8. στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
9. συμμετρῆς τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
10. κυανέων τάυρων ἡμίσει ἡδὲ τρίτῳ
11. καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὧ̃ ξεῖνε, νόησον,
12. αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
13. μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
14. τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
15. ἀργεννῶν τάυρων ἑκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε

groep waren er stieren, die zelf het overwicht⁴⁹ hebben in hoeveelheid,
 <en> die de volgende⁵⁰ maat troffen⁵¹: de witharige <stieren>⁵²
 zijn⁵³ gelijk ⁵⁴ aan een helft en een derde van de donkere stieren
 en alle blonde <stieren>, vreemdeling, begrijp <dit>,
 bovendien zijn de donkere <stieren> <gelijk> aan een vierde deel en een vijfde
 van de gevlekte⁵⁵ <stieren>, en nog <eens>⁵⁶ alle blonde <stieren>.
 Beschouw de overgebleven⁵⁷ gevlekte stieren goed
 die zelf⁵⁸ aan een zesde deel en een zevende van de witte stieren

⁴⁹ βριθόμενοι kan ook een betekenis aannemen die te maken heeft met gewicht, dit vond ik niet passend in deze context.

⁵⁰ τοιῆσδε wijst hier vooruit. Ook is het opvallend dat er een η is gebruikt i.p.v. een α. Dit komt doordat dit gedicht in een Ionisch dialect is geschreven, hierin is een α (van het woord in het Attisch) vaak vervangen door een η.

⁵¹ τετευχότες heb ik van τυγχανω laten komen (en niet van τευχω) omdat τυγχανω een direct object in de genitivus heeft en de genitivusvormen συμμετρίας τοιῆσδε anders niet verklaard zouden kunnen worden.

⁵² Voor het wiskundige probleem is het belangrijk dat hier het goede woord wordt aangevuld. Het gaat hier enkel om stieren en niet om alle runderen (wat slaat op stieren en koeien).

⁵³ In deze zin staat geen persoonsvorm. Waarschijnlijk moet de infinitivus van εἶμι worden aangevuld. Dit zou de samen met ἀργότριχας een A.c.I. constructie vormen, wat ook meteen de naamvallen van ἀργότριχας en ἴσους verklaard. (Het zijn accusativi, ἀργότριχας als deel van de A.c.I. constructie en ἴσους als naamwoordelijk deel bij ἀργότριχας met dus dezelfde naamval als ἀργότριχας.)

⁵⁴ Gelijk wat betreft hoeveelheid.

⁵⁵ μικτοχρόων bestaat uit twee woorden: μικτο, komt van μίγνυμι en betekent mengen, en χρόων, komt van χρώς en betekent (in dit geval) kleur. Samen geeft dit iets in de trant van "kleurgemengden" wat vertaald kan worden met "gevlekte".

⁵⁶ ἔτι (nog) slaat op het dubbele gebruik van de blonde stieren in de twee maten/verhoudingen. Om dit te verduidelijken heb ik "eens" toegevoegd.

⁵⁷ ὑπολειπομένους (overgebleven) hoort inhoudelijk niet bij de gevlekte stieren. Het geeft aan dat dit de laatste, overgebleven maat/verhouding wat betreft de stieren is.

⁵⁸ ἰσαζομένους uit de volgende regel is reflexief vertaald.

16. καὶ ξανθοῖς αὐτίς πᾶσιν ἰσαζομένους.
17. θηλείαισι δὲ βουσί τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
18. ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
19. τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἴσαι·
20. αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
21. μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
22. σὺν ταύροις· πάσης δ' εἰς νομὸν ἐρχομένης
23. ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἡδὲ καὶ ἕκτῳ

en weer⁵⁹ alle blonde <stieren> gelijk⁶⁰ zijn.

Bij de vrouwelijke runderen was het als volgt⁶¹: de witharige

< koeien ⁶²> waren aan een derde deel en een vierde

van iedere⁶³ donkere kudde precies gelijk.⁶⁴

Bovendien zijn de donkere <koeien> weer gelijk

aan een vierde tezamen met een vijfde deel van de gevlekte <koeien>

samen⁶⁵ met de stieren. Van⁶⁶ de gehele kudde, die komt in de weide,

van de blondharigen is een vijfde deel en ook een zesde

⁵⁹ Dit is de derde keer dat ξανθοῖς πᾶσιν (alle witte stieren) genoemd worden. Archimedes heeft zorgt voor kleine variaties tussen deze zinsdelen door bij de tweede keer het woord ἔτι (nog <eens>) toe te voegen en bij de derde keer αὐτίς (weer) toe te voegen.

⁶⁰ Gelijk wat betreft hoeveelheid.

⁶¹ τὰδ' wijst hier vooruit.

⁶² Ik heb θηλείαισι βουσι (vrouwelijke runderen) uit de vorige zin aangevuld. Hierbij is "vrouwelijke runderen" weergegeven met "koeien".

⁶³ συμπάσης (iedere) geeft aan dat het hier om zowel de donkere koeien als de donkere stieren gaat.

⁶⁴ Ik probeer de woordvolgorde van het Grieks zoveel mogelijk te behouden in mijn vertaling, hier lukte dat echter niet: συμπάσης κυανέης ἀγέλης (elke donkere <rund> van de kudde) en τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ (een derde deel en een vierde) zijn in mijn vertaling van regel gewisseld.

⁶⁵ σὺν ταύροις (samen met de stieren) geeft hier aan dat het zowel om de gevlekte koeien als de gevlekte stieren gaat. (Dus om de gevlekte runderen.)

⁶⁶ Bij deze zin heb ik ervoor gekozen om de woordvolgorde uit het Grieks aan te houden, waardoor deze vertaalde zin redekundig niet correct is. ποικίλαι (geflekte <koeien>) staat in de nominativus en zou dus het subject van de zin moeten zijn. Op de volgende manier klopt de zin grammaticaal wel (maar is de woordvolgorde uit het Grieks niet behouden): De gevlekte <koeien> zijn gelijk wat betreft aantal aan een vijfde deel en ook een zesde van de gehele kudde van de blondharigen, die komt in de weide.

24. ποικίλαι ισάριθμον πληθος ἔχον τετραχῇ.
25. ξανθαὶ δ' ἡριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἴσαι
26. ἀργεννῆς ἀγέλη ἐβδομάτῳ τε μέρει.
27. ξεῖνε, σὺ δ' Ἡελίοιο βοῶν πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,

28. χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
29. χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χρῶμα ἕκασται,
30. οὐκ αἰδρὶς κε λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαῆς,
31. οὐ μὴν πῶ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. ἀλλ' ἴθι φράζεο
32. καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἡελίοιο πάθη.
33. ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν

gelijk wat betreft aantal aan de gevlekte <koeien>.⁶⁷ Ten vierde⁶⁸
zijn de blonde <koeien> opgeteld⁶⁹ gelijk aan de helft van een derde deel⁷⁰
en een zevende deel van de witte kudde⁷¹.

Vreemdeling, nadat u over de runderen van Helios hebt verteld hoeveel <er>
precies <zijn>,

<en u> het aantal van de stieren apart <hebt verteld>,
<en> weer apart hoe groot alle vrouwelijke <kuddes> per kleur zijn,
zou u niet onnozel worden genoemd⁷², en ook niet onwetend met aantallen,
u wordt < echter⁷³ > zeker nog niet geteld tot de wijzen. Maar vooruit, denk ook
over al de volgende⁷⁴ eigenschappen van de runderen van Helios.

Wanneer⁷⁵ de witharige stieren hun aantal samenvoegen⁷⁶ met

⁶⁷ In de versie uit Bibliotheek zu Wolfenbüttel (zie Bijlage 2) staat er (in tegenstelling tot de versie die links gedrukt staat) een punt tussen ἔχον en τετραχῆ. Dit leesteken heb ik in mijn vertaling overgenomen omdat dit beter past gezien de context.

⁶⁸ Dit is de vierde vergelijking over de koeien (en de zevende vergelijking in het algemeen).

⁶⁹ ἦοιθεῦντο ἴσαι heb ik samengevoegd tot “opgeteld gelijk zijn aan”. In het Nederlands is het namelijk niet gebruikelijk bij de persoonsvorm tellen een infinitivus te hebben. Op deze manier klopt het wel.

⁷⁰ μέρους τρίτου ἡμίσει (helft van een derde deel): hiermee wordt een zesde deel bedoeld. Eerder gebruiken Archimedes het woord ἑκτῷ (zesde) hiervoor. Waarschijnlijk heeft hij hier gekozen voor deze verwoording omdat dit beter uitkwam met het metrum.

⁷¹ ἀγέλη (kudde) is hier een nominativusvorm, wat een ingewikkelde vertaling zou opleveren. Waarschijnlijk is hier een ς weggevalen en hoort er ἀγέλης, een genitivusvorm die congrueert met ἀργεννῆς (witte), te staan. In de versie uit Bibliotheek zu Wolfenbüttel (zie bijlage) staat deze ς er namelijk wel. Op deze manier heb ik het vertaald.

⁷² λέγοι: de geëlideerde klinker zou een o kunnen zijn. Dan is dit een optativus medium 2^e persoon enkelvoud.

⁷³ Dit woord staat er niet in het Grieks, maar leek me wel een gepaste toevoeging voor mijn vertaling omdat er sprake is van een de grote tegenstelling tussen de zinnen.

⁷⁴ τὰδε wijst hier vooruit.

⁷⁵ ἐπει is met de optativusvorm (hier: μιξάιτο (mengen)) als “wanneer” vertaald (zoals gebruikelijk is).

⁷⁶ μιξάιτο lijkt een 3^e persoon enkelvoud te zijn, wat opmerkelijk is aangezien het subject ταῦτοι een meervoudsvorm is. Het is echter wel een meervoudsvorm: er zijn enkele letters samengetrokken, waardoor de v is verdwenen, maar de uitgang is -vto.

34. κυανέοις, ἴσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
35. εἰς βάθος εἰς εὐρύς τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
36. πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
37. ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
38. ἴσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνός ἀρχόμενοι
39. σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
40. ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.
41. ταῦτα συνεξευρών καὶ ἐνὶ πραπίδεσιν ἀθροίσας
42. καὶ πληθέων ἀποδοὺς, ὦ ξέने, πάντα μέτρα
43. ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος, ἴσθι τε πάντως
44. κεκριμένος ταύτη ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

de donkere <stieren>⁷⁷, staan zij standvastig, van gelijke grootte ten aanzien van hoogte en breedte, en opnieuw⁷⁸ worden de zeer lange vlaktes van Thrinaca door alle⁷⁹ <stieren> gevuld met een vierkant⁸⁰. De blonde en de gevlekte <stieren>, nadat ze zich bij elkaar⁸¹ verzameld hebben, staan op hun beurt opborrelend⁸², terwijl ze beginnen met één⁸³ en een drierandige⁸⁴ verschijning tot stand brengen, terwijl er noch <meer>⁸⁵ gevlekte stieren aanwezig zijn⁸⁶ noch <stieren> ontbreken. Wanneer u deze dingen ontdekt en in uw verstand verzamelt en nadat u alle maten van de aantallen hebt bekend gemaakt, vreemdeling, ga <dan> voort, terwijl u trots bent, als een overwinnaar, weet dat u ongetwijfeld in zulke wijsheid als bloeiend⁸⁷ beoordeeld wordt.

⁷⁷ Op deze bladzijde wordt vier keer het woord “stieren” aangevuld. Dit komt allemaal door het woord ταῦροι (stieren) uit regel 33.

⁷⁸ αὖ (opnieuw): inhoudelijk komt deze zin op hetzelfde neer. (Hoogte en breedte zijn gelijk = ze staan in een vierkant).

⁷⁹ πάντη (alle) slaat op alle genoemde stieren in deze zin (alleen de witte en donkere stieren) en niet op alle stieren die Helios bezit.

⁸⁰ πλίνθου betekent eigenlijk “baksteen”. De bakstenen die de oude Grieken gebruiken waren vierkant (tegenwoordig zijn ze vaak rechthoekig). Het gaat in deze tekst zeer waarschijnlijk om de vorm van een baksteen (een vierkant) en niet om een letterlijke baksteen.

⁸¹ εἰς ἓν (bij elkaar): letterlijk: bij één.

⁸² ἀμβολάδην (opborrelend): bedoeld wordt dat de rijen met runderen een driehoek vormen: de eerste rij is het kortst (1 rund) en de volgende rijen “borrelen op” oftewel worden steeds breder.

⁸³ ἐξ ἑνός (met één): bedoeld wordt het topje van de driehoek.

⁸⁴ τριράσπεδον (drierandig): bedoeld wordt een driehoek.

⁸⁵ Zonder deze toevoeging klopt het inhoudelijk niet. Eerder is namelijk gezegd dat het hier juist draait om de gevlekte en blonde stieren.

⁸⁶ Dit is een genitivus absolutus constructie.

⁸⁷ ὀμπνιος (bloeiend): letterlijk: goed gevoed.

Tekstinterpretatie

Inhoud van de tekst

Archimedes geeft veel informatie over het probleem in zijn uit vierenveertig verzen bestaande gedicht. Deze informatie is erg poëtisch geformuleerd en het is daarom handig om de tekst nog eens door te nemen, waarbij er meer naar de inhoud wordt gekeken.

Inleiding

Het gedicht wordt in “Zur Geschichte und Literatur”⁸⁸ ingeleid met een korte inleiding. Omdat deze inleiding niet door Archimedes zelf is geschreven en het dus niet helemaal bij het gedicht⁸⁹ hoort, begint de regelnummering pas bij het volgende deel. Uit de inleiding blijkt dat Archimedes het gedicht heeft geschreven aan Eratosthenes, het hoofd van de Bibliotheek van Alexandrië (het Mouseion). Eratosthenes krijgt de taak om het probleem op te lossen.

Intro: regels 1 t/m 8

In de eerste acht regels van het gedicht zelf wordt het probleem geïntroduceerd: hoeveel runderen heeft Helios? Hierbij wordt vermeld dat het nodig is om je verstand erbij te houden, dus dat het een ingewikkeld probleem is. Ook worden de vier verschillende vachttypen van de runderen bekend gemaakt: er zijn witte, donkere, blonde en gevlekte runderen. Tenslotte⁹⁰ wordt alvast meegegeven dat er van elk vachttype meer stieren zijn dan koeien.

⁸⁸ Dit is de transcriptie van Gotthold Ephraim Lessing. Hij heeft het gedicht van Archimedes teruggevonden en (ook) hij heeft het vertaald.

⁸⁹ Dit is makkelijk te zien aan de vorm van de tekst: de inleiding bestaat niet uit verzen. Daarnaast is er over de regels van de inleiding geen metrum te leggen.

⁹⁰ ἐν δὲ ἐκάστῳ στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθουςι βριθόμενοι: In iedere groep waren er stieren, die zelf het overwicht hebben in hoeveelheid.

Vergelijkingen over de stieren: regels 9 t/m 16

In regels negen tot en met zestien worden de eerste drie vergelijkingen gegeven. Deze gaan over het aantal stieren per vachttype: ⁹¹

- Witte stieren = $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ donkere stieren + blonde stieren (r. 10-11)
- Donkere stieren = $(\frac{1}{4} + \frac{1}{5})$ gevlekte stieren + blonde stieren (r. 12-13)
- Gevlekte stieren = $(\frac{1}{6} + \frac{1}{7})$ witte stieren + blonde stieren (r. 14-16)

Vergelijkingen over de koeien: regels 17 t/m 26

In regels zeventien tot en met zesentwintig worden de vergelijkingen met betrekking tot de koeien gegeven: ⁹²

- Witte koeien = $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})$ donkere runderen (r. 17-19)
- Donkere koeien = $(\frac{1}{4} + \frac{1}{5})$ gevlekte runderen (r. 20-21)
- Gevlekte koeien = $(\frac{1}{5} + \frac{1}{6})$ blonde runderen (r. 22-24)
- Blonde koeien = $(\frac{1}{6} + \frac{1}{7})$ witte runderen (r. 25-26)

Slim, slimmer, slimst: regels 27 t/m 32

Vervolgens wordt in regels zevenentwintig tot en met tweeëndertig duidelijk gemaakt dat je niet onnozel of onwetend met getallen bent als je het probleem met de zeven genoemde vergelijking kan oplossen, maar dat je pas echt tot de wijzen gerekend kan worden, als je nog twee extra eisen kunt meenemen in je oplossing.

Twée extra eisen: regels 33 t/m 40

In regels drieëndertig tot en met veertig worden deze twee extra eisen genoemd. Deze eisen vormen samen met de zeven vergelijkingen het “uitgebreide probleem” en de zeven vergelijkingen op zichzelf het “eerste probleem”. De eisen zijn iets moeilijker uit de tekst te halen dan de

⁹¹ In alle drie de vergelijkingen komen de blonde stieren voor. In de Griekse tekst werd deze herhaling aangegeven met de woorden ἔτι (nog <eens>) en αὖτις (weer).

⁹² Anders dan bij de vergelijkingen over de stieren, waar alleen stieren in voorkomen, komen in de vergelijkingen wat betreft de koeien zowel de stieren als de koeien voor (runderen).

vergelijkingen en worden daarom extra toegelicht. In regels drieëndertig tot en met zesendertig staat het volgende:

33. ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
 34. κυανέοις, ἴσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
 35. εἰς βάθος εἰς εὐρὸς τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
 36. πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
-
33. Wanneer de witharige stieren hun aantal samenvoegen met
 34. de donkere <stieren>, staan zij standvastig, terwijl ze van gelijke grootte zijn
 35. ten aanzien van hoogte en breedte, en opnieuw worden de zeer lange vlaktes
 36. van Thrinaca door alle <runderen> gevuld met een vierkant.

Uit regel 33 blijkt dat het in deze vergelijking gaat om de witte en de donkere stieren. Vervolgens wordt in regel vierendertig tot en met zesendertig twee keer⁹³ hetzelfde duidelijk gemaakt: de vorm die de stieren vormen als ze zijn samengekomen heeft dezelfde hoogte als breedte ⁹⁴ en de stieren staan in een vierkant ⁹⁵. Dit wil zeggen dat het aantal witte stieren en het aantal donkere stieren bij elkaar opgeteld een kwadraat vormt. Dit is de eerste extra eis.

De tweede wordt uitgelegd in regels zevenendertig tot en met veertig:

37. ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἄθροισθέντες
38. ἴσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
39. σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
40. ἄλλοχρῶν ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.

⁹³ Dat het hier twee keer om inhoudelijk hetzelfde gaat, wordt aangegeven met αὖ (opnieuw) in regel 35.

⁹⁴ “terwijl ze van gelijke grootte zijn ten aanzien van hoogte en breedte” r. 34-35.

⁹⁵ “en opnieuw worden de zeer lange vlaktes van Thrinaca door alle <runderen> gevuld met een vierkant” r. 35-36.

37. De blonde en de gevlekte <stieren>, nadat ze zich bij elkaar verzameld hebben,
38. staan op hun beurt opborrelend ⁹⁶, terwijl ze beginnen met één⁹⁷
39. en een drierandige⁹⁸ verschijning tot stand brengen, terwijl er noch
40. <meer> gevlekte stieren aanwezig zijn noch <stieren> ontbreken.

Ook hier wordt in de eerste regel van het stuk duidelijk om welke stieren het gaat binnen deze vergelijking: het gaat op de blonde en de gevlekte stieren. Vervolgens wordt in regels achtendertig en negenendertig beschreven dat deze runderen (van boven gezien) samen een driehoek vormen. Het komt erop neer dat het aantal blonde en gevlekte runderen samen een driehoeksgetal⁹⁹ is. Ten slotte wordt er nog toegevoegd, dat bij het vormen van de driehoek met deze runderen geen extra stieren of minder stieren worden gebruikt, dus dat de vergelijking precies klopt.

De twee extra eisen kunnen op de volgende manier worden weergegeven:

- Witte stieren + donkere stieren = *kwadraat* (r. 33-36)
- Blonde stieren + gevlekte stieren = *driehoeksgetal* (r. 37-40)

Slot: regels 41 t/m 44

Tenslotte wordt in de laatste vier regels duidelijk gemaakt, dat je trots mag zijn en tot de wijzen zal worden gerekend, wanneer je het volledige probleem (het uitgebreide probleem) hebt oplost en alle aantallen kunt noemen:

41. Ταῦτα συνεξευρών καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
42. καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
43. ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως

⁹⁶ ἀμβολάδην (opborrelend): bedoeld wordt dat de rijen met runderen een driehoek vormen: de eerste rij is het kortst (1 rund) en de volgende rijen “borrelen op” oftewel worden steeds breder.

⁹⁷ ἐξ ἑνος (met één): bedoeld wordt het topje van de driehoek.

⁹⁸ τρικράσπεδον (drierandig): bedoeld wordt een driehoek.

⁹⁹ Een driehoeksgetal is van de vorm $\frac{1}{2}n(n+1)$, dit wordt later meer toegelicht.

44. κεκριμένος ταύτη γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.
41. Wanneer u deze dingen ontdekt en in uw verstand verzamelt
 42. en nadat u alle maten van de aantallen hebt bekend gemaakt, vreemdeling,
 43. ga <dan> voort, terwijl u trots bent, als een overwinnaar, weet dat u
 ongetwijfeld
 44. in zulke wijsheid als bloeiend¹⁰⁰ beoordeeld wordt.

σοφίῃ

Het laatste woord van de laatste regel van het gedicht is het woord σοφίῃ, wat komt van σοφία (*kennis, wijsheid*). Dit woord kwam aan het begin van het gedicht in regel 2 en midden in het gedicht in regel 32 ook voor en geeft zo de opbouw van het gedicht weer:

In regel 2 wordt aangegeven dat εἰ μετέχεις σοφίης (*als u kennis heeft*), u het raadsel zou moeten oplossen. Dit is het begin van het gedicht. In regel 32 wordt duidelijk dat οὐ σοφοῖς ἐναρίθμιος (*u nog niet tot de wijzen wordt geteld*) na het oplossen van het eenvoudige probleem. Er komt dus nog een deel. Ten slotte word in regel 44, de laatste regel, geconcludeerd dat wanneer u het uitgebreide probleem heeft opgelost, κεκριμένος ταύτη γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ (*u in zulke wijsheid als bloeiend beoordeeld wordt*). Hiermee is het gedicht afgesloten.

Bij de opening van het gedicht is σοφία (regel 2) in een conditie gebruikt (... *als u kennis heeft*). In de afsluiting van het gedicht (regel 44) is er geen sprake meer van een conditie, maar van een conclusie¹⁰¹: na het oplossen van het probleem wordt je wijs geacht.

¹⁰⁰ ὄμπνιος (bloeiend): letterlijk: goed gevoed.

¹⁰¹ Regel 2: als u wijs bent, kunt u het raadsel oplossen (conditie);
 regel 44: u heeft het raadsel opgelost, dus u bent wijs (conclusie).

Het gedicht draait om het wijs genoeg zijn/genoeg kennis hebben om het probleem op te lossen ¹⁰². Het is dan ook niet vreemd dat juist het woord σοφία het gedicht mag afsluiten en daardoor extra benadrukt wordt.

Invloed van Homerus in Πρόβλημα

In de tekst van Archimedes zijn duidelijk referenties aan de Odyssee van Homerus op te merken.

Homerus was in de tijd van Archimedes een legende op het gebied van poëzie. Daarom werden schrijvers met veel kennis over de gedichten van Homerus beschouwd als goede schrijvers. In de antieke wereld gaf je hoeveelheid kennis van Homerus zelfs de mate van je opleiding aan. Het was dan ook erg normaal om in eigen teksten stijlkenmerken van Homerus over te nemen of inhoudelijk naar Homerische teksten te verwijzen. Archimedes heeft dit ook gedaan en in dit hoofdstuk worden een aantal voorbeelden hiervan beschreven.

Eerste zin van Πρόβλημα en van de Odyssee

De eerste zin van het gedicht Πρόβλημα vertoont wat betreft opbouw overeenkomsten met de eerste zin uit de Odyssee. Vooral deze eerste zin uit de Odyssee was zeer bekend, dus op deze manier kon Archimedes laten zien dat hij de gedichten van Homerus kende en dat hij dit kon combineren met zijn eigen verhaal.

Op de volgende bladzijde staan de eerste zin van de Odyssee en de eerste zin van πρόβλημα onder elkaar:

¹⁰² Archimedes zou zelfs kunnen hebben gemeend, dat het noodzakelijk is dat iemand zijn probleem kan oplossen, voordat deze wijs kan worden genoemd. Het is dan maar de vraag of het in de oudheid mogelijk is geweest om in de ogen van Archimedes wijs te zijn. Het antwoord van het probleem bevat namelijk enorm grote getallen, die zonder computer onmogelijk berekend zouden kunnen zijn.

ἄνδρα μοι ἔννεπε, μοῦσα, πολύτροπον, ὅς (...) ¹⁰³ (Od. boek 1; r. 1)

Πληθὺν Ἥελίοιο βοῶν, ᾧ ξεῖνε, μέτρησον (Πρόβλημα r. 1)

Beide zinnen hebben een imperativus als persoonsvorm (Odyssee.: ἔννεπε; προβλημα: μέτρησον), bevatten een aanspreekvorm in de vocativus (Odyssee: μοῦσα; Πρόβλημα: ᾧ ξεῖνε), een object in de accusativus (Odyssee: ἄνδρα πολύτροπον, προβλημα: Πληθὺν) en extra informatie bij dit object: bij de Odyssee door middel van een relatieve bijzin (ὅς (...)) en bij Πρόβλημα door middel van een adjectieve bepaling (Ἥελίοιο βοῶν). Hieronder staan de zinnen nog eens onder elkaar, hierbij zijn de overeenkomende zinsdelen aangegeven. (Imperativus als persoonsvorm: dik gedrukt; aanspreekvorm in de vocativus: cursief gedrukt; object in de accusativus: onder streept; extra informatie wat betreft de objecten: normaal gedrukt.)

ἄνδρα μοι *ἔννεπε*, *μοῦσα*, πολύτροπον, ὅς (...) (Od. boek 1 r. 1)

Πληθὺν Ἥελίοιο βοῶν, *ᾧ ξεῖνε*, **μέτρησον** (Πρόβλημα r. 1)

De aanspreekvorm

In een epos, zoals de Odyssee, is het gebruikelijk om met een aanroeping de alwetende Muzen ¹⁰⁴ om informatie te vragen. Zij hebben immers (in tegenstelling tot de dichter/voordrager) de kennis om het verhaal te vertellen.

In *Πρόβλημα* is de aanroeping gericht aan de lezer (Eratosthenes), de eventuele toekomstige oplosser van het probleem. De intelligentie van Eratosthenes wordt met de opbouw van de eerste zin al op de proef gesteld: heeft Eratosthenes, als hoofd van het Alexandrijnse Bibliotheek, genoeg

¹⁰³ Vertaling: "Vertel mij over de vindingrijke man, Muze, die ..."

¹⁰⁴ In de Griekse mythologie zijn de negen muzen de personificaties in de vorm van goden van alle kunsten en wetenschappen. Elke muze staat voor een kunst/wetenschap. De muzen konden de mensen inspireren tot dingen die ze zonder een goddelijke ingreep nooit hadden kunnen bedenken.

kennis om het raadsel op te lossen, zoals de Muzen genoeg kennis hebben om het verzoek om informatie voor het voordragen van een epos te beantwoorden?

Door de opbouw van de eerste zin van de Odyssee over te nemen, laat Archimedes niet alleen zien dat hij kennis heeft van de gedichten van Homerus, maar maakt hij ook meteen duidelijk dat het geen simpel raadseltje¹⁰⁵ is, dat hij verder in zijn brief beschreven heeft.

Ongeschooldheid wat betreft wiskunde of geografie

Archimedes noemt de lezer van zijn gedicht in regel 30 “niet onnozel” en “niet onwetend met getallen” (zie de onderstaande regels).

27. ξεῖνε, σὺ δ', Ἡελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
28. χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφῶν ἀριθμόν,
29. χωρὶς δ' αὖ, θήλειαι ὅσαι κατὰ χροῖαν ἕκασται,
30. οὐκ αἰδοῖς κε λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής

27. Vreemdeling, nadat u over de runderen van Helios hebt verteld
hoeveel <er> precies <zijn>,
28. <en u> het aantal van de stieren apart <hebt verteld>,
29. <en> weer apart hoe groot alle vrouwelijke <kuddes> per kleur zijn,
30. zou u niet onnozel worden genoemd, en ook niet onwetend met
aantallen.

De laatste regel zou weer kunnen verwijzen naar de Odyssee: de lezer wordt “niet ongeschoold” genoemd, zoals Odysseus dat wel was, geografisch gezien. De “ongeschooldheid” van Odysseus (op geografisch gebied) blijkt uit de volgende passage uit de Odyssee:

Πῆι δὴ αὖτ', ὦ δύστηνε, δι' ἄκριας ἔρχεαι οἶος
χώρου αἰδοῖς ἐών; (Odyssee 10.281-2)

¹⁰⁵ Het oplossen ervan wordt namelijk vergeleken met de taak van de Muzen, een taak die door een dichter niet volbracht kan worden.

Waar ga je heen, oh ongelukkige, langs de bergtoppen, aangezien je onwetend bent over het land?

Homerische vormen, uitgangen en woorden

Homerus paste een aantal typische verschijnselen toe in zijn gedichten. Hierdoor zijn zijn teksten makkelijk te herkennen.

Archimedes heeft een aantal van deze verschijnselen overgenomen in zijn gedicht:

- Zo schrijft hij bijvoorbeeld in regel 1, 27 en 32 *Ἡελίοιο* en in regel 5 *λευκοῖο* met de typerende *-οιο* uitgang in plaats van de gebruikelijke uitgang *-ου* voor een genitivus mannelijk of onzijdig enkelvoud.
- In regel 3 schrijft hij *πόσση* in plaats van *πόση* en in regel 5 *ἀλλάσσουντα* in plaats van *ἀλλάσσοντα*. Dit heeft hij gedaan om het metrum in deze regels kloppend te kunnen maken. Het gebruik van dubbele medeklinkers voor het metrum is een bekend Homerisch verschijnsel.
- Daarnaast staat in regel 4 de niet-gecontraheerde vorm *στίφεα* (in plaats van *στίφη*) en in regel 35 *περιμήκεα* (in plaats van *περιμήκη*).
- Ook gebruikt hij voor *ξανθοῖσι* in regel 13 en voor *θηλείαισι* in regel 17 de uitgang *-οῖσι/-αῖσι* voor de dativus meervoud in plaats van de gebruikelijke uitgang *-οις/-αις*.
- Daarbij laat hij in regel 25 in het woord *ἡριθμεῦντο* een *ε* en een *ο* contracteren tot *εῦ* (*ἡριθμεῦντο* komt van *ἀριθμέω*, de *ε* van de stam en de *ο* van de uitgang *-οντο* trekken samen). Normaal trekken een *ε* en een *ο* samen tot *οῦ*.
- Verder gebruikt hij ook na de letters *ε*, *ι*, *ρ* in plaats van een lange *α* een *η*. Bijvoorbeeld in *μέτρησον* in regel 1, *σοφίης* in regel 2 en *κνανέης* in regel 18.
- Daarnaast schrijft hij in regel 41 *πραπίδεσιν* met als uitgang voor de dativus meervoud (gemengde declinatie) *-εσσιν* in plaats van *-σι(ν)*.
- Ten slotte schrijft hij in regel 41 *ἐνὶ* in plaats van *ἐν*.

Er zijn ook een aantal woorden, die al snel aan Homerus gelinkt worden. Hij gebruikte woorden zoals ξεῖνε en σοφία veelvuldig in zijn teksten. Door deze woorden ook te gebruiken in zijn eigen gedicht, laat Archimedes zijn kennis over Homerus weer blijken aan zijn lezers.

Het tellen van het aantal runderen en het hebben van kennis van Homerus

Tenslotte valt nog te zeggen dat het tellen van het aantal runderen parallel ligt aan het proberen een zo volledig mogelijke kennis van Homerus op te bouwen: er zijn veel runderen om te tellen en er is veel van Homerus om te weten.¹⁰⁶

Een extra laag in het gedicht: Homerische verwijzingen

Zoals uit dit hoofdstuk is gebleken zitten er meerdere lagen in het gedicht van Archimedes. Het is niet alleen een moeilijk wiskundig probleem, ook op literair gebied is er over nagedacht: vanaf de opbouw van eerste zin tot aan de betekenis het laatste woord van het gedicht zit er een tweede gedachte achter de tekst, namelijk het maken van vele verwijzingen naar Homerus.

Dit is waarom ik het gedicht in het hoofdstuk “Genre van Πρόβλημα” (blz. 32) als elegie afschreef en niet als epigram. Ik vind dat de literaire gedachte achter de tekst in zulke mate is uitgedacht, dat het gedicht niet een epigram te noemen is.

Wiskundig probleem

Het hele gedicht van Archimedes is nu twee keer doorlopen: eerst is de vertaling weergegeven, vervolgens is de literaire laag van de tekst toegelicht. Alleen de wiskundige laag van de tekst wacht nog.

¹⁰⁶ Deze gedachte komt uit “Counting on Epic: Mathematical Poetry and Homeric Epic in Archimedes’ Cattle Problem”:

<https://pdfs.semanticscholar.org/dc28/f9caa3707b35b629242a1b76be88512af623.pdf>

Volgens Archimedes wordt je wijs geacht, wanneer je in staat bent om het wiskundige probleem uit het gedicht op te lossen. Dit is precies wat we nu gaan doen.

DEEL III

Het wiskundige probleem

Het wiskundige aspect van de tekst

De vergelijkingen op een rijtje

Het probleem bestaat uit zeven vergelijkingen (drie over het aantal stieren en vier over het aantal koeien), twee extra eisen en acht onbekenden (het aantal stieren en aantal koeien van alle vier de vachttypen). De zeven vergelijkingen worden hieronder nog eens weergegeven. Hierbij is voor elke onbekende een letter gekozen (waarbij het verschil tussen een hoofdletter en een kleine letter relevant is).

W = witte stieren

D = donkere stieren

B = blonde stieren

G = gevlekte stieren

w = witte koeien

d = donkere koeien

b = blonde koeien

g = gevlekte koeien

$$1. \quad W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) D + B$$

$$2. \quad D = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) G + B$$

$$3. \quad G = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + B$$

$$4. \quad w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (D + d)$$

$$5. \quad d = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (G + g)$$

$$6. \quad g = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (B + b)$$

$$7. \quad b = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (W + w)$$

De twee extra eisen kunnen als volgt worden weergegeven. Hierbij is “een kwadraat” algemeen weergegeven met k^2 en “een driehoeksgetal ¹⁰⁷” met $\frac{1}{2}k(k+1)$:

- $W + D = k^2$
- $B + G = \frac{1}{2}k(k+1)$

¹⁰⁷ Een driehoeksgetal bestaat uit een som van oplopende termen:
 $1 + 2 + 3 + \dots + k$. Dit kan kort worden geschreven als $\frac{1}{2}k(k+1)$.

Het eerste probleem

De eerste zeven vergelijkingen zijn lineaire vergelijkingen en vormen samen een lineair stelsel. Interessant is dat er een onbekende meer is dan dat er vergelijkingen zijn. Dit geeft geen problemen voor het oplossen: de oplossing bevat hierdoor enkel een variabele. Hierdoor zijn er oneindig veel oplossingen mogelijk wat de eerste zeven vergelijkingen betreft.

Een lineair stelsel kan worden opgelost door de vergelijkingen te substitueren.

Het uitgebreide probleem

Het probleem wordt pas echt interessant wanneer de twee extra eisen ook worden meegenomen. De oplossing van het eerste probleem blijft hier nog steeds van kracht, maar voor de variabele valt niet meer elk natuurlijk getal in te vullen (want dan zou de oplossing misschien niet aan de twee extra eisen voldoen). Voor het uitgebreide probleem is het nodig een zogenoemde Pell-vergelijking¹⁰⁸ op te lossen. Hieruit komt ook een lineaire oplossing. De kleinste oplossing van het uitgebreide probleem is echter veel groter dan die van het eenvoudige probleem.

Het oplossen van de twee problemen

We zullen eerst naar het eerste probleem kijken. Wanneer we hiervan een oplossing hebben gevonden, kunnen we ook naar het uitgebreide probleem kijken. Hiervoor hebben we namelijk de oplossing van het eerste probleem nodig.

In de volgende hoofdstukken worden enkele wiskundige termen en afkortingen gebruikt. De eerste keer dat een nieuwe wiskundige term voorkomt, staat deze cursief gedrukt en wordt deze toegelicht.

¹⁰⁸ Wordt later toegelicht.

Wat betreft volledige inductie komen de volgende afkortingen voor de verschillende stappen binnen het bewijs voor:

- **(IB):** Inductie-basis
 - Bewijs voor het kleinste geval dat bewezen moet worden.
- **(IH):** Inductie-hypothese
 - Aannemen dat de stelling klopt voor $n = k$.
- **(IS):** Inductie-stap
 - Bewijzen dat de stelling klopt dan ook klopt voor $n = k + 1$.

Verder wordt in dit hoofdstuk gewerkt met 1 als kleinste natuurlijke getal.
Dus $0 \notin \mathbb{N}$.

Het eerste probleem: oplossing

Vergelijkingen over de stieren

Hier staan eerst nog eens de eerste drie vergelijkingen wat betreft de aantallen stieren nog eens op een rijtje:

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)D + B \rightarrow W = \frac{5}{6}D + B \quad (1)$$

$$D = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)G + B \rightarrow D = \frac{9}{20}G + B \quad (2)$$

$$G = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)W + B \rightarrow G = \frac{13}{42}W + B \quad (3)$$

Uit de eerste vergelijking kan D worden geëlimineerd¹⁰⁹ door vergelijking (2) in vergelijking (1) te substitueren. Vervolgens kan ook de variabele G worden weggewerkt door vergelijking (3) in te vullen in deze nieuwe vergelijking. Tenslotte kan hieruit een lineair verband tussen W en B worden opgemaakt:

Substitutie van vergelijking (2) in vergelijking (1) geeft:

$$W = \frac{5}{6}\left(\frac{9}{20}G + B\right) + B = \frac{3}{8}G + \frac{11}{6}B.$$

Substitutie van vergelijking (3) in deze nieuwe vergelijking geeft:

$$W = \frac{3}{8}\left(\frac{13}{42}W + B\right) + \frac{11}{6}B = \frac{13}{112}W + \frac{53}{24}B.$$

Dit geeft:

$$\frac{99}{112}W = \frac{53}{24}B \rightarrow W = \frac{742}{297}B.$$

¹⁰⁹ Het is ook mogelijk om een andere volgorde in het elimineren van de variabelen te kiezen.

Dit verband kan in vergelijking (1) en (3) worden ingevuld. Hieruit volgen de lineaire verbanden tussen D en B en tussen G en B :

Substitutie van $W = \frac{742}{297}B$ in vergelijking (1) geeft:

$$\frac{742}{297}B = \frac{5}{6}D + B \rightarrow \frac{5}{6}D = \frac{445}{297}D \rightarrow D = \frac{178}{99}B.$$

Substitutie van $W = \frac{742}{297}B$ in vergelijking (3) geeft:

$$G = \frac{13}{42} \cdot \frac{742}{297} + B \rightarrow G = \frac{1580}{891}B.$$

In de drie vergelijkingen over de vier verschillende groepen stieren zijn dus drie verbanden gevonden:

$$W = \frac{742}{297}B \quad D = \frac{178}{99}B \quad G = \frac{1580}{891}B.$$

Hierbij kunnen de noemers worden gelijk gemaakt:

$$W = \frac{2226}{891}B \quad D = \frac{1602}{891}B \quad G = \frac{1580}{891}B.$$

Er is hier een variabele meer dan er vergelijkingen zijn, dus de oplossing is lineair. Voor de kleinste oplossing met $B, D, G, W \in \mathbb{N}$ geldt $B = 891$ ¹¹⁰. Dit geeft voor de aantallen van de stieren het volgende resultaat:

$$(W, D, G, B) = (2226, 1602, 1580, 891)$$

De kleinste oplossing van enkel de stieren levert een totaal van 6299 stieren op, dit is al veel meer dan het aantal runderen dat in de Odyssee genoemd wordt. (Dit waren er slechts 350.)

¹¹⁰ Het aantal stieren is altijd een natuurlijk getal (er zijn geen halve stieren). Wanneer B gelijk is aan 891 of een veelvoud hiervan, vallen de noemers weg en krijgen we voor ieder aantal stieren een natuurlijke oplossing.

De algemene oplossing is echter lineair en bevat dus een variabele¹¹¹, elke veelvoud van de oplossing is namelijk ook een oplossing:

$$(W, D, G, B) = n \cdot (2226, 1602, 1580, 891)$$

Vergelijkingen over de koeien

Hieronder staan de eerste vier vergelijkingen wat betreft de aantallen van de koeien nog eens op een rijtje:

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(Z + z) = \frac{7}{12}Z + \frac{7}{12}z \quad (4)$$

$$d = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(G + g) = \frac{9}{20}G + \frac{9}{20}g \quad (5)$$

$$g = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(B + b) = \frac{11}{30}B + \frac{11}{30}b \quad (6)$$

$$b = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w) = \frac{13}{42}W + \frac{13}{42}w \quad (7)$$

De gevonden verbanden tussen de stieren kunnen hierin worden ingevuld, op deze manier worden er al drie variabelen geëlimineerd:

$$w = \frac{623}{594}B + \frac{7}{12}z \quad (4)$$

$$d = \frac{79}{99}B + \frac{9}{20}g \quad (5)$$

$$g = \frac{11}{30}B + \frac{11}{30}b \quad (6)$$

$$b = \frac{689}{891}B + \frac{13}{42}w \quad (7)$$

¹¹¹ In onderstaande vergelijking is deze variabele n genoemd. Hierbij geldt: $n \in \mathbb{N}$.

Vervolgens kunnen deze vier vergelijkingen in elkaar worden ingevuld, opdat er een lineair verband tussen w^{112} en B kan worden opgemaakt:

Substitutie van vergelijking (7) in vergelijking (6) geeft:

$$g = \frac{11}{30}B + \frac{11}{30}\left(\frac{689}{891}B + \frac{13}{42}w\right) = \frac{158}{243}B + \frac{143}{1.260}w.$$

Substitutie van vergelijking (6') in vergelijking (5) geeft:

$$d = \frac{79}{99}B + \frac{9}{20}\left(\frac{158}{243}B + \frac{143}{1.260}w\right) = \frac{3.239}{2.970}B + \frac{143}{2.800}w.$$

Substitutie van vergelijking (5') in vergelijking (4) geeft:

$$w = \frac{623}{594}B + \frac{7}{12}\left(\frac{3.239}{2.970}B + \frac{143}{2.800}w\right) = \frac{60.053}{35.640}B + \frac{143}{4.800}w.$$

Dit geeft:

$$\frac{4.657}{4.800}w = \frac{60.053}{35.640}B \rightarrow w = \frac{7.206.360}{4.149.387}B = \frac{7.206.360}{4657 \cdot 891}B.$$

Dit verband kan in vergelijking (7), in vergelijking (6) en in vergelijking (5) worden ingevuld, opdat ook de verbanden tussen b en B , tussen g en B en tussen z en B duidelijk worden:

Substitutie van $w = \frac{7.206.360}{4657 \cdot 891}B$ in vergelijking (7) geeft:

$$b = \frac{689}{891}B + \frac{13}{42} \cdot \frac{7.206.360}{4657 \cdot 891}B = \frac{228.446.946}{174.274.254}B = \frac{5.439.213}{4657 \cdot 891}B.$$

Substitutie van $b = \frac{5.439.213}{4657 \cdot 891}B$ in vergelijking (6) geeft:

¹¹² Wanneer de vergelijkingen in een andere volgorde bij elkaar worden ingevuld, komt hier een andere variabele te staan. Dit maakt voor het vervolg niet uit, de uitwerking gaat analoog.

$$g = \frac{11}{30}B + \frac{11}{30} \cdot \frac{5.439.213}{4657 \cdot 891}B = \frac{105.474.600}{124.481.610}B = \frac{3.515.820}{4657 \cdot 891}B.$$

Substitutie van $g = \frac{3.515.820}{4657 \cdot 891}B$ in vergelijking (5) geeft:

$$d = \frac{79}{99}B + \frac{9}{20} \cdot \frac{3.515.820}{4657 \cdot 891}B = \frac{97.864.920}{82.987.740}B = \frac{4.893.246}{4657 \cdot 891}B.$$

In de vier vergelijkingen over de vier verschillende groepen koeien zijn dus vier verbanden gevonden:

$$w = \frac{7.206.360}{4657 \cdot 891}B \quad d = \frac{4.893.246}{4657 \cdot 891}B \quad g = \frac{3.515.820}{4657 \cdot 891}B \quad b = \frac{5.439.213}{4657 \cdot 891}B.$$

De stieren en de koeien

In de vier gevonden verbanden tussen de koeien en de blonde stieren (B) is de factor 891 uit de noemer gehaald (uit de verbanden tussen de stieren bleek namelijk al dat het aantal blonde stieren (B) een 891-voud is). Vervolgens zijn de breuken gelijknamig gemaakt, waardoor elke noemer gelijk is aan $4657 \cdot 891$. Hierdoor kan de conclusie getrokken worden dat B niet alleen een 891-voud, maar ook een 4657-voud moet zijn, wil de oplossing bestaan uit natuurlijke getallen¹¹³.

Gegeven dat B een 891-voud en een 4657-voud is, wordt de oplossing voor het aantal stieren het volgende:

$$(W, D, G, B) = n \cdot 4657 \cdot (2226, 1602, 1580, 891) \rightarrow$$

$$(W, D, G, B) = n \cdot (10.366.482, 7.460.514, 7.358.060, 4.149.387)$$

De oplossing voor het aantal koeien wordt dan het volgende¹¹⁴:

¹¹³ Als B een 891-voud en een 4657-voud is, vallen 891 en 4657 weg uit de noemer en is er sprake van een natuurlijke oplossing, wat een vereiste is aan de oplossing.

¹¹⁴ Vanzelfsprekend is de n in deze vergelijking gelijk aan de n in de vergelijking van de oplossing van de stieren.

$$(w, d, g, b) = n \cdot (7.206.360, 4.893.246, 3.515.820, 5.439.213)$$

Voor de kleinste oplossing (groter dan 0) is n gelijk aan 1. Dit geeft de volgende oplossing:

W	witte stieren:	10.366.482	w	witte koeien:	7.206.360
D	donkere stieren:	7.460.514	d	donkere koeien:	4.893.246
G	gevlekte stieren:	7.358.060	g	gevlekte koeien:	3.515.820
B	blonde stieren:	4.149.387	b	blonde koeien:	5.439.213

Dit geeft een totaal van 50.389.082 runderen. De kleinste oplossing komt dus uit op een aantal dat ruim¹¹⁵ 14.000 keer groter is dan de genoemde hoeveelheid in de Odyssee. Omdat de oplossing lineair is, zijn er oneindig veel oplossingen. Hierbij is het totaal aantal runderen steeds gelijk aan een veelvoud van 50.389.082.

Als Thrinakia, het eiland waar Helios zijn runderen liet grazen, zou verwijzen naar Sicilië, dat een oppervlakte heeft van ongeveer 25.700 km², zou er per elke ruim¹¹⁶ 500 m² minstens¹¹⁷ één rund te vinden zijn.

¹¹⁵ Precies $50.389.082/350 = 143968,8057$ keer zo groot.

¹¹⁶ $25.700.000.000/50.389.082 \approx 510$ m².

¹¹⁷ Er is bij dit rekensommetje uitgegaan van de kleinste oplossing.

Het uitgebreide probleem: de oplossing

Nu zullen we het uitgebreide probleem bekijken.

Twée extra eisen

Hieronder worden de twee extra eisen, die het probleem ingewikkeld maken, nog eens genoemd:

- $W + D = k^2$
- $B + G = \frac{1}{2}k(k + 1)$

Voor de oplossing van het uitgebreide probleem is de oplossing van de eenvoudige versie nog steeds van kracht. Dus voor de eerste eis geldt:

$$W + D = n \cdot 4657 \cdot (2226 + 1602) = n \cdot 4657 \cdot 3828 = k^2.$$

$W + D$ wordt nu ontbonden in factoren, opdat er duidelijk wordt welke priemfactoren k^2 bevat:

$$W + D = n \cdot 4657 \cdot 3828 = n \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 = k^2.$$

In k^2 komen alle priemfactoren namelijk een even¹¹⁸ aantal keer voor. Aangezien $W + D$ gelijk is aan dit kwadraat, geldt deze eigenschap ook voor dit lid van de vergelijking. Hieruit blijkt dat n van de volgende vorm is:¹¹⁹

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot p^2 = 4.456.749 \cdot p^2. \quad (8)$$

¹¹⁸ Wanneer een getal wordt gekwadrateerd, worden alle priemfactoren uit de priemfactorisatie gekwadrateerd. Ze komen dus twee keer zo vaak voor. Hierdoor komen alle priemfactoren van k^2 een even aantal keer voor.

¹¹⁹ Want als n van deze vorm is, komen de priemfactoren van k^2 allemaal een even aantal keer voor en dat is noodzakelijk bij een kwadraat.

De tweede eis gaat over een driehoeksgetal. Als T een driehoeksgetal is, dan geldt ¹²⁰:

$$T = \frac{1}{2}k(k+1) \rightarrow 8T = 4k(k+1) = 4k^2 + 4k \rightarrow$$

$$8T + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2.$$

$B + G$ is een driehoeksgetal, dus $8(B + G) + 1$ moet een kwadraat zijn, zeg m^2 . Ook voor deze eis is het noodzakelijk de oplossing van het eenvoudige probleem te gebruiken. Hieronder is de oplossing van B en G ingevuld in $8(B + G) + 1 = m^2$:

$$8(n \cdot 4657 \cdot (1580 + 891)) + 1 = 8 \cdot n \cdot 4657 \cdot 2471 + 1 = m^2.$$

De uit de eerste eis gebleken n (vergelijking 8 op de vorige bladzijde) kan hierin worden ingevuld:

$$8 \cdot 4.456.749 \cdot p^2 \cdot 4657 \cdot 2471 + 1 = m^2 \rightarrow$$

$$m^2 = 410.286.423.278.424 \cdot p^2 + 1.$$

Dus om het uitgebreide probleem op te lossen moet(en) er koppel(s) (m, p) worden gevonden, die voldoen aan de bovenstaande vergelijking. Met een p uit zo'n koppel dat voldoet, kan n worden berekend ¹²¹. Deze n is de enige onbekende in alle vergelijkingen wat betreft de aantallen stieren en koeien, dus met deze n kunnen de aantallen worden berekend en is ook het uitgebreide probleem opgelost.

¹²⁰ Deze factor 8 is zo gekozen, omdat het op deze manier mogelijk is om de vergelijking zo om te schrijven, dat het rechterlid een kwadraat bevat en het linkerlid een term +1. Dan ontstaat er namelijk een Pell-vergelijking (wordt later toegelicht), waarmee de vergelijking kan worden opgelost.

¹²¹ Met behulp van vergelijking 8.

Kettingbreuken

Om deze vergelijking, een zogenoemde Pell-vergelijking, op te lossen zullen we gebruik maken van de ontwikkeling van kettingbreuken. Er volgt eerst een introductie over kettingbreuken, waarmee de benodigde kennis voor het uitwerken van de Pell-vergelijking op deze wijze, kan worden opgedaan. Hierbij worden alvast een aantal stellingen bewezen, die later nodig zijn om te bewijzen dat de Pell-vergelijking op deze wijze (met de hulp van de ontwikkeling van kettingbreuken) kan worden opgelost. Hierna wordt deze wijze dan ook weergegeven en bewezen. Tenslotte wordt het runderenprobleem met deze wijze opgelost.

Introductie kettingbreuken

We kijken nog eens naar de benadering van π van Archimedes (zie bladzijde 22):

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Het linkerdeel kunnen we een *kettingbreuk* noemen. Er is namelijk sprake van een breuk binnen een breuk, waarbij de teller van beide breuken gelijk is aan 1. Een kettingbreuk kan heel veel¹²² breuken bevatten. Het noteren van een kettingbreuk op de manier, zoals de kettingbreuk hierboven, kan dus erg veel ruimte in nemen en verwarrend worden. Daarom is afgesproken dat het volgende:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$$

¹²² Een kettingbreuk kan zelfs oneindig veel breuken bevatten.

geschreven kan worden met de volgende ruimte besparende notatie:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n].$$

Hierbij zijn $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ positieve gehele getallen. a_0 is ook geheel, maar deze zou zowel positief als negatief kunnen zijn. In dit PWS gaan we ervan uit dat $a_0 \geq 0$, opdat we alleen met positieve gehele getallen hoeven te werken. $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ zijn de zogenoemde *wijzergetallen* van de kettingbreuk. Tussen a_0 en a_1 staat een puntkomma, hier wordt ook wel een komma gebruikt. De puntkomma verduidelijkt dat a_0 voor de eerste breuk staat en de “echte” kettingbreuk pas begint bij a_1 .

Iedere kettingbreuk kan ook als *enkelvoudige breuk* worden geschreven, een breuk met een gehele teller en een gehele noemer. Voor het linkerdeel van de benadering van π van Archimedes geldt bijvoorbeeld:

$$[3; 7, 10] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}} = 3 + \frac{1}{\frac{71}{10}} = 3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71}.$$

Daarom wordt $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ ook wel korter¹²³ geschreven als

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Kettingbreukontwikkeling

$[3; 7, 10]$ is de *kettingbreukontwikkeling* (KBO) van $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}}$. Deze breuk komt in de buurt van π , maar is niet precies gelijk aan π , aangezien π een oneindige, onregelmatige KBO heeft. We kunnen een nog betere benadering van π geven, als we de KBO uitbreiden. Dit kan makkelijk met een rekenmachine:

- We toetsen eerst π in.

¹²³ De kettingbreuk wordt met een enkelvoudige breuk geschreven.

- Hier halen we de *entier*¹²⁴ vanaf (in dit geval is dat 3). Dit is het eerste gevonden wijzergetal ($a_0 = 3$).
- Vervolgens berekenen we de *omkering*¹²⁵ van de uitkomst (bijvoorbeeld met $1/Ans$) en trekken we de entier van de nieuwe uitkomst af. Deze entier is het tweede gevonden wijzergetal.
- Van de nieuwe uitkomst nemen we ook weer de omkering en trekken hier weer de entier vanaf, waarbij de entier het volgende gevonden wijzergetal is. Enzovoort.

We maken steeds gebruik van de omkering, omdat we hiermee de noemer van de volgende breuk berekenen. Vervolgens is aan de uitkomst makkelijk te zien wat de entier van de uitkomst is en wat dus het gehele deel is binnen de noemer. Dit gehele deel staat voor de volgende breuk en is dus een wijzergetal.

Hieronder worden op deze manier¹²⁶ de eerste vijf wijzergetallen van de KBO van π gevonden:

π	3,141592654
$Ans - 3$	0,141592654
$1/Ans$	7,062513306
$Ans - 7$	0,062513306
$1/Ans$	15,99659439
$Ans - 15$	0,99659439
$1/Ans$	1,003417249
$Ans - 1$	0,0034172488
$1/Ans$	292,6330697
$Ans - 292$	

De entiers (of gehele delen) die uit de bovenstaande berekening bleken, zijn

¹²⁴ De entier van x ($|x|$) is het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan x .

¹²⁵ De omkering van x is gelijk aan $1/x$.

¹²⁶ Hiervoor is een rekenmachine gebruikt, die in 9 decimalen precies uitkomsten geeft. Een andere rekenmachine met een andere precisie zou andere uitkomsten kunnen geven. Deze uitkomsten zullen echter zo weinig verschillen, dat dit geen invloed zal hebben op de eerste vijf wijzergetallen.

de eerste wijzergetallen van de KBO van π . Een kettingbreukbenadering van π is dus:

$$[3; 7, 15, 1, 292] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}.$$

De rekenmachine kan ons ook vertellen hoe precies de kettingbreukbenaderingen zijn:

- $\pi - (3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}}) \approx 7,48 \cdot 10^{-4}$
- $\pi - (3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}) \approx 5,78 \cdot 10^{-10}$

De benadering met drie wijzergetallen van Archimedes, die hij zonder rekenmachine heeft gemaakt, is dus zeer precies. Waarschijnlijk heeft hij gebruik gemaakt van hulpgetallen, die net zoals π irrationeel zijn, zoals bijvoorbeeld wortels die niet uitkomen op een geheel getal¹²⁷. De benadering met vijf wijzergetallen is nog preciezer. Op de gebruikte rekenmachine met negen decimalen, komt de benadering op het scherm zelfs overeen met de decimale weergave van π .

Repeterende kettingbreukontwikkelingen

We hebben net een begin van de KBO van π met behulp van een rekenmachine berekend. Bij sommige irrationele kan dit ook algebraïsch. We kunnen bijvoorbeeld algebraïsch de KBO van $\sqrt{77}$ berekenen:

Voor het eerste wijzergetal kunnen we bedenken dat $64 < 77 < 81$, dus $8 < \sqrt{77} < 9$. We noemen de beginwaarde $\sqrt{77}$ voor het gemak x_0 .

$$x_0 = \sqrt{77}, \text{ dus } a_0 = \lfloor x_0 \rfloor = 8.$$

¹²⁷ In het volgende hoofdstuk zullen we zelf ook een KBO bekijken van een niet op een geheel getal uitkomende wortel.

De noemer van de eerste breuk binnen de kettingbreuk van $\sqrt{77}$ noemen we x_1 . Dus

$$\sqrt{77} = 8 + \frac{1}{x_1}.$$

Als we $[x_1]$ kunnen berekenen weten we het tweede wijzergetal a_1 .

$$\sqrt{77} = 8 + \frac{1}{x_1} \rightarrow \frac{1}{x_1} = \sqrt{77} - 8 \rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{77} - 8} = \frac{\sqrt{77} + 8}{77 - 64} = \frac{\sqrt{77} + 8}{13}.$$

$$\text{Dus}^{128} a_1 = [x_1] = 1.$$

Vervolgens geldt, zoals voor x_1 geldt dat $x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$, voor x_2 dat

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}.$$

Dan

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} + 8}{13} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} - 5}{13}} = \frac{\sqrt{77} + 5}{77 - 25} = \frac{\sqrt{77} + 5}{4}.$$

Dus

$$a_2 = [x_2] = 3.$$

Daarna

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} + 5}{4} - 3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} - 7}{4}} = \frac{\sqrt{77} + 7}{77 - 49} = \frac{\sqrt{77} + 7}{7}.$$

Dus

$$a_3 = [x_3] = 2.$$

Vervolgens

¹²⁸ Voor deze conclusie is een rekenmachine nodig: $\frac{\sqrt{77}+8}{13} \approx 1,29$ en $[1,29\dots] = 1$.

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} + 7}{7} - 2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} - 7}{7}} = \frac{\sqrt{77} + 7}{77 - 49} = \frac{\sqrt{77} + 7}{4}.$$

Dus

$$a_4 = \lfloor x_4 \rfloor = 3.$$

Waaruit volgt

$$x_5 = \frac{1}{x_4 - a_4} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} + 7}{4} - 3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} - 5}{4}} = \frac{\sqrt{77} + 5}{77 - 25} = \frac{\sqrt{77} + 5}{13}.$$

Dus

$$a_5 = \lfloor x_5 \rfloor = 1.$$

$$x_6 = \frac{1}{x_5 - a_5} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} + 5}{13} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} - 8}{13}} = \frac{\sqrt{77} + 8}{77 - 64} = \frac{\sqrt{77} + 8}{13}.$$

Dus

$$a_6 = \lfloor x_6 \rfloor = 16.$$

Zodat

$$x_7 = \frac{1}{x_6 - a_6} = \frac{1}{\frac{\sqrt{77} + 8}{1} - 16} = \frac{1}{\sqrt{77} - 8} = x_1$$

Dus

$$a_7 = \lfloor x_7 \rfloor = \lfloor x_1 \rfloor = 1.$$

En

$$a_8 = \lfloor x_8 \rfloor = \lfloor x_2 \rfloor = 3.$$

$$a_9 = \lfloor x_9 \rfloor = \lfloor x_3 \rfloor = 2.$$

...

$$a_i = \lfloor x_i \rfloor = \lfloor x_{i-6} \rfloor = a_{i-6}$$

We zeggen dat de kettingbreuk vanaf a_7 *repeteert*. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6$ vormen een *periode*, die oneindig vaak herhaald wordt. Een periode wordt aangegeven met een overstreping: $[a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_6}]$.

De KBO van $\sqrt{77}$ is dus $[8; \overline{1, 3, 2, 3, 1, 16}]$.

De kettingbreukontbinding van $\sqrt{N}$

Niet alleen de KBO van $\sqrt{77}$ is periodiek. We bekijken een aantal andere KBO's van een vorm van $\sqrt{N}$, waarbij N geen kwadraat is:

N	$\sqrt{N}$	N	$\sqrt{N}$
2	$[1; \overline{2}]$	17	$[4; \overline{8}]$
3	$[1; \overline{1, 2}]$	18	$[4; \overline{4, 8}]$
5	$[2; \overline{4}]$	19	$[4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$
6	$[2; \overline{2, 4}]$	20	$[4; \overline{2, 8}]$
7	$[2; \overline{1, 1, 1, 4}]$	21	$[4; \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}]$
8	$[2; \overline{1, 4,}]$	22	$[4; \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$
10	$[3; \overline{6}]$	23	$[4; \overline{1, 3, 1, 8}]$
11	$[3; \overline{3, 6}]$	24	$[4; \overline{1, 8}]$
12	$[3; \overline{2, 6}]$	26	$[5; \overline{, 10}]$
13	$[3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$	27	$[5; \overline{5, 10}]$
14	$[3; \overline{1, 2, 1, 6}]$	28	$[5; \overline{3, 2, 3, 10}]$
15	$[3; \overline{1, 6}]$	29	$[5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$
		30	$[5; \overline{2, 10}]$

Tabel 1 Kettingbreukontbindingen van wortel N

Aan deze tabel vallen twee dingen op: de KBO's zijn periodiek met een periode van $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (waarbij a_n het laatste wijzergetal is van de KBO) en het laatste wijzergetal is twee keer zo groot als de eerste, oftewel $2a_0 = a_n$. We kunnen dit schrijven in de vorm van een stelling:

Stelling 1: $\sqrt{N}$ heeft een periodieke KBO met een periode van a_n , de periode begint meteen na a_0 met a_1 . Hierbij geldt dat $a_n = 2a_0$.

Het bewijs van stelling 1

We zullen voor het bewijs nog eens stap voor stap een kettingbreukontwikkeling berekenen, net zoals de berekende

kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{77}$ op blz. 78. Nu gaan we nu echter in het algemeen bekijken, dus we berekenen de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{N}$.

Het eerste wijzergetal, a_0 , is het gehele deel van $\sqrt{N}$ en is dus gelijk aan $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$. Wanneer we dit van $\sqrt{N}$ aftrekken houden we een rest over van $\sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor$. Deze rest noemen we r_0 . Dus:

$$\sqrt{N} = \lfloor \sqrt{N} \rfloor + (\sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor) = a_0 + r_0.$$

Voor het volgende wijzergetal, a_1 , schrijven we de rest r_0 als een breuk met teller 1, opdat we hierna ook hier weer de gehelen eruit kunnen halen:

$$r_0 = \sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor = \sqrt{N} - a_0 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{N} - a_0}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + a_0}{N - a_0^2}}.$$

Voor het gemak noemen we de noemer van de noemer, $N - a_0^2$, Q_1 . Vervolgens zetten we de gehelen buiten de breuk, dit is gelijk aan a_1 :

$$r_0 = \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + a_0}{N - a_0^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + a_0}{Q_1}} = \frac{1}{a_1 + \frac{\sqrt{N} + a_0 - a_1 \cdot Q_1}{Q_1}}.$$

Wanneer we $a_1 \cdot Q_1 - a_0$ gelijkstellen aan P_1 zien we het volgende:

$$r_0 = \frac{1}{a_1 + \frac{\sqrt{N} - P_1}{Q_1}}.$$

Hierbij kunnen we $\frac{\sqrt{N} - P_1}{Q_1}$ ook weer een rest noemen, we noemen deze rest r_1 . Dus:

$$\sqrt{N} = a_0 + r_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + r_1}$$

met

$$r_1 = \frac{\sqrt{N} - P_1}{Q_1}$$

met

$$\begin{cases} P_1 = a_1 \cdot Q_1 - a_0 \\ Q_1 = N - a_0^2 \end{cases}.$$

Voor het volgende wijzergetal, a_2 , moeten we r_1 ook weer als een breuk schrijven en hier weer de gehelen uithalen. Ook hier blijft weer een rest over, r_2 . Uit deze rest volgen dan weer a_3 en r_3 , enzovoort.

Lemma: We beweren dat de resten van de kettingbreuk van $\sqrt{N}$ te schrijven zijn in de volgende vorm:

$$r_n = \frac{\sqrt{N} - P_n}{Q_n}$$

met

$$\begin{cases} P_{n+1} = a_{n+1} \cdot Q_{n+1} - P_n \\ Q_{n+1} = \frac{N - P_n^2}{Q_n} \end{cases}$$

terwijl dit voldoet aan de volgende drie punten:

- i. $P_n < \sqrt{N}$
- ii. $Q_n \mid N - P_n^2$ ¹²⁹
- iii. $\frac{\sqrt{N} + P_n}{Q_n} > 1$.

Het eerste punt kan eenvoudig bewezen worden:

Een rest van de kettingbreuk van $\sqrt{N}$ is nooit gelijk aan 0. Als dit wel het geval zou zijn, zou er sprake zijn van een enkelvoudige breuk, dus van een rationeel getal. Een wortel is echter irrationeel, dus dit zou tot een tegenspraak leiden. Hiermee is zeker dat $r_n \neq 0$, dus $r_n > 0$ (een rest kan niet negatief zijn wegens de definitie van een rest). Dus:

¹²⁹ Dit punt is nodig om vast te stellen dat Q_{n+1} een geheel getal is. Want $Q_{n+1} = \frac{N - P_n^2}{Q_n}$.

$$0 < \frac{\sqrt{N} - P_n}{Q_n} \rightarrow P_n < \sqrt{N}.$$

We zullen de rest van deze bewering nu met volledige inductie bewijzen.

(IB) Voor r_0 geldt het volgende:

$$r_0 = \sqrt{N} - a_0 = \frac{\sqrt{N} - a_0}{1}.$$

Dus

$$\begin{cases} P_0 = a_0 \\ Q_0 = 1 \end{cases}.$$

r_0 is dus te schrijven in de vorm van $r_n = \frac{\sqrt{N} - P_n}{Q_n}$. Daarbij voldoet r_0 ook aan het tweede en het derde punt:

$$1 \mid N - a_0^2, \quad \frac{\sqrt{N} + a_n}{1} > 1.$$

Tenslotte zouden we met

$$\begin{cases} P_{n+1} = a_{n+1} \cdot Q_{n+1} - P_n \\ Q_{n+1} = \frac{N - P_n^2}{Q_n} \end{cases}$$

de volgende rest moeten kunnen berekenen. Als we $\begin{cases} P_0 = a_0 \\ Q_0 = 1 \end{cases}$ invullen komen we uit op het volgende:

$$\begin{cases} P_1 = a_1 \cdot Q_1 - P_0 \\ Q_1 = \frac{N - P_0^2}{Q_0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 = a_1 \cdot Q_1 - a_0 \\ Q_1 = N - a_0^2 \end{cases}$$

Dit komt precies overeen met de “handmatig” berekende P_1 en Q_1 (zie bladzijde 83). Dus de bewering geldt voor r_0 .

(IH) Stel de bewering geldt voor r_i . Dan geldt dat:

$$r_i = \frac{\sqrt{N} - P_i}{Q_i}$$

met

$$\begin{cases} P_{i+1} = a_{i+1} \cdot Q_{i+1} - P_i \\ Q_{i+1} = \frac{N - P_i^2}{Q_i} \end{cases}.$$

terwijl ook geldt dat:

- ii. $Q_n \mid N - P_n^2$
- iii. $\frac{\sqrt{N} + P_n}{Q_n} > 1$.

(IS) We bekijken nu wat er gebeurt voor r_{i+1} . We zullen r_{i+1} eerst berekenen:

$$r_i = \frac{\sqrt{N} - P_i}{Q_i} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{\sqrt{N} - P_i}{Q_i}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + P_i}{N - P_i^2}}.$$

$\frac{N - P_i^2}{Q_i}$ in de noemer van de noemer kunnen we schrijven als Q_{i+1} . Dit geeft:

$$r_i = \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + P_i}{\frac{N - P_i^2}{Q_i}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + P_i}{Q_{i+1}}}.$$

Vervolgens kunnen we hier de gehelen uithalen, dit is weer gelijk aan het volgende wijzergetal, in dit geval a_{n+1} .

$$r_i = \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + P_i}{Q_{i+1}}} = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{\sqrt{N} + P_i - a_{n+1} \cdot Q_{i+1}}{Q_{i+1}}}.$$

$P_i - a_{n+1} \cdot Q_{i+1}$ in de teller van de noemer kunnen we schrijven als $-P_{i+1}$. Dit geeft:

$$r_i = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{\sqrt{N} + P_i - a_{n+1} \cdot Q_{i+1}}{Q_{i+1}}} = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{\sqrt{N} - P_{i+1}}{Q_{i+1}}}.$$

Hierin kunnen we de vorm van $r_n = \frac{\sqrt{N} - P_n}{Q_n}$ herkennen. Dus:

$$r_i = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{\sqrt{N} - P_{i+1}}{Q_{i+1}}} = \frac{1}{a_{n+1} + r_{i+1}}$$

en

$$r_{i+1} = \frac{\sqrt{N} - P_{i+1}}{Q_{i+1}}.$$

De vorm van r_{i+1} voldoet dus aan de bewering. We zullen nu bekijken of r_{i+1} ook aan de twee punten voldoet.

Voor ii. zouden moeten gelden dat:

$$\text{ii. } Q_{i+1} \mid N - P_{i+1}^2.$$

We weten dat

$$Q_{i+1} = \frac{N - P_i^2}{Q_i}.$$

Dus

$$Q_i = \frac{N - P_i^2}{Q_{i+1}} \rightarrow Q_{i+1} \mid N - P_i^2.$$

We vullen nu $P_{i+1} = a_{i+1} \cdot Q_{i+1} - P_i$ in $N - P_{i+1}^2$ in. Dit geeft:

$$\begin{aligned} N - P_{i+1}^2 &= N - (a_{i+1} \cdot Q_{i+1} - P_i)^2 = N - (a_{i+1}^2 Q_{i+1}^2 + 2a_{i+1} Q_{i+1} P_i + P_i^2) \\ &= N - a_{i+1}^2 Q_{i+1}^2 - 2a_{i+1} Q_{i+1} P_i - P_i^2 \\ &= (N - P_i^2) - Q_{i+1} (a_{i+1}^2 Q_{i+1} - 2a_{i+1} P_i). \end{aligned}$$

Hierbij geldt dat

$$Q_{i+1} \mid N - P_i^2$$

en dat

$$Q_{i+1} \mid Q_{i+1} (a_{i+1}^2 Q_{i+1} - 2a_{i+1} P_i)$$

dus

$$Q_{i+1} \mid (N - P_i^2) - Q_{i+1} (a_{i+1}^2 Q_{i+1} - 2a_{i+1} P_i) \rightarrow Q_{i+1} \mid N - P_{i+1}^2.$$

Hiermee is punt ii. aangetoond voor r_{i+1} .

Voor iii. zou moeten gelden dat:

$$\text{iii. } \frac{\sqrt{N} + P_{i+1}}{Q_{i+1}} > 1.$$

Hiervoor zullen we $P_{i+1} = a_{i+1} \cdot Q_{i+1} - P_i$ invullen in r_{i+1} :

$$r_{i+1} = \frac{\sqrt{N} - P_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{\sqrt{N} - a_{i+1} \cdot Q_{i+1} - P_i}{Q_{i+1}} = a_i + \frac{\sqrt{N} - P_i}{Q_{i+1}}.$$

Omdat $a_i \geq 1$ en $\sqrt{N} > P$ geldt dat

$$\frac{\sqrt{N} - P_{i+1}}{Q_{i+1}} = a_i + \frac{\sqrt{N} - P_i}{Q_{i+1}} > 1.$$

Hiermee is ook punt iii. aangetoond voor r_{i+1} .

(Conclusie) De bewering is hiermee bewezen.

□

De bewezen vorm en eigenschappen van de resten kunnen we gebruiken om de stelling¹³⁰ te bewijzen.

We kunnen nu namelijk aantonen dat P_{n+1} en Q_{n+1} (uit rest r_{n+1}) te gebruiken zijn om het wijzergetal a_{n+1} (dat ontstaat uit dezelfde rest – namelijk uit r_n – als r_{n+1}) en r_n (de vorige rest) te berekenen.

We hadden gezien dat:

$$r_n = \frac{1}{a_{n+1} + r_{n+1}} =$$

$$\frac{\sqrt{N} - P_n}{Q_n} = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{\sqrt{N} - P_{n+1}}{Q_{n+1}}}.$$

¹³⁰ **Stelling 1:** $\sqrt{N}$ heeft een periodieke KBO met een periode van a_n , de periode begint meteen na a_0 met a_1 . Hierbij geldt dat $a_n = 2a_0$.

Dus

$$\left(\frac{\sqrt{N} - P_n}{Q_n}\right)^{-1} = a_{n+1} + \frac{\sqrt{N} - P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Vervolgens kunnen we $\sqrt{N}$ veranderen ¹³¹ in $-\sqrt{N}$, beide kanten vermenigvuldigen met -1 en a_{n+1} naar de andere kant halen. Dit geeft:

$$\frac{\sqrt{N} + P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a_{n+1} + \left(\frac{\sqrt{N} + P_n}{Q_n}\right)^{-1}.$$

Wegens iii.: $\frac{\sqrt{N} + P_n}{Q_n} > 1$ geldt dat $\left(\frac{\sqrt{N} + P_n}{Q_n}\right)^{-1} < 1$. Dus is $\frac{\sqrt{N} + P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ opgebouwd uit het breukdeel $\left(\frac{\sqrt{N} + P_n}{Q_n}\right)^{-1}$ en het gehele deel a_{n+1} . Dit betekent dat a_{n+1} het grootste gehele getal kleiner dan $\frac{\sqrt{N} + P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ is. Oftewel:

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{\sqrt{N} + P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right\rfloor. \quad (9)$$

Dus

$$\frac{\sqrt{N} - P_n}{Q_n} = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{\sqrt{N} - P_{n+1}}{Q_{n+1}}} = \frac{1}{\left\lfloor \frac{\sqrt{N} + P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right\rfloor + \frac{\sqrt{N} - P_{n+1}}{Q_{n+1}}}.$$

Dus als we een rest weten, kunnen we de voorgaande resten berekenen. De vorige rest volgt namelijk op unieke wijze uit de volgende.

¹³¹ Kruisvermenigvuldiging geeft met $+\sqrt{N}$ het volgende:

$$QQ' = PP' - kQ'P + N + \sqrt{N}(-P - P' + kQ').$$

Hierin is $(-P - P' + kQ')$ gelijk aan 0, aangezien Q en Q' natuurlijk zijn.

Kruisvermenigvuldiging met $-\sqrt{N}$ zou het volgende geven:

$$QQ' = PP' - kQ'P + N - \sqrt{N}(-P - P' + kQ').$$

Ook hier geldt $(-P - P' + kQ') = 0$, dus de twee vergelijkingen komen op hetzelfde neer. Daarom mag $\sqrt{N}$ worden veranderd in $-\sqrt{N}$.

Nu we dit ook weten, kunnen we de periodiciteit van de wijzergetallen van $\sqrt{N}$ bewijzen.

Periodiciteit

We weten nu dat de resten in de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{N}$ de vorm hebben van $r_n = \frac{\sqrt{N}-P_n}{Q_n}$. Daarbij geldt volgens i. dat $P_n < \sqrt{N}$ en wegens iii.: $\frac{\sqrt{N}+P_n}{Q_n} > 1$ geldt dat $Q_n < \sqrt{N} + P_n$. Dus $Q_n < \sqrt{N} + P_n < 2\sqrt{N}$. Het aantal verschillende combinaties van P_n, Q_n dat kan optreden is dus eindig (aangezien P_n en Q_n beide natuurlijk zijn en er een gelimiteerd aantal mogelijke natuurlijke getallen kleiner dan $\sqrt{N}$ bestaat). Dit betekent dat het aantal mogelijke resten ook eindig is en dat er een rest $r_x = \frac{\sqrt{N}-P_x}{Q_x}$ bestaat die meerdere keren voorkomt. Als we alle resten op een rijtje zouden zetten, zou het er dus als volgt uitzien:

$$\sqrt{N} - [\sqrt{N}], \dots, \frac{\sqrt{N} - P_x}{Q_x}, \dots, \frac{\sqrt{N} - P_x}{Q_x}, \dots$$

Aangezien de resten (van rechts naar links) op unieke wijze uit elkaar volgen, kunnen we vaststellen dat de rij resten zeker periodiek is vanaf de eerste $\frac{\sqrt{N}-P_x}{Q_x}$, en daarmee is ook de rij wijzergetallen vanaf hier periodiek.

Ook zien we dat voor de eerste $\frac{\sqrt{N}-P_x}{Q_x}$ de rest $\sqrt{N} - [\sqrt{N}]$ voorkomt. Omdat ook de rij resten vanaf de eerste $\frac{\sqrt{N}-P_x}{Q_x}$ tot $\sqrt{N} - [\sqrt{N}]$ uniek bepaald is (van rechts naar links), weten we dat de rest $\sqrt{N} - [\sqrt{N}]$ ook voor de tweede $\frac{\sqrt{N}-P_x}{Q_x}$ (en na de eerste $\frac{\sqrt{N}-P_x}{Q_x}$, dus tussen de eerste en de tweede $\frac{\sqrt{N}-P_x}{Q_x}$) nog een keer voorkomt. De rest $\sqrt{N} - [\sqrt{N}]$ komt dus minstens twee keer voor. Dit betekent dat de rij resten vanaf de eerste $\sqrt{N} - [\sqrt{N}]$ periodiek is. Aangezien $\sqrt{N} - [\sqrt{N}]$ de allereerste rest is, is de rij resten zuiver periodiek en zijn de wijzergetallen vanaf a_1 periodiek. We hebben bij $\sqrt{N}$ dus te maken met een kettingbreukontbinding van de volgende vorm:

$$\sqrt{N} = [\lfloor \sqrt{N} \rfloor; \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}]$$

Wat betreft a_n , het laatste wijzergetal uit de periode van de KBO van $\sqrt{N}$, kunnen we nog iets vaststellen. We kennen namelijk de bijbehorende rest, dit is $\sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor$, en hiermee kunnen we met behulp van vergelijking (9) de waarde van a_n berekenen:

$$a_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{N} + P_n}{Q_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{N} + \lfloor \sqrt{N} \rfloor}{1} \right\rfloor = 2\lfloor \sqrt{N} \rfloor.$$

Dit kunnen we ook in de vastgestelde vorm van de KBO van $\sqrt{N}$ verwerken. We krijgen dat het volgende:

$$\sqrt{N} = [\lfloor \sqrt{N} \rfloor; \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, 2\lfloor \sqrt{N} \rfloor}].$$

En dit is precies wat we voor stelling 1 wilden bewijzen.

□

Convergenten

We hadden al gezien dat elke eindige kettingbreuk ook als enkelvoudige breuk te schrijven is. Bij een repeterende of andere oneindige kettingbreuk is dit natuurlijk lastiger. Wel kan er van een oneindige kettingbreuk een *convergent* worden berekend. Dit is een enkelvoudige breuk van een *afgebroken KBO*. Bij een convergent die is afgebroken na a_i worden alleen de wijzergetallen t/m a_i meegenomen in de enkelvoudige breuk.

π heeft de volgende oneindige KBO:

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$$

Deze KBO is op verschillende punten af te breken, waarbij er verschillende convergenten ontstaan. Dit zijn de eerste 4 convergenten:

$$[3] = 3$$

$$[3, 7] = \frac{22}{7}$$

$$[3, 7, 15] = \frac{333}{106}$$

$$[3, 7, 15, 1] = \frac{355}{113}$$

De enkelvoudige breuken van de convergenten hebben een teller en noemer, deze noemen we respectievelijk p_i en q_i . Zo geldt bijvoorbeeld voor de KBO van π dat $p_0 = 3$, $p_1 = 22$ en $q_3 = 113$. (Net zoals het eerste wijzergetal a_0 is, zijn p_0 de teller en q_0 de noemer van de eerste convergent.)

Tussen de teller en noemer van een convergent en de tellers en noemers van vorige convergenten ligt logischerwijs een verband. Dit verband kan worden beschreven zoals in *stelling 2*.

Stelling 2: p_i en q_i zijn respectievelijk de teller en de noemer van de convergent van de kettingbreuk $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ die ontstaat na afbreken bij a_i . Hierbij geldt voor $n \geq 2$:

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2} \\ q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2} \end{cases}$$

We zullen dit verband bewijzen met volledige inductie.

Hiervoor beginnen we met $[a_0]$: $a_0 = \frac{a_0}{1}$. Dus we zien dat $p_0 = a_0$ en $q_0 = 1$.

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases}$$

Nu bekijken we $[a_0; a_1]$:

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{a_1} = \frac{p_0 \cdot a_1}{q_0 \cdot a_1} + \frac{q_0}{q_0 \cdot a_1} = \frac{p_0 a_1 + q_0}{q_0 a_1} = \frac{p_0 a_1 + 1}{q_0 a_1}.$$

Dus

$$\begin{cases} p_1 = p_0 a_1 + 1 \\ q_1 = q_0 a_1 \end{cases}$$

Nu kunnen we $[a_0; a_1, a_2]$ bekijken. Hiervoor gebruiken we de uitkomst van $[a_0; a_1]$, voor a_1 vullen we $a_1 + \frac{1}{a_2}$ in.

Dit is tevens de inductiebasis **(IB)**, want de stelling gaat op vanaf $n = 2$.

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, a_2] &= \frac{p_0 \left(a_1 + \frac{1}{a_2} \right) + 1}{q_0 \left(a_1 + \frac{1}{a_2} \right)} = \frac{p_0 a_1 + \frac{p_0}{a_2} + 1}{q_0 a_1 + \frac{q_0}{a_2}} = \\ &= \frac{p_0 a_1 a_2 + p_0 + a_2}{q_0 a_1 a_2 + q_0} = \frac{a_2(p_0 a_1 + 1) + p_0}{q_0 a_1 \cdot a_2 + q_0}. \end{aligned}$$

Hierin kunnen we $\begin{cases} p_1 = p_0 a_1 + 1 \\ q_1 = q_0 a_1 \end{cases}$ herkennen. Als we dit invullen zien we:

$$[a_0; a_1, a_2] = \frac{a_2(p_0 a_1 + 1) + p_0}{q_0 a_1 \cdot a_2 + q_0} = \frac{p_1 a_2 + p_0}{q_1 a_2 + q_0}.$$

Dus

$$\begin{cases} p_2 = p_1 a_2 + p_0 \\ q_2 = q_1 a_2 + q_0 \end{cases}$$

(IH) Stel dat voor p_i en q_i geldt dat:

$$\begin{cases} p_i = p_{i-1} \cdot a_i + p_{i-2} \\ q_i = q_{i-1} \cdot a_i + q_{i-2} \end{cases}$$

We kijken nu naar p_{i+1} en q_{i+1} . Hiervoor vervangen we a_i met $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_i] = \frac{p_{i-1} \cdot a_i + p_{i-2}}{q_{i-1} \cdot a_i + q_{i-2}}.$$

Dus:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a_{i+1}] = \frac{p_{i-1} \left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}} \right) + p_{i-2}}{q_{i-1} \left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}} \right) + q_{i-2}}.$$

Uitwerken geeft:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a_{i+1}] = \frac{p_{i-1}a_i + \frac{p_{i-1}}{a_{i+1}} + p_{i-2}}{q_{i-1}a_i + \frac{q_{i-1}}{a_{i+1}} + q_{i-2}} = \frac{(p_{i-1}a_i + p_{i-2}) + \frac{p_{i-1}}{a_{i+1}}}{(q_{i-1}a_i + q_{i-2}) + \frac{q_{i-1}}{a_{i+1}}}.$$

Hierin kunnen we **IH** invullen, dit geeft:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a_{i+1}] = \frac{p_i + \frac{p_{i-1}}{a_{i+1}}}{q_i + \frac{q_{i-1}}{a_{i+1}}} = \frac{p_i a_{i+1} + p_{i-1}}{q_i a_{i+1} + q_{i-1}}.$$

Dus

$$\begin{cases} p_{i+1} = p_i \cdot a_{i+1} + p_{i-1} \\ q_{i+1} = q_i \cdot a_{i+1} + q_{i-1} \end{cases}.$$

We kunnen concluderen dat wanneer de bewering klopt voor p_i en q_i , de bewering ook geldt voor p_{i+1} en q_{i+1} .

Dus $\begin{cases} p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2} \\ q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2} \end{cases}$ geldt voor $n \geq 2$.

□

Tussen twee opeenvolgende convergenten ligt ook een belangrijk verband:

Stelling 3: De convergenten-stelling houdt in dat:

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n.$$

We zullen dit bewijzen met volledige inductie.

(IB) Eerst bekijken we $n = 0$. Hiervoor gebruiken we $\begin{cases} p_1 = p_0 a_1 + 1 \\ q_1 = q_0 a_1 \end{cases}$ en $q_0 = 1$. Dit geeft:

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (p_0 a_1 + 1) \cdot 1 - p_0 \cdot 1 \cdot a_1 = p_0 a_1 + 1 - p_0 a_1 = 1 = (-1)^0.$$

Dus het klopt voor $n = 0$.

Vervolgens bekijken we $n = 1$. Hiervoor gebruiken we $\begin{cases} p_2 = p_1 a_2 + p_0 \\ q_2 = q_1 a_2 + q_0 \end{cases}$ en zoals we bij $n = 0$ hebben gezien $p_1 q_0 - p_0 q_1 = 1$. Dit geeft

$$\begin{aligned} p_2 q_1 - p_1 q_2 &= (p_1 a_2 + p_0) \cdot q_1 - p_1 \cdot (q_1 a_2 + q_0) \\ &= p_1 q_1 a_2 + p_0 q_1 - p_1 q_1 a_2 - p_1 q_0 \\ &= p_0 q_1 - p_1 q_0 = -(p_1 q_0 - p_0 q_1) = -1 = (-1)^1. \end{aligned}$$

Dus het klopt ook voor $n = 1$.

Vanaf $n = 2$ geldt, zoals in *stelling 2* bewezen is dat:

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2} \\ q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2} \end{cases}$$

Dit kunnen we iets anders opschrijven door $k + 2$ in te vullen voor n , opdat we het ook in dit bewijs kunnen gebruiken:

$$\begin{cases} p_{k+2} = p_{k+1} \cdot a_{k+2} + p_k \\ q_{k+2} = q_{k+1} \cdot a_{k+2} + q_k \end{cases}$$

(IH) Stel voor $k \geq 2$ geldt $p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k$.

(IS) We bekijken nu wat er gebeurt voor $k + 1$. Als we dit invullen in het linkerlid vinden we:

$$p_{k+2} q_{k+1} - p_{k+1} q_{k+2}.$$

Vervolgens kunnen we $\begin{cases} p_{k+2} = p_{k+1} \cdot a_{k+2} + p_k \\ q_{k+2} = q_{k+1} \cdot a_{k+2} + q_k \end{cases}$ hierin invullen. Dit geeft:

$$\begin{aligned} &(p_{k+1} \cdot a_{k+2} + p_k) \cdot q_{k+1} - p_{k+1} \cdot (q_{k+1} \cdot a_{k+2} + q_k) \\ &= p_{k+1} q_{k+1} a_{k+2} + p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_{k+1} a_{k+2} - p_{k+1} q_k \\ &= p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k = -(p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1}). \end{aligned}$$

In het laatste kunnen we **(IH)** herkennen en invullen. Dit geeft:

$$-(p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1}) = -1 \cdot (-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Dus als het geldt voor k , geldt het ook voor $k + 1$.

Dus de bewering geldt voor $n \geq 0$.

□

De Pell-vergelijking

Na deze informatie over kettingbreuken en kettingbreukontwikkelingen zijn we klaar voor het echte werk: het oplossen van een Pell-vergelijking.

Een Pell-vergelijking¹³² is een vergelijking van de vorm $x^2 - Ny^2 = \pm 1$. In dit PWS zullen we ons richten op de positieve uitkomst van 1. De Pell-vergelijking heeft voor iedere N een positieve, gehele oplossing ongelijk aan 0 voor (x, y) , waarbij N geen kwadraat mag zijn van een geheel getal.

We zullen meteen even bekijken waarom N geen kwadraat kan zijn en bewijzen dit vanuit het ongerijmde.

Stel $N = n^2$ waarbij $n \in \mathbb{N}$. Dan zien we dat:

$$x^2 - Ny^2 = x^2 - n^2y^2 = (x + ny)(x - ny) = 1.$$

x, y en n zijn natuurlijk, dus

$$(x + ny) = 1 \wedge (x - ny) = 1 \rightarrow x + ny = x - ny = 1 \rightarrow 2ny = 1 \rightarrow ny = \frac{1}{2}$$

Dit leidt tot een tegenspraak aangezien we gezegd hadden dat zowel n als y geheel waren en $n \cdot y$ dus nooit een breuk kan zijn. Hiermee is bewezen dat $x^2 - Ny^2 = 1$ geen natuurlijke oplossingen heeft als N een kwadraat is van een natuurlijk getal.

□

We kijken nog eens naar de Pell-vergelijking: $x^2 - Ny^2 = 1$. Wat zou er gebeuren als de 1 een 0 zou zijn?

Stel $x^2 - Ny^2 = 0$. Dan geldt $x^2 = Ny^2 \rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = N \rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{N}$. Aangezien N geen kwadraat is, is $\sqrt{N}$ een irrationeel getal en dus zeker niet gelijk aan

¹³² Door een misverstand is de vergelijking naar John Pell vernoemd. Eigenlijk was het niet J. Pell maar W. Brouncker, die een oplossingsmethode voor de Pell-vergelijking vond.

een breuk met een natuurlijke teller en noemer. Er zijn echter wel breuken die in de buurt van $\sqrt{N}$ komen. Een handige manier om tot deze breuken te komen is om de KBO van $\sqrt{N}$ te gebruiken en hiervan convergenten te berekenen. Omdat voor deze convergenten een benadering zijn van $\sqrt{N}$ en geldt dat $\frac{p_i}{q_i} \neq \sqrt{N}$ geldt ook dat $\frac{p_i}{q_i} \neq \frac{x}{y}$ voor de vergelijking $x^2 - Ny^2 = 0$, maar misschien dat de convergent $\frac{p_i}{q_i}$ van $\sqrt{N}$ ons wel verder kan helpen aan een oplossing van $x^2 - Ny^2 = 1$, de Pell-vergelijking.

We hadden de KBO van $\sqrt{77}$ bepaald: $\sqrt{77} = [8; \overline{1,3,2,3,1,16}]$. In de tabel hieronder zijn voor i het wijzergetal a_i , de teller p_i en noemer q_i van de convergent die ontstaat bij het afbreken na a_i en de uitkomsten van $p_i^2 - 77q_i^2$ weergegeven.

i	0	1	2	3	4	5	6
a_i	8	1	3	2	3	1	16
p_i	8	9	35	79	272	351	5888
q_i	1	1	4	9	31	40	671
$p_i^2 - 77q_i^2$	-13	4	-7	4	-13	1	-13
i		7	8	9	10	11	12
a_i		1	3	2	3	1	16
p_i		6239	24605	55449	190952	246401	4133368
q_i		711	2804	6319	21761	28080	471041
$p_i^2 - 77q_i^2$		4	-7	4	-13	1	-13

Tabel 2 Een aantal gegevens bij de KBO van $\sqrt{77}$.

In deze tabel heeft $p_i^2 - 77q_i^2$ twee keer de uitkomst¹³³ 1, namelijk voor $i = 5$ en voor $i = 11$. Het valt op dat dit steeds gebeurt wanneer p_i en q_i de teller en noemer zijn van de convergent die ontstaat na afbraak voor het laatste wijzergetal uit de periode. In het geval van $N = \sqrt{77}$ is het laatste wijzergetal

¹³³ Hieruit volgt dus een Pell-vergelijking: $p_i^2 - 77q_i^2 = 1$.

van de periode een 16. Afbraak voor deze 16 geeft onder andere de volgende twee convergenten (die ook in de tabel staan):

$$\frac{p_5}{q_5} = \frac{351}{40} \vee \frac{p_{11}}{q_{11}} = \frac{246401}{28080}.$$

Van deze convergenten zijn de teller p_i en de noemer q_i de oplossing voor de vergelijking $x^2 - 77y^2 = 1$. Want als we $(x, y) = (p_i, q_i)$ van deze twee convergenten invullen zien we:

$$351^2 - 77 \cdot 40^2 = 123201 - 77 \cdot 1600 = 123201 - 123200 = 1$$

en

$$\begin{aligned} 246401^2 - 77 \cdot 28080^2 &= 60713452801 - 77 \cdot 788486400 \\ &= 60713452801 - 60713452800 = 1 \end{aligned}$$

Als we nu een volgende oplossing zoeken, kunnen we de tellers en noemers van de volgende vijf convergenten berekenen, als we aannemen dat de convergent die ontstaat na afbraak voor het laatste wijzergetal van de periode altijd een oplossing geeft. Dit zal echter zeer grote getallen leveren en dus veel rekenwerk kosten. Het kan ook op een andere manier. Als we één oplossing hebben, kunnen we via deze oplossing direct nieuwe oplossingen vinden. De stelling hieronder geeft deze manier en de stelling wordt daarna meteen bewezen.

Stelling: als $(x, y) = (s, t)$ is een oplossing van $x^2 - Ny^2 = 1$ met $x, y \in \mathbb{N}$, dan zijn $(x, y) = (m_p, n_p)$ ook oplossingen van $x^2 - Ny^2 = 1$ waarbij $(s + t\sqrt{N})^p = m_p + n_p\sqrt{N}$, met $p \in \mathbb{N}$.¹³⁴

We zullen dit bewijzen met volledige inductie.

¹³⁴ Het klopt toevallig ook voor $p = 0$, maar dat is niet zo interessant.

(IB) $p = 1$ geeft $(s + t\sqrt{N})^1 = s + t\sqrt{N}$. Dus $(x, y) = (s, t)$ zou een oplossing moeten zijn van $x^2 - Ny^2 = 1$. Dit klopt, want gegeven was dat $(x, y) = (s, t)$ een oplossing is.

(IH) Stel het klopt voor $p = k$. Hieruit volgt: $(s + t\sqrt{N})^k = m_k + n_k\sqrt{N}$, dus $(x, y) = (m_k, n_k)$ is een oplossing van $x^2 - Ny^2 = 1$.

(IS) We controleren: klopt het ook voor $p = k + 1$? $p = k + 1$ geeft:

$$(s + t\sqrt{N})^{k+1} = (s + t\sqrt{N})^k \cdot (s + t\sqrt{N}).$$

We kunnen in het rechterlid **(IH)** invullen, dit geeft voor het rechterlid:

$$(m_k + n_k\sqrt{N}) \cdot (s + t\sqrt{N}).$$

Vervolgens kunnen we het rechterlid uitwerken. Dit geeft:

$$m_k s + m_k t\sqrt{N} + n_k s\sqrt{N} + n_k tN = (m_k s + n_k tN) + (m_k t + n_k s)\sqrt{N}.$$

Dus $(x, y) = ((m_k s + n_k tN), (m_k t + n_k s))$ zou een oplossing moeten zijn van $x^2 - Ny^2 = 1$. Invullen van deze potentiële oplossing geeft:

$$\begin{aligned} (m_k s + n_k tN)^2 - N(m_k t + n_k s)^2 &= \\ m_k^2 s^2 + 2m_k n_k s tN + n_k^2 t^2 N^2 - N(m_k^2 t^2 + 2m_k n_k s t + n_k^2 s^2) &= \\ m_k^2 s^2 + 2m_k n_k s tN + n_k^2 t^2 N^2 - m_k^2 t^2 N - 2m_k n_k s tN - n_k^2 s^2 N &= \\ m_k^2 s^2 + n_k^2 t^2 N^2 - m_k^2 t^2 N - n_k^2 s^2 N. \end{aligned}$$

Dit kunnen we omschrijven:

$$\begin{aligned} m_k^2 s^2 + n_k^2 t^2 N^2 - m_k^2 t^2 N - n_k^2 s^2 N &= \\ s^2(m_k^2 - Nn_k^2) - Nt^2(m_k^2 - Nn_k^2) &= \\ (s^2 - Nt^2)(m_k^2 - Nn_k^2). \end{aligned} \tag{9}$$

Volgens **(IH)** is $(x, y) = (m_k, n_k)$ een oplossing van $x^2 - Ny^2 = 1$, dus:

$$m_k^2 - Nn_k^2 = 1. \tag{10}$$

Verder was gegeven dat $(x, y) = (s, t)$ ook een oplossing is van $x^2 - Ny^2 = 1$, dus:

$$s^2 - Nt^2 = 1. \quad (11)$$

Vergelijking (10) en (11) kunnen worden ingevuld in vergelijking (9). Dit geeft:

$$(s^2 - Nt^2)(m_k^2 - Nn_k^2) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Dus wanneer we $(x, y) = ((m_k s + n_k t N), (m_k t + n_k s))$ invullen in $x^2 - Ny^2 = 1$, komt hier daadwerkelijk 1 uit. De oplossing die volgt uit $(s + t\sqrt{N})^{k+1}$ klopt. Dus de stelling klopt voor $p = k + 1$.

Met volledige inductie hebben we nu bewezen dat de stelling geldt voor $p \in \mathbb{N}$.

□

Uit de bewezen stelling blijkt ook dat wanneer er eenmaal één oplossing $(x, y) = (s, t)$ voor $x^2 - Ny^2 = 1$ bestaat met $x, y \in \mathbb{N}$, er oneindig veel oplossingen zijn met $x, y \in \mathbb{N}$. Er is namelijk een oplossing voor elke $p \in \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ is oneindig.

Als we terugkijken naar ons voorbeeld met de Pell-vergelijking $x^2 - 77y^2 = 1$, kunnen met de met bewezen stelling een volgende oplossing vinden voor de vergelijking $x^2 - 77y^2 = 1$. Hiervoor gebruiken we

$$(s + t\sqrt{N})^p = m_p + n_p\sqrt{N}.$$

We vullen voor (s, t) de tweede gevonden oplossing in: $(s, t) = (246401, 28080)$ en voor p vullen we $p = 2$ in. ($p = 1$ zou de oplossing geven die we net zelf voor (s, t) hebben ingevuld.) Dit geeft:

$$\begin{aligned} (s + t\sqrt{N})^p &= (246401 + 28080\sqrt{77})^2 \\ &= 246401^2 + 2 \cdot 246401 \cdot 28080\sqrt{77} + (28080\sqrt{77})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 60713452801 + 13837880160\sqrt{77} + 788486400 \cdot 77 \\ &= 60713452801 + 60713452800 + 13837880160\sqrt{77} \\ &= 121426905601 + 13837880160\sqrt{77}. \end{aligned}$$

Dus $(m_p, n_p) = (121426905601, 13837880160)$. Dit zou ook een oplossing moeten zijn van $x^2 - 77y^2 = 1$. Als we de nieuw gevonden oplossing invullen krijgen we:

$$\begin{aligned} &121426905601^2 - 77 \cdot 13837880160^2 \\ &= 14744493403834165171201 - 77 \cdot 191486927322521625600 \\ &= 14744493403834165171201 - 14744493403834165171200 = 1 \end{aligned}$$

Dus de volgende gevonden oplossing klopt!

De Pell-vergelijking oplossen met behulp van convergenten

We hebben gezien dat we met behulp van de convergenten van de KBO van $\sqrt{77}$ een oplossing kunnen vinden voor de Pell-vergelijking $x^2 - 77y^2 = 1$ en dat we, als we eenmaal één oplossing gevonden hebben, gemakkelijk meer oplossingen kunnen berekenen. We hebben echter nog niet bewezen dat de Pell-vergelijking is op te lossen met behulp van convergenten en ook is het nog niet duidelijk waarom we juist de convergent die ontstaat na afbraak voor het laatste wijzergetal van de periode nodig hebben.

We zullen eerst nog een andere Pell-vergelijking bekijken, waarin we een convergent nodig hebben, die ontstaat na afbraak voor het laatste wijzergetal van de tweede periode (i.p.v. de eerste periode). Hierna zullen we bewijzen dat en hoe de Pell-vergelijking in het algemeen op te lossen is met behulp van convergenten van de KBO van $\sqrt{N}$.

We bekijken de volgende Pell-vergelijking: $x^2 - 13y^2 = 1$. Nu bekijken we de KBO van $\sqrt{13}$:

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 6}]$$

Voor $\sqrt{13}$ kunnen we net zo'n tabel maken als we voor $\sqrt{77}$ hadden gezien:

i	0	1	2	3	4	5
a_i	3	1	1	1	1	6
p_i	3	4	7	11	18	119
q_i	1	1	2	3	5	33
$p_i^2 - 13q_i^2$	-4	3	-3	4	-1	4

i	6	7	8	9	10
a_i	1	1	1	1	6
p_i	137	256	393	649	4287
q_i	38	71	109	180	1189
$p_i^2 - 13q_i^2$	-3	3	-4	1	-4

Tabel 3 Een aantal gegevens bij de KBO van $\sqrt{13}$.

Hieronder staat een deel van de tabel van $\sqrt{77}$ nog eens afgebeeld:

i	0	1	2	3	4	5	6
a_i	8	1	3	2	3	1	16
$p_i^2 - 77q_i^2$	-13	4	-7	4	-13	1	-13

i	7	8	9	10	11	12
a_i	1	3	2	3	1	16
$p_i^2 - 77q_i^2$	4	-7	4	-13	1	-13

Tabel 4 Een aantal gegeven bij de KBO van $\sqrt{77}$.

In de tabel van $\sqrt{77}$ zijn niet alleen de wijzergetallen periodiek, ook de uitkomsten van $p_i^2 - 77q_i^2$ lijken periodiek te zijn. In de tabel van $\sqrt{13}$ zit er ook een soort herhaling in de uitkomsten van $p_i^2 - 13q_i^2$, deze schelen alleen een factor -1 . Voor de vergelijking $x^2 - 13y^2 = 1$ bestaat er dus geen oplossing tussen de convergenten van de eerste periode, maar wel in de tweede periode.

Als we de KBO van $\sqrt{77}$ ($\sqrt{77} = [8; \overline{1,3,2,3,1,16}]$) en van $\sqrt{13}$ ($\sqrt{13} = [3; \overline{1,1,1,1,6}]$) met elkaar vergelijken zien we dat de lengte van de periode van de KBO van $\sqrt{77}$ even is en de lengte van de periode van de KBO van $\sqrt{13}$ oneven. Blijkbaar is er voor een Pell-vergelijking, waarbij de lengte van de periode van de KBO van $\sqrt{N}$ even is, handig om te kijken naar de convergent, die ontstaat na afbraak voor het laatste wijzergetal van de eerste¹³⁵ periode en is het voor een oneven lengte handig om te kijken naar de convergent, die ontstaat na afbraak voor het laatste wijzergetal van de tweede¹³⁶ periode.

Bewijs: Pell-vergelijking oplossen met behulp van convergenten

De veronderstelling uit het vorige hoofdstuk is hieronder als een stelling geformuleerd en wordt daarna bewezen.

Stelling 5: $x^2 - Ny^2 = 1$ heeft een oplossing voor $x = p_{n-1}$ en $y = q_{n-1}$ als a_n even is en voor $x = p_{2n-1}$ en $y = q_{2n-1}$ als a_n oneven is, waarbij p_i en q_i respectievelijk de teller en de noemer van de convergent van $\sqrt{N}$ zijn na afbreken van kettingbreukontwikkeling bij a_i , waarbij a_n het laatste getal van de periode van de kettingbreukontwikkeling die begint met a_0 van $\sqrt{N}$ is en waarbij N geen kwadraat is.

Drie stellingen die in dit PWS zijn bewezen zijn nodig voor het bewijs van de oplossing van de Pell-vergelijking met de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{N}$. Deze drie stellingen staan hieronder nog eens beschreven:

Stelling 1: $\sqrt{N}$ heeft een periodieke KBO met een periode van a_n , de periode begint meteen na a_0 met a_1 . Hierbij geldt dat $a_n = 2a_0$.

¹³⁵ Voor de kleinste oplossing. Voor andere oplossingen kan er ook nog volgende periodes worden gekeken.

¹³⁶ Voor de kleinste oplossing. Voor andere oplossingen kan er ook naar de 4^e, 6^e, 8^e, enz. periode worden gekeken. Dit wordt later toegelicht.

Stelling 2: p_i en q_i zijn respectievelijk de teller en de noemer van de convergent van de kettingbreuk $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ die ontstaat na afbreken bij a_i . Hierbij geldt voor $n \geq 2$:

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2} \\ q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2} \end{cases}$$

Stelling 3: De convergente stelling houdt in dat:

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n.$$

Voor het bewijs van de bovenstaande stelling bekijken we de KBO van $\sqrt{N}$. Volgens *stelling 1* geldt: $\sqrt{N} = [a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}]$ en $a_n = 2a_0$. Voor een zuiver¹³⁷ periodieke KBO kunnen we aan beide leden van de vergelijking a_0 optellen. a_0 , het eerste getal uit de KBO is een geheel getal dat voor de breuk staat, dus wanneer er een geheel getal bij de KBO wordt opgeteld, kan het hierbij worden opgeteld. Dit geeft:

$$\sqrt{N} + a_0 = [2a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}].$$

Gecombineerd met $a_n = 2a_0$ geeft dit:

$$\sqrt{N} + a_0 = [\overline{a_n; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}}].$$

De periode loopt nu tot aan a_{n-1} in plaats van tot aan a_n omdat a_n nu al aan het begin van de periode staat.

We noemen dit nieuwe getal α :

$$\alpha = \sqrt{N} + a_0 = [\overline{a_n; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}}].$$

De KBO van α kunnen we invullen in de KBO van $\sqrt{N}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{N} &= [a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}] = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, \overline{a_n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}}] \\ &= [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, \alpha]. \end{aligned}$$

¹³⁷ D.w.z. dat de gehele KBO in de periode valt.

Volgens *stelling 2* zijn de teller p en de noemer q van de convergent van de kettingbreuk die ontstaat na afbraak bij α , als volgt op te schrijven:

$$\begin{cases} p_\alpha = p_{n-1} \cdot \alpha + p_{n-2} \\ q_\alpha = q_{n-1} \cdot \alpha + q_{n-2} \end{cases}$$

Aangezien α oneindig is en de convergent na afbraak van α de gehele KBO van $\sqrt{N}$ bevat, geldt:

$$\sqrt{N} = \frac{p}{q} = \frac{p_{n-1} \cdot \alpha + p_{n-2}}{q_{n-1} \cdot \alpha + q_{n-2}}$$

Hierin kunnen we $\alpha = \sqrt{N} + a_0$ invullen:

$$\sqrt{N} = \frac{p}{q} = \frac{p_{n-1} \cdot \alpha + p_{n-2}}{q_{n-1} \cdot \alpha + q_{n-2}} = \frac{p_{n-1}(\sqrt{N} + a_0) + p_{n-2}}{q_{n-1}(\sqrt{N} + a_0) + q_{n-2}}$$

Wanneer we het meest- linker- en het rechterlid vermenigvuldigen met de noemer van de breuk uit het rechterlid krijgen we:

$$\sqrt{N} (q_{n-1}(\sqrt{N} + a_0) + q_{n-2}) = p_{n-1}(\sqrt{N} + a_0) + p_{n-2}.$$

Uitwerken en $\sqrt{N}$ afzonderen in het linkerlid geeft:

$$\sqrt{N} \cdot q_{n-1} \cdot a_0 + \sqrt{N} \cdot q_{n-2} - \sqrt{N} \cdot p_{n-1} = p_{n-1} \cdot a_0 + p_{n-2} - (\sqrt{N})^2 \cdot q_{n-1}.$$

$\sqrt{N}$ buiten haakjes halen geeft:

$$\sqrt{N} (q_{n-1} \cdot a_0 + q_{n-2} - p_{n-1}) = p_{n-1} \cdot a_0 + p_{n-2} - N \cdot q_{n-1}.$$

p_{n-1} , a_0 , p_{n-2} , N en a_{n-1} zijn rationeel, dus het rechterlid heeft een rationele uitkomst. Daarom moet het linkerlid ook rationeel zijn. $\sqrt{N}$ is irrationeel. De enige mogelijkheid dat het linkerlid ook rationeel is, is dat beide leden gelijk zijn aan 0.

Dus:

$$q_{n-1} \cdot a_0 + q_{n-2} - p_{n-1} = 0.$$

En

$$p_{n-1} \cdot a_0 + p_{n-2} - N \cdot q_{n-1} = 0.$$

Dit geeft:

$$q_{n-2} = p_{n-1} - q_{n-1} \cdot a_0.$$

En

$$p_{n-2} = N \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot a_0.$$

We kunnen de convergente stelling uit *lemma 3* herschrijven en de twee bovenstaande formules hierin invullen.

Dit is de convergente stelling:

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n.$$

We herschrijven hem nu (n wordt vervangen door $n - 2$), opdat de twee bovenstaande formules erin kunnen worden ingevuld:

$$p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^{n-2}.$$

Wanneer we de twee formules invullen krijgen we dit:

$$p_{n-1} \cdot (p_{n-1} - q_{n-1} \cdot a_0) - q_{n-1} \cdot (N \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot a_0) = (-1)^{n-2}.$$

Uitwerken geeft:

$$\begin{aligned} (p_{n-1})^2 - p_{n-1}q_{n-1} - N(q_{n-1})^2 + p_{n-1}q_{n-1} &= (-1)^{n-2} \\ &= (p_{n-1})^2 - N(q_{n-1})^2 = (-1)^{n-2}. \end{aligned}$$

Voor n is even en $x = p_{n-1}$ en $y = q_{n-1}$ geeft dit:

$$x^2 - Ny^2 = 1.$$

Voor n is oneven en $x = p_{2n-1}$ en $y = q_{2n-1}$ geeft dit:

$$(p_{2n-1})^2 - N(q_{2n-1})^2 = (-1)^{2n-2} = 1 \rightarrow x^2 - Ny^2 = 1.$$

En dit is precies wat we wilden bewijzen.

□

We hebben nu bewezen dat we met behulp van een convergent $\frac{x}{y}$ van $\sqrt{N}$ een oplossing (x, y) kunnen vinden voor de Pell-vergelijking $x^2 - Ny^2 = 1$. Hierbij is het duidelijk dat de oplossingen (x, y) steeds groter worden, naar mate er een convergent $\frac{x}{y}$ wordt gebruikt, die ontstaat na afbraak voor het laatste wijzergetal van een groter aantal periodes. Dus voor de kleinste oplossing voor de Pell-vergelijking, die gevonden kan worden met behulp van een convergent van $\sqrt{N}$, moet de eerst bruikbare convergent ($x = p_{n-1}$ en $y = q_{n-1}$ als a_n even is en $x = p_{2n-1}$ en $y = q_{2n-1}$ als a_n oneven is, zie de stelling op bladzijde 104) worden gebruikt. Er is echter nog niet bewezen dat er geen kleinere oplossing bestaat dan deze “kleinste” oplossing: Zijn er misschien ook andere oplossingen (x, y) van de Pell-vergelijking, waarbij $\frac{x}{y}$ géén convergent is van $\sqrt{N}$? Zou er zo’n andere oplossing bestaan, die kleiner is dan de kleinste oplossing, die berekend kan worden met behulp van een convergent van $\sqrt{N}$? Het antwoord op deze vragen is nee. Het bewijs hiervoor staat alleen niet in dit PWS. F. Beukers geeft hiervoor wel een bewijs.¹³⁸ Hierin beschrijft hij dat elke oplossing (x, y) van de Pell-vergelijking ook een convergent $\frac{x}{y}$ van $\sqrt{N}$ vormt. Wanneer we dat meenemen, kunnen we vaststellen dat de kleinste oplossing van een Pell-vergelijking kan worden berekend met behulp van de eerste bruikbare convergent. Ook de kleinste oplossing van het runderenprobleem van Archimedes kan dus worden gevonden met behulp van een convergent.

¹³⁸ Beukers, F. (1999). Getaltheorie voor beginners. Amsterdam: Epsilon Uitgaven. Hoofdstuk 14 en 15.

Terug naar het runderenprobleem

De vergelijking waarmee we waren geëindigd tijdens het oplossen van het runderenprobleem was de volgende:

$$m^2 = 410.286.423.278.424 \cdot p^2 + 1.$$

Hierbij was het nodig een p te vinden waarvoor de vergelijking voldoet. De vergelijking kan worden omgeschreven tot een Pell-vergelijking:

$$m^2 - 410.286.423.278.424 \cdot p^2 = 1$$

Deze vergelijking kan worden opgelost met een convergent van de KBO¹³⁹ van $\sqrt{410.286.423.278.424}$. De kleinste oplossing van p is een enorm groot getal, waarvan het niet veel toevoegt om deze in dit PWS te noteren. Het PWS zou dan voor zeer groot deel uit pagina's met enkel cijfers bestaan, die samen de kleinste oplossing van p vormen. Daarom worden ook de aantallen van de verschillende groepen runderen en koeien niet in dit PWS genoemd. Gelukkig zijn we niet zo zeer geïnteresseerd in het antwoord zelf, maar des te meer in hoe we tot het antwoord zouden kunnen komen.

De kleinste waarde voor p is een getal dat bestaat uit 103266 cijfers. Met dit getal p kan de variabele n worden berekend met behulp van vergelijking 8:

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot p^2 = 4.456.749 \cdot p^2. \quad (8)$$

Met deze n zijn de aantallen stieren en koeien te berekenen:

W	witte stieren:	$10.366.482 \cdot n$	w	witte koeien:	$7.206.360 \cdot n$
D	donkere stieren:	$7.460.514 \cdot n$	d	donkere koeien:	$4.893.246 \cdot n$
G	gevlekte stieren:	$7.358.060 \cdot n$	g	gevlekte koeien:	$3.515.820 \cdot n$
B	blonde stieren:	$4.149.387 \cdot n$	b	blonde koeien:	$5.439.213 \cdot n$

¹³⁹ Ik heb een programmaatje geschreven om de KBO van $\sqrt{410.286.423.278.424}$ te bepalen (zie Bijlage 1 op bladzijde 99). Het antwoord besloeg zo'n 179 A4'tjes (een groter formaat dan dit PWS). Ik vond het niet interessant genoeg om de KBO aan dit PWS toe te voegen.

Hier komt o.a. uit dat $W = 1598 \dots$, waarbij op de puntjes nog 206541 cijfers horen te staan (dus $W = 1,598 \cdot 10^{206544}$). Het totaal aantal runderen bestaat uit 206545 cijfers en begint met 7766 (dus de oplossing is $7,766 \cdot 10^{206545}$).¹⁴⁰

Hiermee is het probleem, “Hoeveel runderen heeft Helios?”, ongeveer opgelost en kunnen wij onszelf beschouwen als *wijs*.

¹⁴⁰ Als Thrinakia, het eiland waar Helios zijn runderen liet grazen, zou verwijzen naar Sicilië, dat een oppervlakte heeft van ongeveer 25.700 km², zou Sicilië dus bedolven zijn onder de runderen...

D E E L I V

Slot

Lekensamenvatting

In dit PWS draaide het om de volgende vraag: “Hoe kan een oplossing voor het runderenprobleem uit de tekst *Πρόβλημα* (probleem) van Archimedes worden gevonden?”

Archimedes was een Oudgriekse geleerde en leefde waarschijnlijk van 287 tot 212 v.Chr. Hij werd geboren in Syracuse en heeft hier gewoond totdat hij naar Alexandrië trok om daar te studeren. Hij stierf in zijn geboortestad toen de Romeinen deze stad veroverden. Zijn gedicht *Πρόβλημα* schreef hij in een brief aan Eratosthenes, het hoofd van de Alexandrijnse Bibliotheek. Eratosthenes was een wiskundige, die Archimedes leerde kennen in Alexandrië. In het gedicht daagt Archimedes Eratosthenes uit met een wiskundig raadsel over het aantal runderen van Helios. Helios is in de Griekse mythologie de Zonnegod. Deze god bezit een grote kudde runderen, die ook genoemd worden in de Odyssee van Homerus. Bij het wiskundige raadsel van Archimedes is het de vraag hoeveel runderen Helios precies bezit. Het gedicht bevat een ingewikkeld wiskundig probleem, maar ook literair gezien is het een goed stuk.

Vervolgens was mijn vertaling van de 44 regels lange tekst en de inleiding weergegeven. Uit de inleiding bleek dat het gedicht de vorm van een brief had. Archimedes begon zijn gedicht met de introductie van het wiskundige probleem: hoeveel runderen heeft Helios? Hij geeft aan dat het hier niet om een simpel raadseltje gaat. Wat betreft de runderen maakt Archimedes onderscheid tussen vier verschillende vachttypes (wit, donker, blond en gevlekt) en tussen het geslacht van de runderen (stieren en koeien). Vervolgens geeft hij in woorden enkele informatie over de verhoudingen tussen de aantallen runderen van de verschillende groepen. Deze informatie kan in wiskundige vergelijkingen worden gezet en hiermee kan het eerste wiskundige raadsel worden opgelost. Archimedes meent dat dit eerste raadsel nog niet moeilijk genoeg is om een oplosser van het raadsel wijs te

kunnen noemen. Hij geeft daarom nog een uitgebreide versie van hetzelfde probleem mee. Als je deze ook kan oplossen, kun je jezelf wijs noemen.

In het laatste deel van dit PWS zijn beide problemen behandeld. Van het eerste probleem is de kleinste oplossing berekend door de wiskundige vergelijkingen over de aantallen op te lossen: het totaal aantal runderen is bij de kleinste oplossing gelijk aan 50.389.082 runderen. Dit zijn heel wat meer runderen dan de 350 runderen die in de Odyssee van Homerus genoemd worden. Het oplossen van het uitgebreide probleem was een uitgebreider proces dan het oplossen van het eerste probleem. De kleinste oplossing van de uitgebreide versie van het probleem is dan ook veel groter: het kleinste totaal aantal runderen is gelijk aan een getal dat bestaat uit 206545 cijfers. Deze oplossing is niet weergegeven in dit PWS, omdat het PWS dan grotendeels uit pagina's met enkel cijfertjes zou bestaan. Het is interessant dat Archimedes een raadsel heeft bedacht, dat in zijn tijd onmogelijk opgelost zou kunnen worden: het antwoord is een enorm groot getal, dat berekend moet worden met een supercomputer.

Interessante samenvatting

Deze samenvatting gaat verder in op de Lekensamenvatting en kan dus als een aanvulling worden gezien bij de vorige samenvatting.

Archimedes heeft in zijn gedicht niet alleen een moeilijk wiskundig raadsel beschreven. De tekst heeft ook een literair goed uitgedachte laag. In het gedicht wordt bijvoorbeeld veelvuldig verwezen naar Homerus, waaruit de geleerdheid van Archimedes blijkt. Zo komen de runderen van Helios (waar het wiskundige raadsel over gaat) uit de Odyssee, een verhaal dat geschreven is door Homerus. Daarnaast is de opbouw van de eerste zin van het gedicht van Archimedes gebaseerd op de eerste zin uit de Odyssee. Verder heeft Archimedes aan aantal Homerus-specifieke stijlkenmerken gebruikt, zoals het gebruik van bepaalde afwijkende uitgangen (-οιο uitgang in plaats van de gebruikelijke genitivus uitgang -ου en -εσσιν in plaats van de dativusuitgang -σι(ν)), niet-gecontraheerde vormen en het toevoegen van extra medeklinkers, opdat het metrum over de regel past. Het gedicht is namelijk ook in een metrum geschreven: een elegisch distichon, een combinatie van een dactylische hexameter en een dactylische pentameter. Om deze redenen is Archimedes in mijn ogen geslaagd om zijn gedicht over een wiskundig probleem een grote literaire waarde te geven. Zowel een elegie als een epigram werden in een elegisch distichon geschreven, maar bij een epigram is het literaire aspect minder belangrijk dan bij een elegie. Daarom zou ik *Πρόβλημα* binnen de Oudgriekse poëzie een elegie willen noemen.

In de Griekse tekst wordt onderscheid gemaakt tussen acht verschillende soorten runderen (twee geslachten en vier vachttypen). Bij deze acht variabelen werden vervolgens zeven lineaire vergelijkingen gegeven. De acht onbekenden met de zeven formules vormden het eerste probleem. Wanneer je in staat bent om dit probleem op te lossen, ben je volgens Archimedes niet onwetend met aantallen, maar je bent nog niet wijs te noemen. Je bent pas echt wijs als je ook het uitgebreide probleem kunt

oplossen. Hiervoor worden er naast de zeven vergelijkingen uit het eerste probleem nog twee extra eisen gegeven, waaraan de oplossing moet voldoen.

Dit zijn de zeven vergelijkingen wat betreft de stieren en de koeien die uit de Griekse tekst zijn op te maken en het eerste probleem vormen:

$$8. \quad W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) D + B$$

$$9. \quad D = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) G + B$$

$$10. \quad G = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + B$$

$$11. \quad w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (D + d)$$

$$12. \quad d = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (G + g)$$

$$13. \quad g = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (B + b)$$

$$14. \quad b = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (W + w)$$

Hierbij staan de letters voor de volgende groepen runderen (Het verschil tussen een hoofdletter en een kleine letter is hierbij relevant):

W = witte stieren

D = donkere stieren

B = blonde stieren

G = gevlekte stieren

w = witte koeien

d = donkere koeien

b = blonde koeien

g = gevlekte koeien

Uit de vergelijkingen over de stieren kunnen drie verbanden gevonden worden, namelijk tussen W en B , tussen D en B en tussen G en B :

$$W = \frac{2226}{891} B \quad D = \frac{1602}{891} B \quad G = \frac{1580}{891} B.$$

Wanneer deze vergelijkingen worden ingevuld in de vergelijkingen over de koeien, worden ook de verhoudingen tussen de groepen koeien en de blonde stieren (B) duidelijk:

$$w = \frac{7.206.360}{4657 \cdot 891} B \quad d = \frac{4.893.246}{4657 \cdot 891} B \quad g = \frac{3.515.820}{4657 \cdot 891} B \quad b = \frac{5.439.213}{4657 \cdot 891} B.$$

Uit de noemers van deze verbanden blijkt dat B een 891- en een 4657-voud moet zijn (dan valt de noemer namelijk weg en bevat de oplossing enkel

natuurlijke getallen, wat bij dit probleem vereist is). De oplossing van het eerste probleem is dus (hierbij geldt $n \in \mathbb{N}$):

$$(W, D, G, B) = n \cdot (10.366.482, 7.460.514, 7.358.060, 4.149.387)$$

$$(w, d, g, b) = n \cdot (7.206.360, 4.893.246, 3.515.820, 5.439.213).$$

Voor het uitgebreide probleem worden de volgende twee eisen aan de vorige zeven vergelijkingen toegevoegd:

- $W + D = k^2$
- $B + G = \frac{1}{2}k(k + 1)$

De oplossing van het eerste probleem geldt ook voor dit probleem en kan dus in deze twee vergelijkingen worden ingevuld. Omdat $W + D$ een kwadraat is, komen alle priemfactoren van $W + D$ een even aantal keer voor. Hieruit kan een conclusie getrokken worden over de vorm van n .

$$\begin{aligned} W + D &= n \cdot 4657 \cdot (2226 + 1602) = \\ n \cdot 4657 \cdot 3828 &= n \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 = k^2. \end{aligned}$$

Dus

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot p^2 = 4.456.749 \cdot p^2.$$

De tweede vergelijking kan worden omgeschreven:

$$\begin{aligned} B + G = \frac{1}{2}k(k + 1) &\rightarrow 8(B + G) = 4k(k + 1) = 4k^2 + 4k \rightarrow \\ 8(B + G) + 1 &= 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2. \end{aligned}$$

Hierin kan de oplossing van het eerste probleem worden ingevuld. Daarbij kunnen we $(2k + 1)^2$ beschouwen als een kwadraat, dat we m^2 noemen:

$$8(n \cdot 4657 \cdot (1580 + 891)) + 1 = 8 \cdot n \cdot 4657 \cdot 2471 + 1 = m^2.$$

Vervolgens kan de vorm van n hierin worden ingevuld:

$$410.286.423.278.424 \cdot p^2 + 1 = m^2.$$

Deze vergelijking kan worden omgeschreven tot een Pell-vergelijking:

$$m^2 - 410.286.423.278.424 \cdot p^2 = 1$$

Om het uitgebreide probleem op te lossen moeten er paren van (p, m) worden gevonden (met $p, m \in \mathbb{N}$), waarvoor de bovenstaande vergelijking klopt. Met zo'n p kan een mogelijke n berekend worden. Wanneer deze n in de oplossing van het eerste probleem wordt ingevuld, is de oplossing van het uitgebreide probleem gevonden.

Om paren (p, m) te vinden wordt gebruik gemaakt van de kettingbreukontbinding (KBO) van $\sqrt{410.286.423.278.424}$. Deze kettingbreuk is repeterend en het laatste wijzergetal van de periode is twee keer zo groot als het eerste wijzergetal van de KBO volgens stelling 1 (bewezen op bladzijde 81):

Stelling 1: $\sqrt{N}$ heeft een periodieke KBO met een periode van a_n , de periode begint meteen na a_0 met a_1 . Hierbij geldt dat $a_n = 2a_0$.

Van deze kettingbreukontwikkeling wordt een bepaalde convergent gebruikt om de Pell-vergelijking op te lossen. Wat betreft convergenten zijn de volgende twee stellingen bewezen in dit PWS (op respectievelijk bladzijde 91 en bladzijde 93).

Stelling 2: p_i en q_i zijn respectievelijk de teller en de noemer van de convergent van de kettingbreuk $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ die ontstaat na afbreken bij a_i . Hierbij geldt voor $n \geq 2$:

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2} \\ q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2} \end{cases}$$

Stelling 3: De convergenten-stelling houdt in dat:

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n.$$

Vervolgens is bewezen dat de Pell-vergelijking is op te lossen met behulp van convergenten (voor het bewijs zie bladzijde 104):

***Stelling 5:** $x^2 - Ny^2 = 1$ heeft een oplossing voor $x = p_{n-1}$ en $y = q_{n-1}$ als a_n even is en voor $x = p_{2n-1}$ en $y = q_{2n-1}$ als a_n oneven is, waarbij p_i en q_i respectievelijk de teller en de noemer van de convergent van $\sqrt{N}$ zijn na afbreken van kettingbreukontwikkeling bij a_i , waarbij a_n het laatste getal van de periode van de kettingbreukontwikkeling die begint met a_0 van $\sqrt{N}$ is en waarbij N geen kwadraat is.*

De kleinste oplossing van $m^2 - 410.286.423.278.424 \cdot p^2 = 1$ brengt ons naar de oplossing van het uitgebreide probleem. De oplossing van deze Pell-vergelijking is echter zo groot, dat hij niet is weergegeven in dit PWS (anders zou het PWS voor een groot deel uit enkel cijfertjes bestaan die samen de oplossingen vormen). Het totaal aantal runderen is namelijk gelijk aan een getal dat begint met 7766... , waarbij op de puntjes nog 206541 cijfers horen te staan.

Als Archimedes zou menen dat je alleen wijs kunt zijn, wanneer je zijn uitgebreide versie van het raadsel kunt oplossen, is het maar de vraag of er in de oudheid in de ogen van Archimedes wijze mensen kunnen zijn geweest.

Ondanks dat het volledige antwoord van het probleem niet in dit PWS beschreven staat, vind ik dat een lezer, die dit PWS kon volgen, zichzelf ook als wijs mag beschouwen.

Nawoord

Ik vond het erg leuk om dit profielwerkstuk te schrijven. Toen ik uiteindelijk een goed onderwerp had en de hoofd- en deelvragen duidelijk waren, ging de rest vrij snel. Eerst had ik een planning, maar de planning hield me op: ik was veel te enthousiast en wilde verder werken. Ik besloot dat ik geen planning nodig had en dat ik als ik voor de zomervakantie een basis had, het wel goed zou komen. De 80 verplichte studielasturen waren totaal geen probleem: ik heb ongeveer 180 uur aan dit profielwerkstuk gewerkt en ik vond het erg leuk om al die tijd met dit interessante onderwerp bezig te zijn.

Ik vond het heel fijn om alleen te werken. Ik hoefde namelijk met niemand te overleggen of op iemand te wachten: ik kon alles zelf beslissen en eraan werken wanneer, hoe vaak en hoe lang ik maar wilde. Ook vond ik het fijn om mijn profielwerkstuk over twee vakken te doen. Op deze manier kon ik de twee verschillende delen afwisselen en werd het niet te eentonig om er een paar uur aan te werken.

Ik heb veel geleerd tijdens het schrijven van dit profielwerkstuk. Het wiskundige onderwerp was helemaal nieuw voor mij en ik had ook nog nooit een Griekse tekst geanalyseerd zoals ik voor dit profielwerkstuk heb gedaan. Daarnaast heb ik voor de eerste keer een programma in Python geschreven. Ondanks dat ik Engels erg moeilijk vind, heb ik wel een Engelse bron gebruikt. Ten slotte heb ik in mijn enthousiasme veel vragen gesteld en om hulp gevraagd, iets wat ik van nature niet zoveel doe. Ik heb zelfs naar een professor gemaïld, die ik niet kende, om hulp te vragen bij het begrijpen van een wiskundig stukje voor mijn bewijs.

Mijn profielwerkstuk telt vele pagina's en ik ben trots op hen allemaal.

Bronvermelding (Grieks)

Heath, J.I. (1817). *The Cattle Problem*. Uit *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications. pp. 16, 34.

<https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.133665/page/n11>

Sir Heath, T. (1921). *The Cattle Problem*. Uit *A History of Greek Mathematics – From Aristarchus to Diophantus, Volume II*. Oxford: The Clarendon Press. pg. 16. <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.161062/page/n25>

Heiberg, J. L. (1881). *Archimedis opera omnia cum commentarris eutocia volume 2*. Leibzich: B. G. Teubner. pp. 448, 450.

https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Cattle/Statement_text.html

Lessing, G. E. (1773). *Zur Geschichte und Literatur - Aus den Schätzen der Herzoglichen*. Braunschweig: Zweiter Beitrag (Bibliothek zu Wolfenbüttel) pp. 423-424.

https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Cattle/Statement_Lessing_graphic.html

Napolitani, P. D. (2006). *Archimedes: voorloper van de moderne wetenschap (wetenschappelijke biografie)*. Amsterdam: Natuurwetenschap & Techniek.

Phil, M. (2013). *Counting on Epic: Mathematical Poetry and Homeric Epic in Archimedes' Cattle Problem*.

<https://pdfs.semanticscholar.org/dc28/f9caa3707b35b629242a1b76be88512af623.pdf>

Vardi, I. (2000). *Archimedes' Cattle Problem*. Los Angeles: Occidental College https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Cattle/cattle_vardi.pdf

Sir Heath, T. L. (1920). *Archimedes – Pioneers of Progress*. London: Society for Promoting Christian Knowledge; New York: Macmillan

<https://archive.org/details/b29930509/page/n7>

Bronvermelding (wiskunde)

Beukers, F. (2011). *Kettingbreuken – Masterclass Kettingbreuken*.

<https://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/MasterclassKettingbreuken>

Beukers, F. (2013). *Elementary number theory*. pp. 90-91.

<http://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/getaltheorie/getalscript.pdf>

Beukers, F. (2015). *Getaltheorie - Een inleiding*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven. pp. 127-157.

<http://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/getaltheorie/Hoofdstuk16.pdf>

Dhr. dr. Bosma, W. (2005) Hoofdstuk 1. *Kettingbreuken*. Uit *Computer Algebra*. pp. 3-22. <https://www.math.ru.nl/~bosma/wbpub.html>

Hart, K. P. (2018). *Archimedes: de runderen van de zonnegod*. Uit *Pythagoras – Wiskundetijdschrift voor jongeren – april: 57*. Amsterdam: Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG). pp. 18-22.

Heath, J.I. (1817). *The Cattle Problem*. Uit *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications. pp. 319-326.

<https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.133665/page/n497>

Sir Heath, T. (1921). *The Cattle Problem*. Uit *A History of Greek Mathematics – From Aristarchus to Diophantus, Volume II*. Oxford: The Clarendon Press. pp. 97-98.

<https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.161062/page/n109>

Hugenholtz, L.M. (2006) *De geschiedenis van de vergelijking van Pell*.

<https://www.math.leidenuniv.nl/scripties/Hugenholtz.pdf>

Jr, H.W. Lenstra. (2002) *Solving the Pell Equation*. Uit *Notices of the AMS (American Mathematical Society) – Volume 49, number 2*, pp. 183-192.

<https://www.ams.org/notices/200202/fea-lenstra.pdf>

Keune, F. (2010). *H18.3: Kettingbreukontwikkelingen van reële kwadratische getallen & H18.4: De vergelijking van Pell*. Uit *Getallen*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

<https://www.math.ru.nl/~keune/Getallen/Getallense111.xht>

Kindt, M. & Lemmens, P. (2011). *Ontwikkelen met Kettingbreuken (Zebra-reeks 33)*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Thomas, I. (1941). *Greek Mathematical Works – Aristarchus to Pappus*. Harvard: University Press. pp. 202-207.

Bijlage 1: Eigen programmacode voor de kleinste oplossing van een Pell-vergelijking

Deze code heb ik zelf geschreven in de programmeertaal Python. Hieronder staat steeds een stukje code met een zwarte achtergrond afgebeeld met daarna een toelichting bij de code.

```
import math
print("Kettingbreukontwikkeling van wortel N")
print("Oplossing Pell-vergelijking:  $x^2 - N y^2 = 1$ ")
N = input("N: ")
N = int(N)
KBO = []

if math.sqrt(N)-math.floor(math.sqrt(N)) == 0:
    print("N is een kwadraat. Wortel N =", int(math.sqrt(N)))
```

In het eerste stukje wordt er gevraagd om een N in te voeren. Van de wortel van deze N wordt straks de kettingbreukontwikkeling berekend om de Pell-vergelijking $x^2 - Ny^2 = 1$ op te lossen. Deze vergelijking heeft geen natuurlijke oplossingen als N een kwadraat is. Dus als de ingevoerde N een kwadraat is (dus $\sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor = 0$) wordt de wortel hiervan weergegeven en de berekening gestopt.

```
else:
    a = math.sqrt(N)
    b = math.floor(a)
    KBO.append(b)
    a = 1/(a-b)
    b = math.floor(a)
    KBO.append(b)

    c = 1/(a-b)
    d = math.floor(c)

    while math.fabs(a-c) > (10 ** -6):
        KBO.append(d)
        c = 1/(c-d)
```

```
d = math.floor(c)

print("KBO", N, ":", KBO)
```

In dit stukje wordt de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{N}$ berekend. Dit gaat ongeveer op deze manier als de manier waarop we op blz. ... de KBO van π hadden benaderd:

- We nemen eerst $a = \sqrt{N}$.
- Vervolgens berekenen we de *entier*¹⁴¹ hiervan ($b = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$).
- Dit is het eerste wijzergetal en deze wordt daarom aan de KBO toegevoegd.
- Daarna bekijken we de omkering van het verschil van a en b . Deze omkering is gelijk aan de omkering van de eerste rest en zullen we onthouden. Wanneer dit getal terugkomt weten we namelijk dat we aan zijn gekomen bij de tweede periode en kunnen we stoppen met het berekenen van nieuwe wijzergetallen, aangezien deze allemaal al bekend zijn.
- Van deze omkering berekenen we weer de *entier*.
- Dit is het volgende wijzergetal, deze wordt ook aan de KBO toegevoegd.
- Vervolgens nemen we weer de omkering van het verschil van rest en het volgende wijzergetal. Hiervan berekenen we de *entier* en deze voegen we toe aan de KBO.
- Dit trucje blijven we toepassen totdat de omkering van de eerste rest (ongeveer¹⁴²) weer terugkomt.

```
g = int(len(KBO))
if ((g % 2) == 0):                # als g is even
    w = 1
    while w <= (g-1):            # tweede periode wordt
toegevoegd.
```

¹⁴¹ De *entier* van x ($\lfloor x \rfloor$) is het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan x .

¹⁴² Ongeveer, want de computer rekt niet met breuken, maar met getallen met cijfers achter de komma. Door het delen neemt de precisie van de waarden af en is het niet mogelijk om de omkering van de eerste rest *precies* nog een keer tegen te komen.

```
KBO.append(KBO[w])
w += 1
g = int(len(KBO))
```

In dit stukje wordt, wanneer het aantal wijzergetallen van de KBO even is, een extra periode aan wijzergetallen toegevoegd aan de KBO (deze bevat nu dus twee periodes aan wijzergetallen).

```
p = []
q = []

p.append(KBO[0])          # p[0] = KBO[0]
q.append(1)               # q[0] = 1

r = p[0] * KBO[1] + 1     # p[1] = p[0] * KBO[1] + 1
p.append(r)
s = q[0] * KBO[1]         # q[1] = q[0] * KBO[1]
q.append(s)

i=2
while i < g:
    r = p[i-1] * KBO[i] + p[i-2]          # p[n] = p[n-1] *
    KBO[n] + p[n-2]
    p.append(r)
    s = q[i-1] * KBO[i] + q[i-2]          # q[n] = q[n-1] *
    KBO[n] + q[n-2]
    q.append(s)
    i += 1

print("p:", p)
print("q:", q)
```

Vervolgens worden er convergenten berekend met behulp van de volgende formules:

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1 = p_0 a_1 + 1 \\ q_1 = q_0 a_1 \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2} \\ q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2} \end{cases}$$

```
x = p[g-2]
y = q[g-2]
print("x =", x)
```

```

print("y =", y)

s = x ** 2 - N * y ** 2
print("check: x^2 - N y^2 =", s)

if (s == 1):
    print("Het klopt!")
else:
    print("Het klopt niet: Error")

```

In het laatste stukje gebruiken we de teller en noemer van de convergent, die ontstaat na afbraak voor het laatste wijzergetal (van de eerste periode bij een KBO met een even lengte en van de tweede periode bij een KBO met een oneven lengte ¹⁴³). De teller en de noemer worden ingevuld in de Pell-vergelijking, die opgelost moest worden, om te checken of de gevonden waarden daadwerkelijk kloppen.

Dit is wat het programma geeft, wanneer voor N 77 wordt ingevoerd:

```

Kettingbreukontwikkeling van wortel N
Oplossing Pell-vergelijking: x^2 - N y^2 = 1

N: 77
KBO 77 : [8, 1, 3, 2, 3, 1, 16]

p: [8, 9, 35, 79, 272, 351, 5888]
q: [1, 1, 4, 9, 31, 40, 671]

x = 351
y = 40

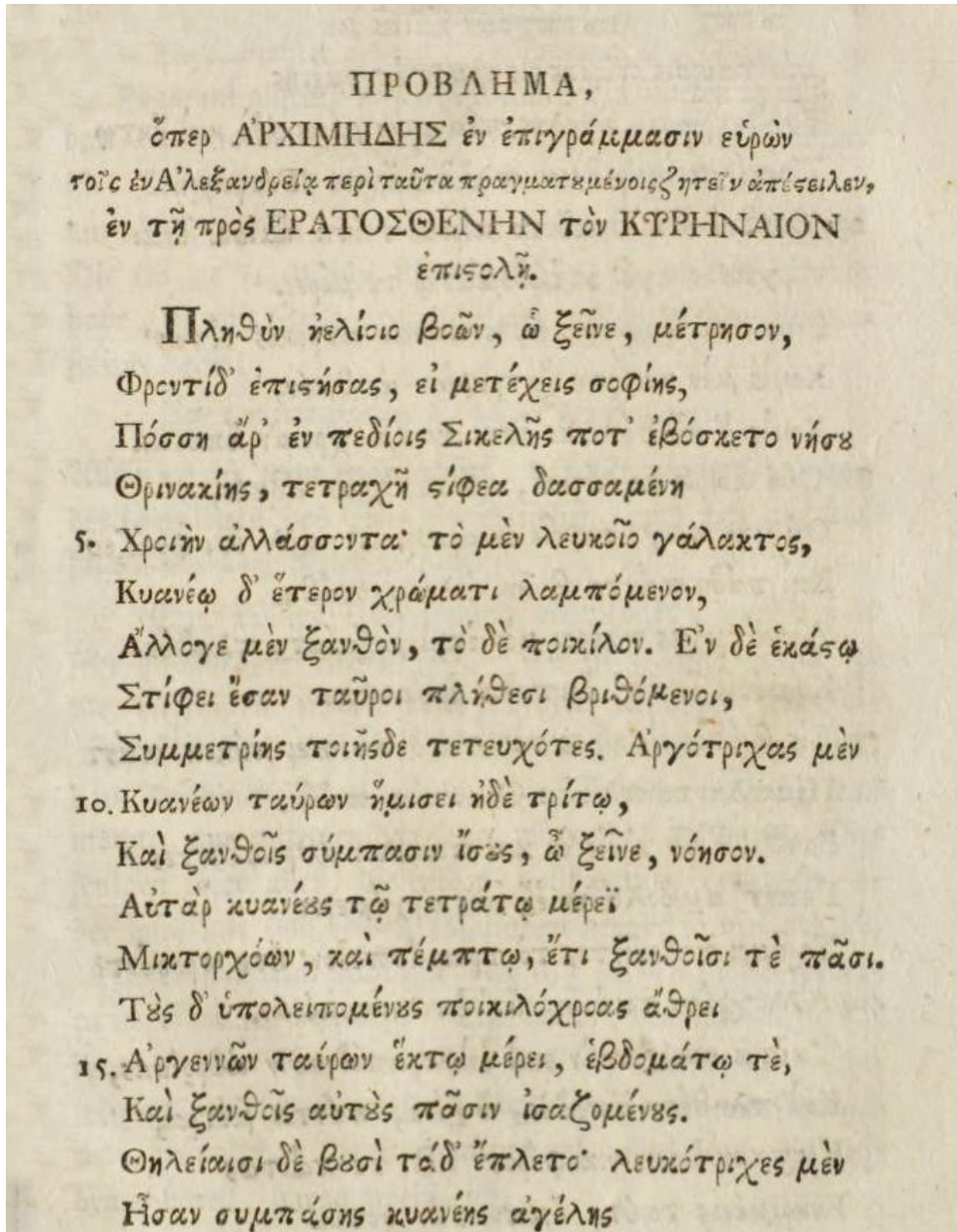
check: x^2 - N y^2 = 1
Het klopt!

Process finished with exit code 0

```

¹⁴³ Dit is al in het programma verwerkt: als er moet worden gekeken naar de tweede periode, dan is deze aan de KBO toegevoegd.

Bijlage 2: Transcriptie van de Griekse tekst Προβλημα



- Τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκέες ἴσαι.
 20. Αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τὲ πάλιν
 Μικτροχόων καὶ πέμπτῳ ὁμῶς μέρει ἰσάζοντο,
 Σὺν ταύροις πάσης εἰς νομὸν ἐρχομένης.
 Ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἑκτῷ
 Ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον. Τετραχῇ
 25. Ξανδοὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτης ἡμίσει ἴσαι
 Ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τὲ μέρει.
 Ξεῖνε, σὺ δ' ἡελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκέες εἰπὼν·
 Χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
 Χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χοροῖαν ἔκασται.
 30. Οὐκ αἰδρὶς κε λέγοι', εἰδ' ἀριθμῶν αἰδαῖς,
 Οὐ μὲν παύγε σοφοῖς ἐν ἀριθμοῖς· ἀλλ' ἴθι φράζεο
 Καὶ τάδε πάντα βοῶν ἡελίοιο πάθη.
 Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαῖατο πληθύν
 Κυανέοις ἴσαντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
 35. Εἰς βάθος εἰς εὖρος τὲ· τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντα
 Πίμπλαντο πλίνθι Θρινακίης πεδία.
 Ξανδοὶ δ' αὖ τ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
 Ἰσαντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
 Σχῆμα τελειῶντες τὸ τρικράσπεδον· ἔτε προσέντων
 40. Ἀλμοχρόων ταύρων, ἔτ' ἐπιλειπομένων.
 Ταῦτα συνεξευράν καὶ ἐνὶ πραιπίδεσσιν ἀθροίσας,
 Καὶ πληθέων ἀποδῆς, ὦ ξεῖνε, πάντα μέτρα,
 Ἐρχεο κυδιόων νικηφόρος· ἴσθι τε πάντως
 Κεκριμένος ταύτῃ ὀμπνιος ἐν σοφίῃ.

