Profielwerkstuk

Deze Titel is Onwaar

Een Introductie tot de Formele Logica

Door
Daan F.P. Hoogcarspel

Zaanlands Lyceum

Begeleider
Wouter Warmerdam

Januari 2021

Voorwoord

Dit boekje over de formele logica is tot stand gekomen als profielwerkstuk voor het VWO. Ik heb veel plezier gehad om het te maken en ik heb veel kennis opgedaan, niet alleen over formele logica zelf.
Ik wil nog twee mensen bedanken. Ten eerste wil ik mijn begeleider Wouter Warmerdam bedanken. Toen ik met het onderwerp formele logica kwam was het zijn suggestie om hier een lessenserie of lesboekje van te maken. Achteraf ben ik enorm blij dat ik deze richting op ben gegaan met dit onderwerp. Ook heeft hij me voorzien van een hoop goede feedback. Verder wil ik Joris Klaasse Bos bedanken voor het lezen van het werk, het geven van feedback en het fungeren als voorbeeld voor een aantal logische redenaties. Ook heeft hij me de suggestie gedaan LaTeXte leren, het systeem waarmee dit boekje is vormgegeven. Zonder dit zetsysteem had ik dit boekje nooit kunnen maken.

Inhoudsopgave

1 Introductie

Logica heeft alles te maken met redeneren. Vragen als: wat volgt uit wat? Als ik informatie gegeven krijg, welke conclusies die ik daaruit trek zijn dan juist?
De logica is een onderwerp dat binnen meerdere vakgebieden kan worden geplaatst. Logica wordt bijvoorbeeld toegepast in de filosofie om na te gaan of conclusies binnen de filosofie wel volgen uit de informatie waarmee men begint. Bij het vak Nederlands leer je over drogredenen zoals cirkelredeneringen en andere begrippen van die soort. Dit soort onderwerpen hebben allemaal te maken met de logica. Aangezien dit allemaal gebeurt in het hoofd noemen we dit informele logica.
Wanneer argumentaties complex worden en het te lastig is om de logica in het hoofd te bestuderen, is het nuttig om gebruik te maken van wiskundige symbolen: een formeel systeem. Dit is ook het geval met de wiskunde. Simpele berekeningen kan je in het hoofd uitvoeren, maar wanneer de problemen lastiger worden kan je niet om het gebruik van een formele taal heen. Precies zo is het ook met de logica. Het is ook zo dat de spreektaal onnauwkeurig is in het uitdrukken van logische relaties, er is spraken van ambiguïteit, of dubbelzinnigheid. Door de onnauwkeurigheid van de spreektaal treden er ook snel paradoxen op zoals in de titel van dit boekje. Al met al is het formaliseren van redenatie een compleet logische conclusie van deze problemen. Zo'n formalisatie, – een systeem met wiskundige symbolen en starre regels – noemen we formele logica, of wiskundige logica.
Haskell Curry omschrijft formele logica als volgt:

'Formele logica, is een tak van de wiskunde die zich grotendeels hetzelfde verhoudt tot het analyseren en het bekritiseren van het denken als hoe de meetkunde zich verhoudt tot de wetenschap van de ruimte.' (Curry, 1963, p.2)

1.1 Wat ga je leren?

In dit boekje ga je kennis maken met de formele logica. De eerste paar paragrafen vallen wellicht nog een beetje onder de informele logica, maar er worden begrippen behandeld die essentieel zijn voor de hoofdstukken erna.
De behandeling van de formele logica begint met de propositielogica. De propositielogica gaat over de logische verhoudingen tussen zinnen die proposities als 'de zon schijnt' uitdrukken. Hier komt ook de bewijsboomtechniek aan bod, deze bewijsboomtechniek zal door het hele boekje worden gebruikt om logische argumentaties te bewijzen.
Na de propositielogica wordt de predicatenlogica behandelt, deze zou je kunnen zien als een uitbreiding van de propositielogica. Hier wordt ook de bewijsboomtechniek uitgebreidt voor de predicatenlogica. Deze twee logische systemen zou je kunnen zien als de kern van dit boekje, dit is de basisstof. Je kan jezelf oefenen met de opdrachten die bij elk onderwerp binnen deze stof te vinden zijn. De antwoorden van deze opdrachten staan achterin, net als een begrippenlijst met definities van kernbegrippen. Ook is er een formuleblad waarop veelgebruikte logische formules te vinden zijn.
Naast deze basisstof worden er ook uitstapjes gemaakt in de vorm van sterparagrafen (★). Deze sterparagrafen bevatten extra informatie die echter niet essentieel is om latere stof in het boekje te begrijpen (met uitzondering van andere sterparagrafen misschien). In het begin van het boekje zullen deze sterparagrafen bestaan uit stukjes geschiedenis van de logica of wat extra diepgang. Later zullen er ook sterparagrafen zijn over gehele nieuwe onderwerpen. Deze latere sterparagrafen dienen niet als gesloten behandeling over dat onderwerp, maar meer als een soort introductie voor verdere studie binnen de logica. Hiervoor staat er naast de antwoorden en begrippen ook een lijst referenties achter in het boekje. In deze lijst staan heel veel goede boeken en artikelen die je als uitgangspunt kan gebruiken voor verdere zelfstudie, mocht dit boekje een grote interesse in de formele logica aanwakkeren, iets wat ik hoop te bereiken.

Een voorproefje: Neem de volgende argumentatie: Iedereen bemint een minnaar; Romeo bemint Julia; dus iedereen bemint Julia. Een vertaling naar de formele taal van de predicatenlogica ziet er zo uit: $\forall x \forall y(\exists z Lyz \to Lxy), Lmn \therefore \forall x Lxn$
En het bewijs van deze argumentatie ziet er zo uit:

1.	$\forall x \forall y(\exists z Lyz \to Lxy)$	
2.	Lmn	
3.	$\neg \forall x Lxn$	
4.	$\exists x \neg Lxn$ ✓	
5.	$\neg Lan$	
6.	$\forall y(\exists z Lyz \to Lay)$	
7.	$(\exists z Lnz \to Lan)$ ✓	
8.	$\neg \exists z Lnz$ ✓	Lan
9.	$\forall z \neg Lnz$	$\otimes$
10.	$\neg Lnm$	
11.	$\forall y(\exists z Lyz \to Lny)$	
12.	$(\exists z Lmz \to Lnm)$ ✓	
13.	$\neg \exists z Lmz$ ✓	Lnm
14.	$\forall z \neg Lmz$	$\otimes$
15.	$\neg Lmn$	
	$\otimes$	

Waarschijnlijk ziet een bewijsboom als deze er nu nog uit als wartaal, aan het eind van dit boekje zal dit echter compleet duidelijk zijn.

1.2 Deductieve en inductieve logica

Naast het onderscheid tussen formele en informele logica is er ook het onderscheid tussen deductieve en inductieve logica. In abstracte termen luidt het onderscheid zo: Bij inductieve logica redeneer je van het specifieke naar het universele en bij deductieve logica van het universele naar het specifieke. Dit houdt in dat je bij inductieve logica probeert patronen te herkennen in specifieke voorbeelden in de wereld, en daaruit een regelmaat probeert op te maken. Wanneer je erg zeker bent van deze regelmaat zou je iets een feit kunnen noemen. Denk aan het opstellen van natuurwetten op basis van observaties. Het belangrijke bij inductieve logica is dat je nooit met volledige zekerheden werkt, altijd met kansen. Inductieve argumenten houden ook niet oneindig lang hun waarheid vast, je kan niet oneindig door redeneren op een inductieve basis.

Een voorbeeld van inductieve logica in actie: Een varken woont op een boerderij. De boer geeft hem elke dag veel eten en zorgt goed voor het varken. Het varken trekt de (inductieve) conclusie dat de boer erg veel van hem houdt en dat de boer morgen weer lekker eten komt brengen. Het varken maakt hier gebruik van inductieve logica. Door zijn grote hoeveelheid eerdere observaties van de vriendelijkheid van de boer is hij vrij zeker van zijn conclusie. Het varken weet niet dat hij op een dag naar de slachterij gaat.

De tegenhanger van de inductieve logica is de deductieve logica. Deductieve redenatie werkt met zekerheden, met universele feiten. Als je begint met een universele waarheid zullen geldige logische argumentaties nooit hun waarheid verliezen. Vrijwel de gehele wiskunde staat op een deductieve basis. Feiten als "$1 + 1 = 2$"zijn altijd waar. Hoewel de inductieve logica niet minder belangrijk is gaat dit boekje alleen over deductieve logica.

2 De Logische Basis

Formele notatie en bewijs is niet het enige wat er komt kijken bij formele logica. Er zijn ook een aantal basisideeën en -concepten waar eerst kennis mee moet worden gemaakt. Deze concepten worden uitgelegd aan de hand van het syllogisme, een eeuwenoude vorm van argumentatie.

2.1 Het syllogisme

Het syllogisme is een bekende vorm van argumentatie. Wellicht het bekendste (en meest cliché) voorbeeld is dit:

$$\text{(S1)}\quad \begin{array}{l} \text{Alle mensen zijn sterfelijk,} \\ \text{Socrates is een mens.} \\ \hline \text{Socrates is sterfelijk.} \qquad \therefore \end{array}$$

De eerste twee regels heten de premissen, de stukjes informatie die je al weet. De laatste regel is de conclusie die je uit de premissen trekt, aangeduid met 3 stipjes.

Deze argumentatie noemen we deductief; de conclusie dat Socrates sterfelijk is, volgt noodzakelijkerwijs uit de twee premissen ervoor. **De belangrijkste eigenschap van een geldige, deductieve argumentatie is dan ook dat de conclusie niet onwaar kan zijn terwijl de premissen waar zijn.** Andersom werkt dat echter niet zo.
Neem het volgende syllogisme:

$$\text{(S2)}\quad \begin{array}{l} \text{De hoofdstad van een land is waar de regering zit,} \\ \text{De regering van Nederland zit in Amsterdam.} \\ \hline \text{Amsterdam is de hoofdstad van Nederland.} \qquad \therefore \end{array}$$

In dit geval is de conclusie waar maar zijn de premissen onwaar.

2.2 Geldig en correct

Neem syllogisme (S2). De premissen zijn niet waar (in alle gevallen). Als we deze argumentatie zouden horen zouden we er niet echt door overtuigd worden. We noemen deze argumentatie *incorrect*. Maar stel dat de premissen wel waar zijn, dan volgt de conclusie wel met zekerheid uit de premissen. We noemen deze argumentatie daarom wel *geldig*. Of een argumentatie geldig is of niet heeft niets te maken met of de premissen en conclusie waar zijn in de echte wereld maar, enkel met de onderliggende logische vorm.

2.3 Logische vorm

Neem het syllogisme:

$$\text{(S3)}\quad \begin{array}{l} \text{Alle vogels leggen eieren,} \\ \text{Alle herdershonden zijn vogels.} \\ \hline \text{Alle herdershonden leggen eieren.} \qquad \therefore \end{array}$$

Ik heb biologie laten vallen in de derde dus ik kan niks zeggen over de correctheid van deze argumentatie (of de premissen waar zijn), maar ik kan wel met zekerheid zeggen dat deze argumentatie geldig is door haar logische vorm. Als we de term herdershonden namelijk zouden vervangen door bijvoorbeeld meeuwen zou het wel aannemelijk klinken. Die logische vorm ziet er zo uit in abstracte vorm:

(S4)
Alle A zijn B,
Alle C zijn A.

Alle C zijn B. $\therefore$

Als we voor A mensen zouden invullen, voor B sterfelijk en voor C Socrates, dan krijgen we het syllogisme (S1) aan het begin van het hoofdstuk. Wat je ook invult voor A, B en C, de argumentatie is altijd geldig door haar logische vorm. Wij zijn in het vervolg met name geïnteresseerd in logische vorm, dus we gaan het met name hebben over geldigheid, niet correctheid.

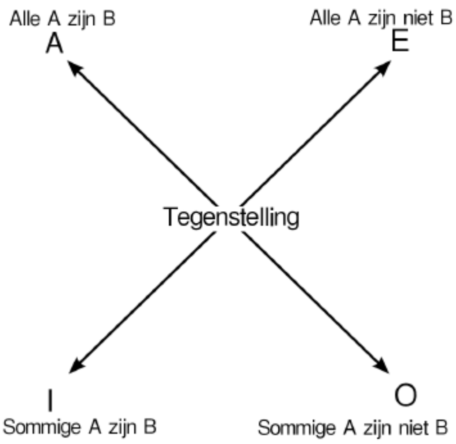
Kort samengevat: Een *geldige* argumentatie is geldig door haar logische vorm en de premissen hoeven niet waar te zijn in de echte wereld. Een *correcte* argumentatie is een geldige waarvan de premissen en conclusie waar zijn in de echte wereld.

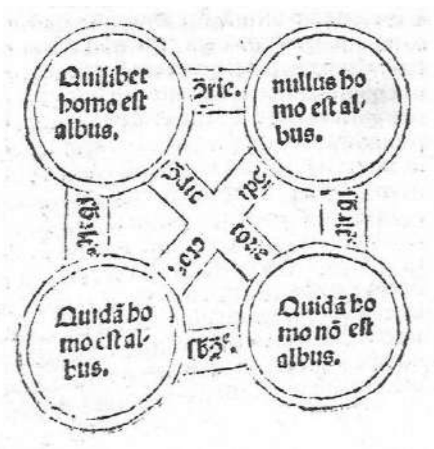
2.4 Categorische Proposities

Feitelijk zouden premissen en conclusies elke vorm kunnen hebben maar bij syllogismen vallen ze meestal in 1 van 4 types. Dit soort uitspraken noemen we categorische proposities.

1. Alle A zijn B. (Type A)
2. Sommige A zijn B. (Type I)
3. Alle A zijn niet B. (Type E)
4. Sommige A zijn niet B. (Type O)

1, en 3 noemen we universeel omdat ze het hebben over 'alle', 2 en 4 noemen we particulier omdat het gaat over 'sommige'. **Let op**: 'sommige' houdt in: *minstens 1 of meer.* Het kan dus ook het geval zijn dat er maar 1 voorbeeld van A is in zin 2 en 4. Deze termen komen nog uitgebreid aan bod bij predicatenlogica. Het is ook goed om op te merken dat 1 en 4, en 2 en 3 tegenstellingen zijn. Er hoeft namelijk maar één A niet B te zijn om 1 onwaar te maken en maar één A, B te zijn om 3 onwaar te maken.



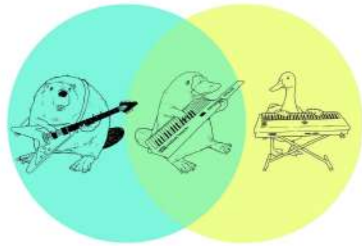


Dit zijn twee voorbeelden van het vierkant van tegenstellingen. Dit is een diagram om bovenstaande informatie visueel weer te geven. De rechter afbeelding is zo'n vierkant uit de 15e eeuw.

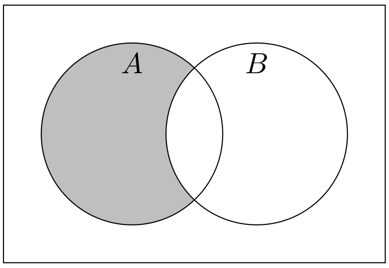
2.5 Venndiagrammen

Categorische proposities kunnen erg eenvoudig worden weergeven in zogenaamde venndiagrammen. venndiagrammen bestaan uit overlappende cirkels, deze cirkels staan elk voor een categorie, bijvoorbeeld 'mens' of 'sterfelijk'.

Als we de eerste premisse van (S1) willen uitdrukken, dan tekenen we twee cirkels die horen bij de twee categorieën mens en sterfelijk. We moeten ons indenken dat er zich in zo'n cirkel allemaal voorbeelden van de categorie bevinden. In de cirkel voor de categorie mens bevinden zich dus de voorbeelden van mensen. In de premisse staat echter dat alle mensen sterfelijk zijn, ze behoren dus allen ook tot de categorie sterfelijk. Alle voorbeelden van mensen bevinden zich dus in het deel van de cirkel dat overlapt met de cirkel van sterfelijkheid. We geven dit feit aan door het gebied waar de mensen zich *niet* bevinden in te kleuren. Je krijgt dan zo'n venndiagram:
(Mens = A, Sterfelijk = B)



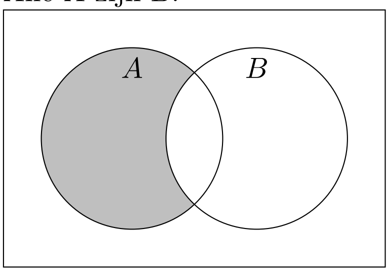
Figuur 1: venndiagram met muzikale dieren.



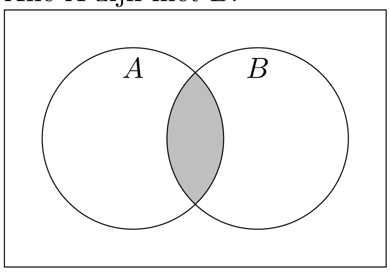
Als we naar de rest van het syllogisme kijken, dan zien we dat Socrates een mens is. Socrates moet zich dus in de mensencirkel bevinden. Socrates mag zich niet in het gekleurde gebied van de mensencirkel bevinden, hij moet zich dus noodzakelijkerwijs bevinden in de cirkel van sterfelijkheid.

De venndiagrammen voor alle categorische proposities worden hieronder gegeven:

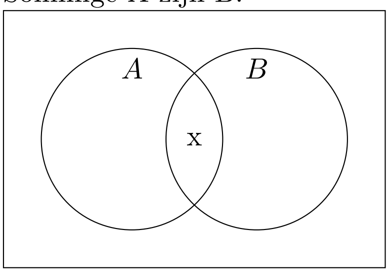
Alle A zijn B:



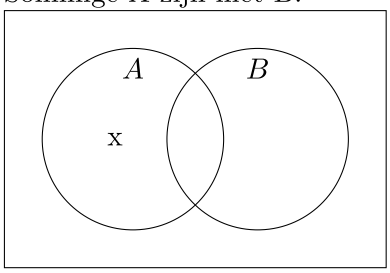
Alle A zijn niet B:



Sommige A zijn B:



Sommige A zijn niet B:



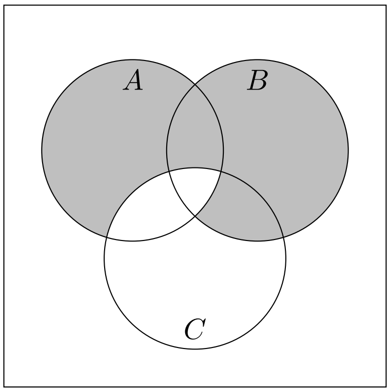
De twee onderste diagrammen geven de twee particuliere proposities weer. Hiervoor wordt een kruisje gebruikt. Het kruisje staat voor minimaal één of meer voorbeelden van die categorie. Bij 'sommige A zijn B' betekent het kruisje dus niet dat er geen A's bestaan die niet B zijn, alleen dat er minimaal één A is die ook B is.

Syllogismen met drie categorieën kunnen natuurlijk ook weergeven worden in een venndiagram. Hiervoor gebruiken we drie cirkels die elkaar overlappen op een manier waarop je voor elke combinatie van categorieën een gebied hebt. We nemen het syllogisme:

(S5)
Alle vogels leggen eieren
Alle meeuwen zijn vogels.

Alle meeuwen leggen eieren. $\therefore$

We geven een letter aan de drie categorieën die voorkomen in dit syllogisme.
A = vogel, B = meeuw, C = legger van eieren. Aan de hand van de premissen kleuren we het venndiagram in. Als het goed is kunnen we vervolgens de conclusie aflezen in het diagram.



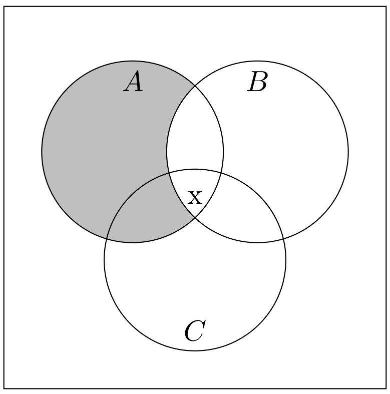
In het diagram zien we dat het enige gedeelte van de cirkel van B (de meeuwen) dat niet ingekleurd is, ook in de cirkel van C (legger van eieren) ligt. Dit komt overeen met de conclusie dat alle meeuwen eieren leggen.

In het vorige voorbeeld kwamen enkel universele proposities voor. Hoe zit het met particuliere proposities? We nemen het syllogisme:

(S6)
Alle katten zijn lief
Sommige huisdieren zijn katten.

Sommige huisdieren zijn lief $\therefore$

Als we een venndiagram opstellen van dit syllogisme gebruiken we het kruisje om aan te geven dat er minimaal één huisdier ook een kat is. We nemen: A: katten, B: lief, C: huisdier.



Het kruisje staat in alle drie de cirkels. Er is dus minimaal één lief huisdier.

2.6 ★ Aristoteles: grondlegger van de logica

Samen met Plato was hij de grootste filosoof en wetenschapper (termen die toen der tijd vrijwel hetzelfde betekenden) uit de klassieke oudheid.

Aristoteles werd geboren in 384 voor Christus in Noord-Griekenland. Op zijn 17e ging hij naar Athene om te studeren aan de academie van Plato, zijn mentor. Na de dood van Plato vertrok hij naar andere streken en werkte hij verder aan zijn filosofische activiteiten. Hij is ook nog een tijdje leermeester geweest van de jonge Alexander de Grote.

Naast vele andere academische prestaties, wordt de eerste échte studie van de formele logica toegeschreven aan Aristoteles. Zijn werk binnen de logica was zo succesvol en invloedrijk dat er pas in de 19e opnieuw vooruitgang te zien was binnen het vak. Kant, een van de grootste filosofen van de verlichting (17e en 18e eeuw) , zei zelfs dat het tijdverspilling was om nog iets aan de logica van Aristoteles te doen.

Aristoteles was de eerste die de logica op zich bestudeerde, niet in dienst van andere filosofie of wiskunde. Zijn logica hield zich voornamelijk bezig met de deductie.

Figuur 2: Buste van Aristoteles.

Het syllogisme is door Aristoteles geïntroduceerd en systematisch beschreven. Hij bewees voor elke vorm van syllogisme of deze logisch geldig was of niet. Er zijn 256 mogelijke vormen van een syllogisme, slechts 24 daarvan zijn geldig. Hij bewees dat geen enkel syllogisme twee negatieve (Alle/Sommige A zijn niet B) premissen heeft, of twee particuliere (Sommige A zijn (niet) B) premissen heeft. Zijn systematiek hierin heeft veel weg van hoe moderne logica behandeld wordt.

Bertrand Russell merkte op over de logica van Aristoteles dat haar millennia lange alleenheerschappij wellicht eerder een struikelblok is geweest voor de vooruitgang van de logica. *"Heel de moderne tijd door moest vrijwel iedere stap voorwaarts, op het gebied van de natuurwetenschappen, de logica en de filosofie, worden bevochten op een felle oppositie van de leerlingen van Aristoteles."* (Russell, 1945) Naast zijn bewijzen over syllogismen wordt geen enkel stuk van Aristoteles' logische theorie aanvaard door moderne logici. Dit mag echter niet wegnemen van de ongekende originaliteit en kundigheid van zijn werk.

2.7 Bewijzen van Argumentatie

Nu we een redelijk beeld hebben van wat argumentatie inhoudt kunnen we naar verschillende manier gaan kijken om argumentatie te bewijzen. Er zijn meerdere manieren om op 'informele' wijze aan te tonen of een argumentatie geldig of ongeldig is. De eerste manier is om te bewijzen dat een argumentatie ongeldig is met een tegenvoorbeeld.

2.7.1 Het Tegenvoorbeeld

De eerste methode is redelijk simpel. Als je één specifiek tegenvoorbeeld kan vinden om in te vullen in de abstracte logische vorm dat duidelijk onwaar is, dan kun je zeggen dat de logische vorm zelf ongeldig is.
Neem het volgende syllogisme:

$$\text{(S7)}\quad \begin{array}{l} \text{Sommige filosofen zijn goede logici} \\ \text{Sommige filosofen zijn Duits.} \\ \hline \text{Sommige goede logici zijn Duits} \quad \therefore \end{array}$$

(P. Smith, 2003)
De eerste van de twee stappen van de tegenvoorbeeld techniek is het schrijven van de argumentatie in haar abstracte logische vorm. Dit doen we door alle termen te vervangen door letters. Syllogisme (S7) wordt dan:

$$\text{(S8)}\quad \begin{array}{l} \text{Sommige A zijn B} \\ \text{Sommige A zijn C.} \\ \hline \text{Sommige B zijn C} \quad \therefore \end{array}$$

De tweede stap is een voorbeeld te bedenken dat duidelijk onwaar is door andere termen in te vullen op de plekken van de letters. Bijvoorbeeld:

$$\text{(S9)}\quad \begin{array}{l} \text{Sommige zoogdieren zijn apen} \\ \text{Sommige zoogdieren zijn beren.} \\ \hline \text{Sommige apen zijn beren.} \quad \therefore \end{array}$$

We zien duidelijk dat dit onzin is en we hebben dus bewezen dat deze logische vorm ongeldig is.

2.7.2 Reductio ad Absurdum

In klassieke oudheid werd deze bewijsmethode al gebruikt door filosofen als Plato en wiskundigen als Euclides. Reductio ad Absudum wordt ook wel het bewijs uit het ongerijmde genoemd. Ik zal de term voor het gemak afkorten naar RAA.
Bij deze bewijsmethode neem je het tegenovergestelde van de stelling die je wilt bewijzen als waar aan en laat je zien dat dat tot tegenspraak zou leiden. Wanneer het tegenovergestelde van de originele stelling is bewezen als onwaar is de originele stelling waar. Als we het syllogisme (S1) over Socrates nemen, dan zouden we zo te werk gaan:

(1) Neem aan: Socrates is niet sterfelijk.
(2) Alle mannen zijn sterfelijk, dus Socrates kan geen man zijn.
(3) Dit is in tegenspraak met de premisse die stelde dat Socrates een man is.
(4) Hieruit kunnen we concluderen dat de stelling 'Socrates is niet sterfelijk' onjuist is en dat de originele stelling bewezen is.

Natuurlijk is deze manier van bewijs redelijk overdreven als we te maken hebben met zo'n simpele argumentatie, maar het laat zien hoe het werkt.
Een RAA bewijs kom je vaak tegen binnen de wiskunde. Een van de bekendste voorbeelden is het bewijs dat $\sqrt{2}$ irrationaal is. Om dit te bewijzen nemen we het tegengestelde van de conclusie aan als waar. Namelijk dat wortel twee wel rationaal is. Een rationaal getal heeft de eigenschap dat het geschreven kan worden als $\frac{a}{b}$ waarbij a en b geen gemeenschappelijke delers hebben. De eerste stap is dan ook:

Bewijs. $\sqrt{2}$ is irrationaal.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

Probeer dit bewijs eerst zelf eens uit voordat je verder leest.

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \tag{2}$$
$$a^2 = 2b^2 \tag{3}$$

We zien hier dat a een even getal moet zijn, dus te schrijven is als $2k$, waarbij k een geheel getal is. Het kwadraat van een even getal is namelijk altijd even *(Lemma van Euclides: als a^2 deelbaar is door het priemgetal p, dan is a ook deelbaar door p.)*

$$2b^2 = (2k)^2 \tag{4}$$
$$2b^2 = 4k^2 \tag{5}$$
$$b^2 = 2k^2 \tag{6}$$

We zien hier dat b ook een even getal is, a en b zijn beide te delen door 2. Dit is in tegenspraak met de stelling dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben. De aanname dat $\sqrt{2}$ rationaal is, is dus niet waar. Hieruit volgt dat $\sqrt{2}$ wel irrationaal is. □

Opdrachten 2.7

A De volgende argumentaties zijn ongeldig. Bewijs dit aan de hand van het tegenvoorbeeld of maak gebruik van venndiagrammen.

1. Sommige logici zijn filosofen en alle wiskundigen zijn logici. Daarom zijn sommige filosofen wiskundige.

2. *(P. Smith)* Veel gewone mensen zijn corrupt en politici zijn gewone mensen, daarom zijn sommige politici corrupt.

3. Alle oude Grieken waren filosofen en sommige filosofen hadden les van Plato. Sommige filosofen waren niet Grieks dus sommige leerlingen van Plato waren geen oude Grieken.

4. *(Lewis Carroll)* Iedereen die niet gestoord is kan logica doen. Gestoorden zijn meestal niet geschikt om in een jury te zitten. Geen van jouw neven kan logica doen dus geen van jou neven zou in een jury kunnen zitten.

B De volgende argumentaties zijn geldig. Toon dit aan door gebruik te maken van reductio ad absurdum.

1. Sommige huizen zijn niet van steen. Sommige plaatsen die onderdak bieden zijn dus niet van steen aangezien alle huizen onderdak bieden.

2. (P. Smith) Iedereen die van Bach houdt, houdt van de Goldberg Variaties. Sommigen die van Chopin houden, houden niet van de Goldberg Variaties. Sommige bewonderaars van Chopin houden dus niet van Bach.

3. Alle huisdieren die naar de hemel gaan stinken niet. Sommige huisdieren zijn katten. Sommige huisdieren stinken dus niet want alle katten gaan naar de hemel.

4. (Lewis Carroll) Iedereen die niet gestoord is kan logica doen. Gestoorden zijn niet geschikt om in een jury te zitten. Geen van jouw neven kan logica doen dus geen van jou neven zou in een jury kunnen zitten.

C Probeer de volgende stellingen te bewijzen door gebruik te maken van reductio ad absurdum.

1. $\sqrt{97}$ is irrationaal. Maak hierbij ook gebruik van het lemma van Euclides: *(als a^2 deelbaar is door het priemgetal p, dan is a ook deelbaar door p.)*

2. Er zijn oneindig priemgetallen. (*Gebruik hierbij ook de hoofdstelling van de rekenkunde: dat elk geheel getal groter dan 1 kan worden geschreven als het product van priemgetallen*).

3 Propositielogica

De eerste tak van de formele logica waar we het over gaan hebben is de propositielogica. Hierin worden argumentaties opgebouwd uit proposities. Een propositie is een zin die een bewering formuleert. Bijvoorbeeld: "Plato is een filosoof", of "De weg is nat"
Kenmerkend aan de klassieke logica is de *wet van uitgesloten derde*, meer dan twee millennia geleden geformuleerd door Aristoteles en Plato. Deze wet zegt dat een propositie waar of onwaar moet zijn, een derde optie is dus uitgesloten. Een propositie is dus een bewering die waar of onwaar kan zijn. Vraagzinnen, commando's of betekenisloze zinnen zijn geen proposities omdat er niet gezegd kan worden of deze waar of onwaar zijn. Je zou niet zeggen: "Hoe laat is het?"... "Ja, dat klopt!", maar wel: "Het is drie uur."... "Ja, dat klopt!"
In het vervolg zal ik in de tekst 'propositielogica' afkorten naar "PL".

★ Niet-klassieke logica?

Een klassieke logica voldoet aan de wet van uitgesloten derde, proposities zijn of waar, of onwaar. Er bestaan ook vormen van logica die deze wet niet in acht nemen, bijvoorbeeld intuïtionistische logica. Bewijzen die gebaseerd zijn op de wet van uitgesloten derde, zoals het bewijs uit het ongerijmde (reductio ad absurdum, 2.7.2), werken niet in deze vorm van logica. Er zijn ook meerwaardige logische systemen. Hierin kunnen proposities meer waardes aannemen dan waar of onwaar. We gaan hier echter verder geen aandacht aan besteden in dit boekje.

3.1 Notatie van Proposities

In de formele taal van PL worden proposities aangeduid met de hoofdletters P,Q,R,S,T. Bijvoorbeeld: P = "Plato is een filosoof"Bij meer dan 5 proposities gebruiken we een accent: P', P", Q'. Deze proposities worden verbonden met operatoren, zo ontstaan er logische formules.

De termen waar en onwaar worden vaak afgekort als T en F, deze staan voor True en False. Deze letters zul je ook tegenkomen in waarheidstabellen.

3.2 Logische Operatoren

In de propositielogica worden propositionele variabelen aan elkaar verbonden met logische operatoren. Combinaties van deze operatoren en variabelen vormen logische formules. De regels voor deze formules worden hierna besproken.

3.2.1 Negatie ($\neg$)

De negatie, ook wel de NOT-operator of ontkenning genoemd 'plakt' zich vast aan één variabele of sectie. De negatie maakt een propositie, of formule onwaar.
Bijvoorbeeld: A = de weg is nat. $\neg A$ = de weg is droog.
Let goed op: In dit voorbeeld kan de weg alleen maar droog of nat zijn dus we kunnen de negatie verwoorden als het tegenovergestelde. In gevallen waar het tegenovergestelde minder duidelijk is, is het makkelijker om de negatie te verwoorden als "het is niet het geval dat ...". Hiermee voorkom je enige onduidelijkheid.

Neem propositie P: Het Zaanlands is de beste school in Zaandam. De negatie van $P : (\neg P)$, zou niet zijn: 'Het Zaanlands is de slechtste school in Zaandam', maar: 'Het Zaanlands is niet de beste school in Zaandam'.
Omdat hier fouten mee gemaakt kunnen worden is het dus makkelijker om te zeggen: 'Het is niet het geval dat het Zaanlands de beste school in Zaandam is'.

3.2.2 Conjunctie ($\wedge$)

De En (AND) operator verbindt twee proposities en wordt ook wel de conjunctie genoemd. Een conjunctie is waar als beide proposities waar zijn en onwaar in alle andere gevallen. Als we nemen: A = de weg is nat, en B = de zon schijnt. Dan is $(A \wedge B)$ alleen waar als de zon schijnt en de weg nat is en $(\neg A \wedge B)$ alleen waar als de zon schijnt en de weg droog is. De en-operator is, net als allen die hierna komen, een binaire operator. Dit houdt in dat hij twee proposities of formules verbindt. De enige operator die niet binair is, is de negatie. De waarheidstabel van de $\wedge$ operator ziet er zo uit:

P	Q	P	$\wedge$	Q
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	F	F	F

Links staan de waardes van de proposities en rechts de waarde die de operator als geheel aanneemt. In paragraaf 3.6 wordt uitgelegd hoe je zelf makkelijk een waarheidstabel kan maken.

3.2.3 Disjunctie ($\vee$)

De Of (OR) operator verbindt twee proposities en wordt de disjunctie genoemd. De disjunctie is waar als één of beide proposities waar zijn en is alleen onwaar als beide proposities onwaar zijn. Wij zullen de disjunctie interpreteren als de inclusieve disjunctie. Dit houdt in dat deze ook waar is als beide proposities waar zijn. De andere optie is de exclusieve disjunctie en deze is alleen waar als één van beide proposities waar is, niet allebei.

P	Q	P	$\vee$	Q
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	F

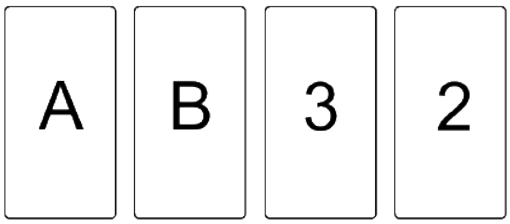
3.2.4 Implicatie ($\rightarrow$)

De implicatie is de meest complexe logische operator die we gaan gebruiken. Deze operator drukt een “als ... dan ...” verhouding uit. Hiermee kunnen we voorwaarden en gevolgen uitdrukken. Bijvoorbeeld: “als het regent dan is de weg nat” drukken we uit als $(A \rightarrow B)$ waarbij A = het regent en B = de weg is nat. De implicatie is alleen onwaar als de voorwaarde (het regent) waar is maar het gevolg (de weg is nat) onwaar is. De weg kan nat zijn terwijl het niet regent maar de weg kan niet droog zijn terwijl het wel regent. Als A onwaar is, is de implicatie dus altijd waar en als A waar is moet B ook waar zijn, anders is het geheel onwaar.

P	Q	P	$\rightarrow$	Q
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	F

Een Gedachte-experiment over de Implicatie

Voor je liggen deze 4 kaarten. Elke kaart heeft een letter aan de ene kant en een getal aan de andere kant. Een hypothese luidt: Als er op de voorkant van een kaart een A staat, dan staat er aan de achterkant een 2. Welke kaarten moet je minimaal omdraaien om deze hypothese met zekerheid te bevestigen?



Dit experiment werd beschreven door P.C. Wason in “Reasoning about a rule”. (Wason, 1968) Vrijwel alle kandidaten in het experiment kozen kaart A en een groot deel kozen ook kaart 2. Om de hypothese te bewijzen moesten echter kaart A en kaart 3 omgedraaid worden. Kaart 2 hoeft niet omgedraaid te worden, het maakt niet uit welke letter op de achterkant staat. (De weg kan nat zijn, ook al regent het niet). Kaart 3 moet echter wel worden omgedraaid om te controleren of er geen A op de achterkant staat. (De weg kan niet droog zijn terwijl het regent). Let altijd goed op bij het gebruiken van de implicatie.

3.2.5 Equivalentie ($\leftrightarrow$)

De equivalentie wordt ook wel de bi-implicatie genoemd. De equivalentie is waar als de twee proposities dezelfde waarde hebben; of ze zijn allebei waar, of ze zijn allebei onwaar. De equivalentie wordt ook wel de bi-implicatie genoemd omdat ze te schrijven is als een conjunctie van twee implicaties: $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

P	Q	P	$\leftrightarrow$	Q
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	F	T	F

Voor de equivalentie wordt ook de afkorting '*desda*' gebruikt. (dan en slechts dan als ...)

3.3 Logische Formules

Nu de betekenissen van de logische operatoren, en de aanduidingen van proposities zijn behandelt kunnen we PL-formules gaan maken. Voor de volgende voorbeelden gebruiken we de proposities:

- P: Peano was een invloedrijk logicus.
- Q: Quine was een invloedrijk logicus.
- R: Russell was een invloedrijk logicus.

Simpele vertalingen van Nederlands naar PL zijn vanzelfsprekend.
De zin "Peano en Russell waren invloedrijke logici"vertaal je als $(P \wedge R)$ en "Als Peano een invloedrijk logicus was, dan was Quine ook een invloedrijk logicus" als $(P \rightarrow Q)$.
De zin: "Als Russell een invloedrijk logicus was, dan waren Quine en Peano dat ook"vertaal je als: $(R \rightarrow (P \wedge Q))$.

Als we werken met meer dan één operator is het heel belangrijk om op haakjes te letten. Elke operator heeft zijn eigen haakjes. De positie van deze haakjes heeft invloed op de betekenis van de formule. $((R \rightarrow P) \wedge Q)$ vertaalt namelijk naar "Quine was een invloedrijk logicus en als Russell een invloedrijk logicus was, was Peano dat ook". De formule $(R \rightarrow P \wedge Q)$ is dan ook niet correct aangezien één van de operatoren geen haakjes heeft en de formule dus op meerdere manieren kan worden geïnterpreteerd.

Een veelgebruikte manier om een correcte formule aan te duiden is met de afkorting 'wff'. Deze staat voor **"well-formed-formula"**. De systematische regels voor wff's worden hieronder gegeven. De A's en B's kunnen voor zowel proposities als hele formules staan.

1. Elke losse propositie is een wff. (ook wel een atomaire formule genoemd)
2. Als A een wff is, dan is $\neg A$ dat ook.
3. Als A en B wff's zijn, dan is $(A * B)$ ook een wff, waarbij '*' staat voor elke binaire logische operator.

   (Smullyan, 1995)

Vanwege regel 2 schrijven we om formules met maar één operator, bijv. $(P \wedge Q)$, ook haakjes. Stel we nemen de formule $(P \wedge Q)$ als A. Met haakjes wordt $\neg A$: $\neg(P \wedge Q)$. Zonder haakjes $\neg P \wedge Q$. Dit betekent natuurlijk niet hetzelfde.

Opdrachten 3.3

Gebruik de volgende proposities: P: Plato was een groot geleerde; Q: Quine was een groot geleerde; R: Russell was een groot geleerde; S: Socrates was een groot geleerde.
A Vertaal de volgende logische formules:

1. $(P \vee Q)$
2. $(P \rightarrow (R \wedge Q))$
3. $\neg(S \wedge \neg(P \wedge Q))$
4. $(((Q \vee P) \wedge R) \wedge \neg S)$

B Vertaal de volgende zinnen naar logische formules

5. Plato en Socrates waren groot geleerden.
6. Plato en Socrates waren groot geleerden, maar Quine en Russell niet.
7. Als Socrates een groot geleerde was, dan waren Plato, Quine, en Russell dat ook.
8. Plato of Socrates was een groot geleerde, maar niet allebei.
9. Socrates en Russell hadden dezelfde academische vaardigheden.
10. Het feit dat Quine en Russell grote geleerden waren impliceert dat Plato dat ook was en Socrates niet.
11. Als Plato een groot geleerde was, was Socrates dat ook; of Quine was geen groot geleerde.
12. Het is niet het geval dat Plato een groot geleerde zou zijn terwijl Socrates dat niet is.

3.4 De Hoofd-Operator

Een wff heeft, net als losse proposities, een waarheidswaarde (T of F). Deze hangt af van de waarde van de proposities die deel uitmaken van het geheel. Neem de proposities P en Q, waarbij gegeven is dat: $P \Rightarrow T$ (waar) en $Q \Rightarrow F$ (onwaar). Met deze proposities maken we de formule $(P \wedge Q)$. Van de $\wedge$ operator weten we dat deze alleen waar is als beide proposities waar zijn. In dit geval is de $\wedge$ operator dus onwaar. Omdat de $\wedge$ operator de enige operator is, kunnen we zeggen dat de hele formule onwaar is.

Maar wat doe je als je meerdere operatoren hebt? In dat geval wordt de waarheidswaarde van de gehele formule bepaald door de hoofd-operator. Neem de formule:

$$(((P \wedge Q) \vee R) \rightarrow (S \wedge P)) \tag{1}$$

In dit geval is de hoofd-operator de implicatie ($\rightarrow$). Dit kan je zien doordat de buitenste haakjes horen bij deze operator. In dit voorbeeld zijn de operator en de bijbehorende haakjes dezelfde kleur.

Een makkelijke manier om de hoofd-operator te vinden is het tellen van haakjes. Tussen het meest linker haakje en de hoofd-operator moeten evenveel linker als rechter haakjes staan. Begin te tellen bij het tweede haakje; +1 bij een linker haakje, -1 bij een rechter haakje. Wanneer je weer bij 0 bent, ben je bij de hoofd-operator aangekomen. Als er een negatie staat voor het eerste haakje is dat de hoofd-operator.

3.5 Logische Waardering

Bij logische waardering bereken je de waarheidswaarde van de gehele logische formule wanneer je de waardes van de proposities weet. Een handige manier om dit te doen is met een waarheidstabel. Deze ben je al tegengekomen bij de logische operatoren. Links schrijf je alle proposities met daaronder hun gegeven waarde. Rechts schrijf je de formule. Onder de proposities en operatoren van de formule schrijf je de bijbehorende waardes. Neem de formule:

$$((P \wedge Q) \vee (R \wedge \neg S)) \tag{2}$$

Gegeven is: $P \Rightarrow T, Q \Rightarrow T, R \Rightarrow F, S \Rightarrow T$.

P	Q	R	S	(	P	∧	Q	)	∨	(	R	∧	¬	S	)
T	T	F	T		T	T	T		T		F	F	F	T	

Bij het berekenen van de waarheidswaarde van een formule werk je van binnen naar buiten. Eerst schrijf je de waardes die je al weet onder de proposities en vervolgens de operatoren binnen de haakjes. Net zo lang tot je de waarde van de hoofd-operator weet, deze bepaalt de waarde van de hele formule. In de bovenstaande tabel is de waarde van de hoofd-operator in het rood aangegeven.

Je bent natuurlijk vrij om afkortingen te nemen. Als bij een of-operator één van de kanten waar is hoef je natuurlijk de andere kant niet meer uit te werken, het geheel is al waar. Hetzelfde geldt voor een en-operator; als één van de kanten onwaar is, is het geheel onwaar. Een implicatie is altijd waar als de linkerhelft onwaar is. (zie de waarheidstabel in 3.2.4 op blz 15)

Opdrachten 3.5

Gegeven is: $P \Rightarrow T, Q \Rightarrow F, R \Rightarrow F, S \Rightarrow T$
Bereken de waarheidswaardes van de formules. (De waarde van de hoofd-operator)

1. $((P \vee Q) \wedge R)$
2. $\neg((Q \rightarrow P) \vee R)$
3. $((P \wedge Q) \rightarrow S)$
4. $((\neg P \rightarrow \neg R) \vee (\neg Q \wedge S))$
5. $(P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow S)))$

3.6 Volledige Waarheidstabellen

Naast een waarheidstabel om één combinatie van propositiewaardes in te vullen worden waarheidstabellen ook gebruikt om alle mogelijke waarderingen weer te geven. Hoe meer proposities, hoe meer rijen een volledige waarheidstabel heeft. Het aantal rijen wordt gegeven door de formule 2^n, waarbij n het aantal proposities is.

Het invullen van de rechterkant van de tabel werkt hetzelfde als met één combinatie. De linkerkant van de tabel moet alle mogelijke combinaties van waarheidswaardes bevatten. Een makkelijke manier om dit in te vullen is om te beginnen bij de eerste propositie en daaronder om-en-om T en F te schrijven. Bij de tweede propositie, die je dan links daarvan schrijft, schrijf je twee keer T, twee keer F om-en-om onder elkaar. Bij de 3e in groepjes van 4, etc. Op deze manier krijg je alle combinaties van waardes. Ook bij volledige waarheidstabellen gaat het alleen om de hoofd-operator; je bent dus vrij om afkortingen te nemen bij de eerdergenoemde operatoren. Neem de wff:

$$(((P \vee Q) \rightarrow R) \vee (R \wedge P)) \tag{3}$$

Een waarheidstabel voor deze formule ziet er zo uit:

P	Q	R	((P	∨	Q)	→	R)	∨	(R	∧	P)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F

Opdrachten 3.6

Stel een volledige waarheidstabel op voor de volgende logische formules. Het nemen van afkortingen is toegestaan.

1. $(P \rightarrow \neg Q)$
2. $((P \land Q) \lor \neg P)$
3. $(P \rightarrow (Q \lor \neg R))$
4. $\neg(\neg(P \land Q) \rightarrow R)$

3.7 Interpretatie van een Formele Taal

Geen onbelangrijke vraag om over na te denken is op welke manier een formele logische taal zich verhoudt tot de natuurlijk spreektaal. Logici, filosofen en wiskundigen hebben hier lang over nagedacht en er zijn verschillende meningen over geformuleerd. Één groep stelt dat spreektaal niet formeel wordt uitgedrukt, maar dat alleen de onderliggende logische vorm van proposities en redenaties wordt gevat in een formele taal, als een soort logisch skelet dat echt bestaat. De correctheid van argumentatie in de spreektaal hangt af van dat logische skelet.

Anderen stellen echter dat een formele taal slechts een wiskundig model is van redenatie in de spreektaal, een benadering die niet altijd compleet accuraat is. Delen van de spreektaal worden vereenvoudigd of weggelaten zodat het model simpel genoeg is om bruikbaar te zijn. Denk aan de verschillende atoom modellen bij scheikunde, of de versimpelde situaties bij natuurkunde.

Filosofen als Leibniz, Frege en Quine vonden dat de spreektaal voor filosofische doeleinden vervangen zou moeten worden door een formele taal, of op zijn minst moest worden opgehelderd. De spreektaal zou te vaag en dubbelzinnig zijn voor filosofie. Zo'n nieuwe taal zou logisch geen ambiguïteit vertonen en dus maar op één manier geïnterpreteerd kunnen worden.

Figuur 3: 'Bevrijding' door M.C. Escher

Douglas Hofstadter illustreert dit vraagstuk over getallen en formele systemen aan de hand van de prent 'Bevrijding' van Escher: *"Zijn getallen echt zo vrij als vogels? Lijden ze werkelijk zoveel als ze gekristalliseerd worden in een systeem dat aan regels gehoorzaamt? Bestaat er een magisch overgangsgebied tussen getallen in de werkelijkheid en getallen op papier?". (Hofstadter, 1979, p.68)* Hij heeft het over getallen en formele systemen in het algemeen maar het is net zo toepasselijk voor de logica. Het antwoord verschilt misschien per situatie, wellicht is het een combinatie van al het bovenstaande.

3.8 Logische Equivalentie

Er is vaak niet één manier om een logische formule op te schrijven. Soms kunnen twee formules dezelfde logische eigenschappen hebben. We hebben dan te maken met logische equivalentie. Twee logische formules A en B zijn equivalent wanneer ze dezelfde waarde aannemen bij alle mogelijke waarderingen van de proposities. We kunnen dit uitdrukken als $(A \equiv B)$.
Het simpelste voorbeeld van logische equivalentie is de dubbele negatie. We kunnen zeggen "Het is niet het geval dat het niet regent", of gewoon "Het regent". In PL vertaalt dat als: $(\neg\neg A \equiv A)$.

Een aantal andere equivalenties zijn:
(Deze equivalenties zijn ook te vinden op het formuleblad.)

1. $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ (Symmetrische Eigenschap)
2. $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ (Symmetrische Eigenschap)
3. $(A \wedge (A \vee B)) \equiv A$ (Absorptie)
4. $(A \vee (A \wedge B)) \equiv A$ (Absorptie)
5. $(A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A)$ (Modus ponens en modus tollens)
6. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ (Wet van De Morgan)
7. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ (Wet van De Morgan)

Equivalenties zijn te controleren door middel van waarheidstabellen. Wanneer twee formules dezelfde waarheidstabellen hebben, zijn ze equivalent. Met "dezelfde waarheidstabellen"bedoel ik dezelfde waarderingen van de hoofd-operator bij dezelfde combinaties van propositiewaardes. Neem de eerste wet van De Morgan. De waarheidstabellen van de formules zien er zo uit:

A	B	¬ (	A	∧	B)
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F

A	B	¬	A	∨	¬	B
T	T	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	F

Je ziet dat deze tabellen equivalent zijn als we kijken naar de proposities en de hoofdoperatoren. De twee formules zijn dus equivalent.
Ook de implicatie kan op meerdere manier worden uitgedrukt.

Opdracht: Probeer zelf een manier te vinden om de implicatie uit te drukken in de negatie, conjunctie en/of disjunctie. Controleer of de waarheidstabellen equivalent zijn.

Merk op dat doordat je de conjunctie en de disjunctie in elkaar kan omschrijven, je elke logische formule kan uitdrukken met twee operatoren. Probeer zelf eens wat andere formules om te schrijven in formules met maar twee operatoren.

3.9 ★ Sheffer Stroke (↑)

Alle logische formules kunnen geschreven worden met maar twee operatoren. Het kan echter nog minimaler: Alle logische formules zijn uit de drukken met slechts één operator. De Sheffer stroke, ook wel de NAND-operator genoemd, is zo'n operator. De Sheffer stroke is de negatie van de conjunctie van twee proposities: $\neg(A \wedge B)$. De waarheidstabel van de Sheffer stroke ziet er zo uit:

A	B	A	↑	B
T	T	T	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	F

Probeer als oefening om de andere operatoren, inclusief de negatie, uit te drukken in enkel de Sheffer stroke. Controleer of de waarheidstabellen equivalent zijn. De uitwerkingen hiervan zijn ook achterin te vinden.

3.10 Tautologieën

In de logica is een tautologie een logische formule die altijd waar is, welke propositiewaardes je ook kiest. Een contradictie is het omgekeerde, een contradictie is altijd onwaar. Een hele simpele tautologie is formule 1:

$$(A \vee \neg A) \tag{1}$$

Een hele simpele contradictie is formule 2:

$$(A \wedge \neg A) \tag{2}$$

Je kan voor jezelf nagaan dat dit de negatie van formule 1 is.

Wanneer je een logische equivalentie schrijft als: $(A \leftrightarrow B)$, dan is dit ook een tautologie. Wanneer A en B logisch equivalent zijn nemen ze immers dezelfde waarheidswaarde aan voor elke combinatie propositie waardes. Het controleren van een tautologie lijkt ook op het controleren van een logische equivalentie. Dit kan met waarheidstabellen. De hoofd-operator in de waarheidstabel van een tautologie zal altijd waar zijn. Bij een contradictie geldt weer het omgekeerde; de hoofd-operator zal daar altijd onwaar zijn.

3.10.1 Tautologische Implicatie en Argumentaties

Het begrip tautologische implicatie is niets anders dan zeggen dat een implicatie van twee formules een tautologie is. Wanneer $(A \rightarrow B)$ een tautologie is kunnen we dat noteren als: $A \models B$.
Het symbool '$\models$' is geen symbool binnen PL. Het is een meta-symbool dat wat zegt over bepaalde formules. Als we $A \models B$ zouden willen uitdrukken in PL zouden we dat zo kunnen doen:

$$((A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \vee \neg A)) \tag{3}$$

$(A \vee \neg A)$ is een tautologie, dus altijd waar. We zeggen dat $(A \rightarrow B)$ altijd dezelfde waarheidswaardes heeft als een tautologie, dus dat het een tautologie is.
We zouden voor het gemak een meta-symbool kunnen toevoegen voor een propositie die een tautologie is. Een veelgebruikt symbool hiervoor is: '$\top$'. Dit is niets anders dan een snelle manier om formule 1 op te schrijven. We zouden formule 3 dan kunnen uitdrukken als:

$$((A \rightarrow B) \leftrightarrow \top) \tag{4}$$

Een meta-symbool voor contradictie is meestal: '$\perp$' (formule 2). Bijvoorbeeld:

$$((A \wedge \neg A) \leftrightarrow \perp) \tag{5}$$

We kunnen het symbool '$\models$' voor de tautologische implicatie ook gebruiken om uit te drukken dat iets een tautologie is. Dit doen we door het symbool er gewoon voor te zetten. We zeggen eigenlijk dat er niets nodig is om een formule waar te maken. Bijvoorbeeld:

$$\models ((A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \tag{6}$$

We kunnen het begrip tautologische implicatie ook iets minder letterlijk interpreteren, namelijk als definitie voor een deductieve argumentatie. Wat houdt dit in?
Stel we hebben de argumentatie:

De zon schijnt, of het regent. De zon schijnt niet. Het regent dus. (7)

We nemen de proposities: P = De zon schijnt en Q = Het regent. De premissen in PL zijn: $(P \vee Q)$ en $\neg P$. De conclusie is Q.
Voor een geldige deductieve argumentatie geldt dat de conclusie waar moet zijn wanneer de premissen waar zijn. Dus dat het een tautologie is dat de premissen de conclusie impliceren. We kunnen argumentatie 7 dus zo uitdrukken:

$$((P \vee Q) \wedge \neg P) \models Q \tag{8}$$

Of in PL, met gebruik van het $\top$ symbool:

$$((((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q) \leftrightarrow \top) \tag{9}$$

Of:

$$\models (((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q) \tag{10}$$

Dit is dus hoe we argumentaties kunnen uitrukken. Het is echter een beetje onoverzichtelijk om alle premissen in een grote conjunctiesoep te gooien. We kunnen de premissen ook los van elkaar neerzetten met komma's. De tautologische implicatie vervangen we dan door het '$\because$' symbool voor de conclusie. Argumentatie 7 zouden we dan zo uitdrukken:

$$(P \vee Q), \neg P \therefore Q \tag{11}$$

3.11 Meta-Symbolen

Bij het bespreken van het symbool '$\models$' voor tautologische implicatie heb ik het begrip meta-symbool laten vallen. Een meta-symbool is een symbool dat we gebruiken om over formules binnen een logische taal te spreken. De symbolen horen officieel dus niet bij de taal. Een aantal meta-symbolen, die we trouwens niet allemaal gaan gebruiken, zijn:

- $\therefore$ om een conclusie aan te duiden.
- $\models$ om tautologische implicatie aan te duiden.
- $A \vdash B$ om aan te geven dat B volgt uit A.
- $\Rightarrow$ om aan te geven welke waarheidswaarde iets heeft.

We gebruiken '$\Rightarrow$' in plaats van '=' omdat '=' al een symbool is binnen de predicatenlogica. Tussen $\models$ en $\vdash$ zit een verschil, maar dat verschil heeft te maken met de geldigheid en volledigheid van een systeem. Dit zijn begrippen waar we het niet over gaan hebben.
Voor ons geldt: $(A \vdash B) \equiv (A \models B)$.

4 Propositielogica Bewijzen

Nu bekend is hoe PL-formules werken en hoe argumentaties uitgedrukt worden in PL is het eindelijk tijd om die argumentaties te gaan *bewijzen*. Dit gaan we doen aan de hand van bewijsbomen. Je zult zien dat een bewijsboom in de basis een combinatie is van eerder besproken bewijsmethodes, het tegenvoorbeeld en reductio ad absurdum.

We nemen een willekeurige argumentatie. Laat P staan voor alle premissen, en C voor de conclusie. We willen het volgende bewijzen:

$$P \therefore C \tag{1}$$

Zoals we in paragraaf 3.10.1 hebben gezien zeggen we hier dat de premissen de conclusie tautologisch impliceren. We zeggen dus:

$$P \models C \tag{2}$$

Hoe bewijzen we dit? We kunnen dit doen door gebruik te maken van reductio ad absurdum (RAA). Bij RAA namen we de negatie van de conclusie en lieten we zien dat dat voor tegenspraak zorgt. In dit geval willen we aantonen dat het volgende voor tegenspraak zorgt:

$$P \models \neg C \tag{3}$$

Voor dit voorbeeld gebruik ik de argumentatie:

> Joris is in het café, of hij is in de bibliotheek. Joris is niet in het café.
> Dus Joris is in de bibliotheek. (4)

Met de premissen: P: Joris is in het café, Q: Joris is in de bibliotheek.
In PL uitgeschreven:

$$(P \lor Q), \neg P \therefore Q \tag{5}$$

We willen aantonen dat wanneer we $\neg Q$ als waar aannemen, dit zorgt voor tegenspraak. Een bewijsboom is niets anders dan het onder elkaar schijven van wat waar moet zijn. Voor de duidelijkheid zet ik er nog even achter dat alles waar is, maar dat is in principe overbodig. Om te beginnen zijn de premissen en de negatie van de conclusie waar:

1.	$(P \lor Q) \Rightarrow T$	Premisse 1
2.	$\neg P \Rightarrow T$	Premisse 2
3.	$\neg Q \Rightarrow T$	Negatie van de conclusie

Zo maken we de stam van de bewijsboom. Deze procedure is voor elke argumentatie hetzelfde. Hoe gaan we verder?
Met de atomen 2 en 3 kunnen we niet veel doen. Die zijn gewoon waar. We kijken naar de niet-atomaire disjunctie (regel 1). Zoals we weten schrijven we alleen dingen op die waar zijn. Wanneer is de disjunctie waar? Als één van de twee premissen waar is. (Natuurlijk ook als beide premissen waar zijn, maar dat is even overbodige informatie.) We krijgen twee situaties; één waarin P waar is, en één waarin Q waar is. De bewijsboom splitst op.

1.	$(P \lor Q) \Rightarrow T$ ✓		Premisse 1
2.	$\neg P \Rightarrow T$		Premisse 2
3.	$\neg Q \Rightarrow T$		Negatie van de conclusie
4.	$P \Rightarrow T$	$Q \Rightarrow T$	twee tegenspraken (regel 2 en 3)
	$\otimes$	$\otimes$	

Dit is de gehele bewijsboom. Er staan ook een aantal tekentjes bij. Het vinkje wil zeggen dat we de niet-atomaire wff hebben 'verbruikt'. Het heeft geen zin om twee keer hetzelfde te zeggen.
Die twee tekentjes onderaan staan voor een tegenstelling, de tak is hier afgesloten. Die tegenstelling vind je door van beneden naar boven de tak te volgen. Op de linker tak zie je bijvoorbeeld zowel '$P \Rightarrow T$' als '$\neg P \Rightarrow T$' staan. Dit is een tegenstelling. Naar tegenstellingen waren we juist opzoek. De argumentatie is dan ook geldig, want alle takken komen uit op tegenstellingen.

Een iets ingewikkelder voorbeeld. Neem de (enigszins lugubere) argumentatie:

Joris is in de bibliotheek, in het café, of in beide.
Als Joris in zowel de bibliotheek als het café is, dan is Joris doormidden gehakt.
Als Joris doormidden is gehakt, dan leeft hij niet. (6)
Joris zit levend in het café.
Joris is dus niet in de bibliotheek.

Probeer, voordat we aan het bewijs beginnen, deze argumentatie zelf te vertalen naar PL. We nemen de proposities; **P**: Joris is in het café, **Q**: Joris is in de bibliotheek,
R: Joris is doormidden gehakt, **S**: Joris leeft. De argumentatie in PL ziet er dan zo uit:

$$(P \vee Q), ((P \wedge Q) \rightarrow R), (R \rightarrow \neg S), (P \wedge S) \therefore \neg Q \tag{7}$$

De uitleg van de bewijsboom op de volgende pagina zal per regel worden doorgenomen.
(Regel 1-5): De premissen en de negatie van de conclusie.
(Regel 6-7): Van de conjunctie op regel 4 moeten beide kanten waar zijn. We voegen beide kanten gewoon onder elkaar toe aan de boom. Deze is nu gebruikt dus we zetten een vinkje op regel 4.
(Regel 8): Hier wordt de disjunctie op regel 1 gebruikt. Slechts één van de twee kanten hoeft waar te zijn.
(Regel 9): Hier wordt de implicatie op regel 2 gebruikt en toegevoegd aan elke vertakking. De implicatie is alleen onwaar als de linkerkant waar is *en* de rechterkant onwaar. De implicatie is dus altijd waar als de linkerkant onwaar is, *of* de rechterkant waar. Dit zorgt weer voor een vertakking. (zie paragraaf 3.2.4)
(Regel 10-11): Aan de ene kant gebruiken we De Morgan's wet om de negatie van een conjunctie om te schrijven in een disjunctie. Deze vertakken we vervolgens. Nu krijgen we $\neg P$ en $\neg Q$. Een stuk terug in de boom stelde we echter al dat P en Q waar waren *(regel 5-6).* We hebben hier te maken met een tegenstelling dus we kunnen al deze takken afsluiten.
Onder de R'en gebruiken we de implicatie op regel 3. Deze vertakt in $\neg R$ en $\neg S$. Hier hebben we weer te maken met tegenstellingen *(regel 7 en 9).* Deze takken sluiten we ook af. De gehele boom is nu afgesloten. De argumentatie is bewezen als geldig.

1.	$(P \vee Q)$ ✓							
2.	$((P \wedge Q) \rightarrow R)$ ✓							
3.	$(R \rightarrow \neg S)$ ✓							
4.	$(P \wedge S)$ ✓							
5.	Q							
6.	P							
7.	S							
8.	P				Q			
9.	$\neg(P \wedge Q)$ ✓		R		$\neg(P \wedge Q)$ ✓		R	
10.	$(\neg P \vee \neg Q)$ ✓		$(R \rightarrow \neg S)$ ✓		$(\neg P \vee \neg Q)$ ✓		$(R \rightarrow \neg S)$ ✓	
11.	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$\neg S$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$\neg S$
	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$

4.1 Systematische Regels voor Bewijsbomen

- Elk punt op een bewijsboom heet een knoop.
- Op elke knoop staat een wff (die waar is).
- Een pad bestaat uit een verbonden lijn knopen van boven naar beneden.
- Als er op een pad zowel $\neg A$ als A voorkomt, dan is dit pad gesloten. (A kan ook voor complexe wff's staan)
- Als alle paden van een bewijsboom gesloten zijn is de hele boom gesloten, anders niet.
- Wanneer men een wff gebruikt op een tak hoeft deze wff niet nogmaals op dezelfde tak gebruikt te worden.

Hier volgen alle regels voor vertakkingen in bewijsbomen. De letters A en B kunnen voor zowel losse proposities als wff's staan. Dit schema is ook te vinden op het formuleblad.

$$\begin{array}{ll} 1. & \neg\neg A \\ 2. & A \end{array} \qquad \begin{array}{lc} 1. & (A \wedge B) \\ 2. & A \\ 3. & B \end{array} \qquad \begin{array}{lcc} 1. & \multicolumn{2}{c}{(A \vee B)} \\ 2. & A & B \end{array}$$

$$\begin{array}{lcc} 1. & \multicolumn{2}{c}{(A \rightarrow B)} \\ 2. & \neg A & B \end{array} \qquad \begin{array}{lcc} 1. & \multicolumn{2}{c}{(A \leftrightarrow B)} \\ 2. & A & \neg A \\ 3. & B & \neg B \end{array} \qquad \begin{array}{lcc} 1. & \multicolumn{2}{c}{\neg(A \wedge B)} \\ 2. & \neg A & \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{lc} 1. & \neg(A \vee B) \\ 2. & \neg A \\ 3. & \neg B \end{array} \qquad \begin{array}{lc} 1. & \neg(A \rightarrow B) \\ 2. & A \\ 3. & \neg B \end{array} \qquad \begin{array}{lcc} 1. & \multicolumn{2}{c}{\neg(A \leftrightarrow B)} \\ 2. & A & \neg A \\ 3. & \neg B & B \end{array}$$

Door gebruik te maken van deze regels is het mogelijk om elke argumentatie in PL te bewijzen. Wanneer alle takken zijn afgesloten is de argumentatie als geldig bewezen. Maar wat gebeurt er als de argumentatie ongeldig is? Laten we een simpele ongeldige argumentatie nemen:

Als Plato een filosoof is, dan is Aristoteles ook een filosoof.
Aristoteles is een filosoof. (1)
Plato is dus een filsooof.

We nemen de premissen: P: Plato is een filosoof; Q: Aristoteles is een filosoof.

Een vertaling naar PL:

$$(P \rightarrow Q), Q \therefore P \tag{2}$$

De bewijsboom van deze argumentatie komt er zo uit te zien:

$$\begin{array}{lccl} 1. & \multicolumn{2}{c}{(P \rightarrow Q) \checkmark} & \\ 2. & \multicolumn{2}{c}{Q} & \\ 3. & \multicolumn{2}{c}{\neg P} & \\ 4. & \neg P & Q & \text{er is geen tegenspraak} \end{array}$$

Er is niks meer te vertakken, alle niet-atomaire wff's zijn verbruikt. De argumentatie is dus ongeldig. Er is echter meer af te lezen aan deze boom dan enkel de ongeldigheid van de argumentatie. Het tegenvoorbeeld van de argumentatie kan namelijk gevonden worden door van onder naar boven een open tak te volgen. Dat houdt in: je begint bij een open tak, je volgt hem naar boven, en alle proposities of negaties van de proposities die je tegenkomt vormen de configuratie van waarheidswaardes van het tegenvoorbeeld. In dit geval het tegenvoorbeeld: $P \Rightarrow F$ en $Q \Rightarrow T$. Voor deze waardes zijn de premissen waar, maar de conclusie onwaar. Dit is ook te zien in een volledige waarheidstabel:

P	Q	P	→	Q	Q	P
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F	F

De derde regel geeft ons het tegenvoorbeeld.

Opdrachten 4

Bewijs voor de volgende argumentaties of ze geldig of ongeldig zijn door gebruik te maken van bewijsbomen. Geef bij een ongeldige argumentatie de waardes van het tegenvoorbeeld.

1. $((P \vee Q) \rightarrow R), \neg R \therefore \neg P$
2. $(P \leftrightarrow Q), (Q \vee R), \neg R \therefore P$
3. $((P \vee Q) \vee R), \neg Q \therefore (R \wedge \neg P)$
4. $(P \leftrightarrow Q) \therefore (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$
5. $\neg(P \wedge Q) \therefore (\neg P \vee \neg Q)$
6. $P, \neg(P \wedge \neg Q), \neg(Q \wedge \neg R), (\neg R \vee S) \therefore S$
7. $\neg(\neg(P \vee Q) \rightarrow R) \therefore \neg((P \vee Q) \vee R)$
8. $(P \vee Q), (P \rightarrow R), \neg(Q \wedge \neg R) \therefore R$
9. $\neg(P \leftrightarrow (Q \wedge R)), (S \vee \neg Q) \therefore \neg(S \rightarrow P)$

   Met onze bewijsboomtechniek kunnen we ook tautologieën bewijzen. Dit is een stuk makkelijker dan het gebruiken van waarheidstabellen. Het bewijzen van tautologieën is heel simpel. Je zou een tautologie kunnen zien als een conclusie zonder premissen. Bij een bewijsboom voor een tautologie begin je met enkel de negatie van die tautologie. Een contradictie is nog makkelijker, die schrijf je gewoon op.
   Bewijs de volgende tautologieën met behulp van bewijsbomen.

10. $\models ((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$
11. $\models ((A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B))$
12. $\models \neg((\neg(A \wedge \neg(B \wedge C)) \wedge \neg(B \wedge C)) \wedge A)$

Vertaal bij de volgende opdrachten de argumentatie zelf naar PL. Bedenkt welke propositie worden gebruikt in de argumentatie.

13. Een luxe bibliotheek:
Joris is in het café, in de bibliotheek, of beide. Als Joris in zowel de bibliotheek als het café is, dan is Joris doormidden gehakt, of het café is in de bibliotheek. Als Joris doormidden is gehakt, dan leeft hij niet meer. Joris zit levend in zowel het café als de bibliotheek, de bibliotheek heeft dus een café.

14. Als Plato geen filosoof geweest was, dan was Aristoteles dat ook niet geweest. De logica is in gang gezet door Aristoteles dus als Aristoteles geen filosoof was geweest, dan hadden we nu geen logica. Logica is het onderwerp van dit boekje, dus zonder de logica was dit boekje er niet geweest. We mogen dus blij zijn dat Plato een filosoof was, anders zou je dit boekje nu niet kunnen lezen.

15. Een militaire deductie:
Tijdens een veldslag staat generaal Koetoezov voor een beslissing. Aan de linkerkant van de rivier staat de commandopost tegenover de infanterie van de vijand. Aan de rechterkant van de rivier staat het veldhospitaal tegenover de cavalerie van de vijand. Over de rivier is een brug, deze is in handen van de vijand maar kan net aan gespot worden tussen de bomen door, door Koetoezov. De cavalerie kan niet twee doelwitten tegelijk aanvallen en als de cavalerie de rivier over wil steken om de commandopost aan te vallen zal de infanterie de brug bewaken en zelf niet aanvallen. De cavalerie valt hoe dan ook aan. Koetoezov ziet dat de brug niet verdedigt is maar krijgt te horen dat de commandopost wordt aangevallen. Het hospitaal heeft versterking nodig, anders houdt het niet stand. Koetoezov wil echter niet onnodig versterking sturen. Het hospitaal mag niet vallen. Een commandant zegt dat het hospitaal zal worden aangevallen en er dus versterking gestuurd moet worden. Moet Koetoezov naar deze commandant luisteren?

Figuur 4: Koetoezov *(zittend, links)* besluit Moskou over te geven aan Napoleon. *Schilderij door Aleksey Kivshenko.*

5 Predicatenlogica

Nu we kennis hebben gemaakt met de propositielogica kunnen de deze uitbreiden tot de predicatenlogica. Hierbij worden de propositiesymbolen vervangen door predicaten, variabelen en constanten en worden de twee kwantoren toegevoegd. Later komt hier ook nog het =-teken bij.
Met predicatenlogica zijn we, onder andere, in staat categorische proposities uit te drukken. Argumentaties zoals syllogismen kunnen we bewijzen met een iets complexere vorm van de bewijsboomtechniek. Aangezien de afkorting 'PL' al in gebruik is zal ik predicatenlogica afkorten naar 'QL'
Stel we nemen de zin: 'Plato is een filosoof'. Het verschil tussen PL en QL is dat deze zin in PL als propositie één geheel is, terwijl deze in QL opgesplitst wordt in een predicaat en een constante.

5.1 De Notatie van QL

In predicatenlogica maken we gebruik van de volgende symbolen:

1. Alle symbolen van de propositielogica behalve de proposities zelf (P, Q, ...)
2. De kwantoren $\forall$ (voor alle ...) en $\exists$ (er bestaat een ...)
3. Een stel individuele variabelen: x, y, z of x_1, x_2, y_1, ...
4. Een stel individuele constanten: m, n, o of m_1, n_1, n_2, ...
5. Een stel predicaten: F, G, H, L, ...

Variabelen en constanten heten samen 'individuele symbolen'

Atomen *In QL bestaan atomen uit een n-plaatsig predicaat met daarachter n individuele symbolen (variabelen of constanten).*
Een predicaat zou je kunnen vergelijken met het naamwoordelijk gezegde, en een individueel symbool met het onderwerp. Dit is makkelijker te begrijpen met een voorbeeld. Stel we nemen het predicaat F als 'is een filosoof' en de constante m als 'Plato'.

$$\text{'Plato is een filosoof' wordt: } Fm \tag{1}$$

'Fm' bestaat uit een 1-plaatsig predicaat met 1 individueel symbool, 'Fm' is dus een atoom.
Een constante staat dus voor een ding met een naam waarover je kan spreken. Op de plek van een constante kan ook een variabele staan. 'Fx' zou betekenen 'x is een filosoof'. We weten hier niet wat er met x wordt bedoeld, maar we zouden x kunnen invullen met bijvoorbeeld 'm' van Plato.

Plaatsigheid Een predicaat kan naast een eigenschap ook een relatie uitdrukken tussen twee of meerdere individuele symbolen. Hier komt het begrip 'plaatsigheid', ook wel 'ariteit' genoemd, in het spel. Een voorbeeld van een 2-plaatsig predicaat is de relatie 'geeft les aan'. We geven het predicaat 'geeft les aan' bijvoorbeeld de letter 'L'.

$$Lxy \text{ betekent 'x geeft les aan y'.} \tag{2}$$

En als we voor Aristoteles de constante 'n' nemen, dan zouden we 'Plato geeft les aan Aristoteles' vertalen als: Lmn
We zeggen ook wel dat een 2-plaatsig predicaat een ariteit van 2 heeft.

Kwantoren Het laatste stukje notatie dat we nu introduceren betreft de kwantoren. Er zijn twee kwantoren: de universele ($\forall$) en de existentiële ($\exists$).
$\forall x$ lezen we als 'voor alle x ...' en $\exists x$ als 'er bestaat een x waarvoor ...'.

Deze soort uitdrukkingen lijken heel erg op de particuliere en de universele categorische proposities uit paragraaf 2.4. Logisch gedragen ze zich ook redelijk gelijk.

Een kwantor wordt voor een formule geplakt om deze te kwantificeren met betrekking tot een variabele. Een kwantor gaat altijd gepaard met een variabele.
Laten we beginnen met wat simpele voorbeelden, we gebruiken dezelfde vertalingen als net.
'Alle x zijn filosoof' vertalen we als:

$$\forall x Fx \text{ (betekent: 'Alle x zijn F')} \tag{3}$$

'Er bestaat een x die een filosoof is' als:

$$\exists x Fx \text{ (betekent: 'Er is een x waarvoor geldt: x is F')} \tag{4}$$

Domein van Argumentatie Wanneer we naar deze zinnen kijken doet er zich een onduidelijkheid op. Als we zeggen 'Alle x zijn filosoof', wat is dan allemaal filosoof? Zijn stenen, potloden en waterstofatomen allemaal filosofen? Dit zou toch vreemd zijn. De vraag is: welke groep bedoelen we met x?
De groep waarover we praten — dus wat x, en andere variabelen, allemaal kunnen zijn — noemen we het *domein van argumentatie.* Als we zeggen 'Alle x zijn filosoof', dan kunnen we met x 'alle mensen' bedoelen, of 'alle Grieken', etc. Dit domein van argumentatie moet vooraf worden gekozen. Wanneer we het in één argumentatie bijvoorbeeld over zowel mensen als vogels hebben, zouden we het domein 'dieren' kunnen nemen. Als we het over wiskundige stellingen hebben zouden we als domein de verzameling van reële getallen kunnen nemen. Dit is feite wat je doet wanneer je wiskundige vergelijkingen als '5x + 3 = 0' opstelt.

5.2 QL-Formules

Net als in propositielogica spreken we in QL ook van well-formed-formula's, of wff's. De systematische regels zal ik hieronder uiteenzetten, de A's en B's kunnen voor zowel atomen als andere wff's staan.

1. Atomen zijn wff's.
2. Als A een wff is, dan is $\neg A$ ook een wff.
3. Als A en B wff's zijn, dan is (A * B) ook een wff, waarbij '*' staat voor elke binaire operator.
4. Als A een wff is, dan is $\forall x A$ ook een wff, dit noemen we de universele kwantificatie van A met betrekking tot x.
5. Als A een wff is, dan is $\exists x A$ ook een wff, dit noemen we de existentiële kwantificatie van A met betrekking tot x.

Scope, Vrij en Gebonden We nemen voor dit voorbeeld de vertalingen; Fx = 'x is een filosoof' en Gx = 'x is gelukkig'. Als domein nemen we alle mensen. We nemen de zin: 'Alle filosofen zijn gelukkig.'
Het is wellicht niet meteen duidelijk hoe we deze zin naar QL zouden vertalen. De zin iets anders verwoorden maakt het makkelijker: 'Als een persoon een filosoof is, dan is deze gelukkig.' Deze propositie geldt voor alle mensen, dus voor het hele domein. De vertaling is dan ook:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \textit{ (Alle F zijn G)} \tag{1}$$

We maken formule 2 door de kwantor te verplaatsen:

$$(\forall x Fx \rightarrow Gx) \tag{2}$$

Hoewel formule 1 en 2 erg op elkaar lijken, verschillen ze op basis van de begrippen *scope*, *vrij* en *gebonden*. Het begrip scope is van toepassing op de kwantor $\forall x$. De scope van een kwantor is het deel van een formule dat hij kwantificeert. In formule 1 kwantificeert $\forall x$ de gehele formule, in formule 2 alleen het stukje 'Fx'. Als we formule 1 zouden uitbreiden tot de formule:

$$(Hx \wedge \forall x(Fx \rightarrow Gx)) \tag{3}$$

dan is Hx niet gekwantificeerd.
Variabelen die niet gekwantificeerd zijn, dus niet binnen de scope van een kwantor met dezelfde variabele vallen, noemen we 'vrij'. In formule 2 is de variabele x in 'Gx' vrij, en de variabele x in 'Fx' gebonden. In formule 3 is de x in 'Hx' vrij.
Om het verschil uit te leggen tussen vrije en gebonden variabelen zal ik een voorbeeld van Smullyan nemen. We nemen de formule:

$$x = 5y$$

(Het domein is de verzameling gehele getallen.)

De waarheidswaarde van deze formule hangt af van een keuze voor x en een keuze voor y. Beide variabelen zijn vrij. Nu kwantificeren we deze formule met betrekking tot y:

$$\exists y(x = 5y)$$

Variabele y is nu gebonden. Deze formule zegt dat er een y bestaat die 5 keer kleiner is dan x, de waarheid hangt alleen af van de keuze voor x. Een andere manier om deze formule te vertalen is als 'x is deelbaar door 5'. De variabele y komt niet eens voor in deze vertaling.
(Smullyan, 1995)
Let op: hoewel x binnen de scope van de kwantor $\exists y$ valt, is x nog steeds vrij aangezien $\exists y$ alleen kwantificeert met betrekking tot y.

5.3 QL-Vertalingen

Om je een beetje bekend te laten raken met de notatie van QL zal ik een aantal voorbeelden doornemen. Voor deze voorbeelden nemen we het domein 'mensen' en de volgende vertalingen:

- m = Plato
- n = Aristoteles
- o = Russel
- Fx = 'x is een filosoof'
- Gx = 'x is een wiskundige'
- Lxy = 'x geeft les aan y'
- Mxy = 'x houdt van y'

Zinnen zonder variabelen en kwantoren lijken sterk op PL qua vertalen.

1. 'Russell is een filosoof en een wiskundige.' wordt: $(Fo \land Go)$
2. 'Plato geeft les aan Aristoteles.' wordt: Lmn

In paragraaf 5.1 hebben we gezien dat 'Alle A zijn B' vertaalt als $\forall x(Ax \to Bx)$.

3. 'Elke wiskundige is een filosoof' wordt dus: $\forall x(Gx \to Fx)$.

Hoe zit het dan met 'Sommige wiskundigen zijn filosofen'?. Een eerste ingeving zou zijn: $\exists x(Gx \to Fx)$. Dit is echter niet juist. Deze formule drukt namelijk uit: 'Er bestaat een x waarvoor geldt dat: 'als x een wiskundige zou zijn, dan is x een filosoof.' Dit is eerder een soort regel over een willekeurig persoon in plaats van wat we wel uit willen drukken. Wanneer we de zin verwoorden als: 'Er bestaat een persoon waarvoor geldt dat hij een wiskundige *en* een filosoof is.' wordt de vertaling duidelijk.

4. 'Sommige wiskundigen zijn filosofen' wordt: $\exists x(Gx \land Fx)$.
5. De zin 'Er bestaat een filosoof die geen wiskundige is' kan op meerdere manieren vertaald worden: $\exists x(Fx \land \neg Gx)$ of $\neg\forall x(Fx \to Gx)$.

De eerste formule zegt dat er een x bestaat die wel een filosoof is, maar geen wiskundige. De tweede zegt dat het niet zo is dat elke filosoof een wiskundige is. Deze twee formules zijn logisch equivalent, ik zal uitleggen waarom. Ten eerste is het nodig om te zien dat $(Fx \to Gx)$ equivalent is aan $\neg(Fx \land \neg Gx)$. Deze equivalentie is al eerder aan bod gekomen. (paragraaf 3.8) Nu kunnen we de twee formules schrijven als: $\exists x(Fx \land \neg Gx)$ en $\neg\forall x\neg(Fx \land \neg Gx)$. We zien nu iets interessants, namelijk dat $'\exists x'$ hetzelfde uitdrukt als $'\neg\forall x\neg'$.

Dit is een voorbeeld van het omschrijven van kwantoren, een belangrijk gereedschap voor wanneer we straks QL gaan bewijzen. Stel we nemen de propositie: 'Alle mensen zijn geen wiskundigen'. In QL wordt dit: $\forall x\neg Gx$. We kunnen deze zin ook uitdrukken als: 'Er bestaat geen mens die een wiskundige is'. In QL wordt deze zin: $\neg\exists x Gx$. Deze twee formules zijn wederom logisch equivalent. De visualisatie die je in je hoofd kunt houden is: *wanneer een negatie over een kwantor springt, dan klapt deze om.*

$$\neg\exists x... \equiv \forall x\neg... \text{ en } \exists x\neg... \equiv \neg\forall x...$$
$$\text{Daaruit volgt ook: } \neg\forall x\neg... \equiv \neg\neg\exists x... \equiv \exists x...$$

Ik zal nog een voorbeeld geven voordat het tijd is om zelf aan de slag te gaan. De zin is: 'Elke filosoof geeft iemand les.' Het is handig om direct te zien dat hier gewerkt moet worden met twee variabelen, er is namelijk een 2-plaatsig predicaat en er zijn geen constanten.

Vertalingen hoeven niet in één stap te verlopen, je kunt de zin ook eerst schrijven in een soort tussentaal die meer weg heeft van QL dan normale spreektaal. Bijvoorbeeld: Voor alle x geldt: als x een filosoof is, dan is er een y waarvoor geldt: x geeft y les. Hier zie je al een stuk duidelijker de logische vorm in terug dan in de originele zin.

6. 'Elke filosoof geeft iemand les' wordt: $\forall x(Fx \to \exists yLxy)$.

Let goed op de volgorde en scope van de kwantoren wanneer je werkt met twee variabelen. Stel we doen het fout en we krijgen deze formule:

$$\exists y\forall x(Fx \to Lxy)$$

Deze formule zegt in de tussentaal: Er is een y waarvoor geldt: voor alle x geldt dat, als x een filosoof is, dan geeft x les aan y. In gewoon Nederlands: Alle filosofen geven les aan dezelfde leerling. Een interessante situatie, maar niet de vertaling die we zoeken.

Opdrachten 5.3

A Vertaal de volgende zinnen naar QL. Gebruik de vertalingen die aan het begin van paragraaf 5.3 worden afgesproken.

1. Plato is een filosoof en geeft les aan Aristoteles
2. Elke filosoof houdt van Russel.
3. Elke wiskundige houdt van Russel, maar niet van Plato.
4. Er is altijd iemand die van je houdt.
5. Sommige filosofen houden niet van Plato, maar wel van Aristoteles.
6. Er is een leerling die niet houdt van al zijn docenten.

B Vertaal de volgende zinnen terug naar Nederlands. Gebruik dezelfde vertalingen als bij opdracht A.

1. $((Go \land Fm) \to Mom)$
2. $\exists x(Gx \land Mxo)$
3. $\forall x\exists y(Lxy \land Myo)$
4. $\exists x\forall y(Gx \land (Fy \to Mxy))$

C Neem: Lxy = 'x bemint y', m = Romeo en n = Julia. Vertaal de argumentatie: Iedereen bemint een minnaar; Romeo bemint Julia; dus iedereen bemint Julia.
De notatie voor argumentaties is hetzelfde als bij PL.

D Voor de volgende opdrachten nemen we de natuurlijke getallen als domein en de volgende vertalingen; n = 1, Fx = 'x is oneven', Gx = 'x is even', Hx = 'x is een priemgetal', Lxy = 'x is groter dan y', Rxyz = 'x is de som van y en z'.
Vertaal de volgende wiskundige uitspraken naar het Nederlands:
Welke uitspraken zijn waar?

1. $\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$
2. $\forall x\forall y\exists zRzxy$
3. $\forall x\exists yLyx$
4. $\forall x\forall y((Fx \wedge Ryxn) \rightarrow Gy)$
5. $\forall x\forall y((Gx \wedge Rxyn) \rightarrow Fy)$
6. $\forall x\exists y((Gx \wedge Fy) \wedge Rxyy)$
7. $\forall x\forall y(\exists x(Rzxn \wedge Ryzn) \rightarrow (Gx \rightarrow Gy))$
8. $\forall x\forall y\forall z(((Fx \wedge Fy) \wedge Rzxy) \rightarrow Gz)$
9. $\forall x(Gx \rightarrow \exists y\exists z((Hy \wedge Hz) \wedge Rxyz))$
10. $\forall w\exists x\exists y(((Hx \wedge Hy) \wedge (Lxw \wedge Lyw)) \wedge \exists z(Rzxn \wedge Ryzn))$

(P. Smith, 2003)

5.4 ★ Gottlob Frege

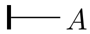
Gottlob Frege (1848 - 1925) was een Duits logicus, wiskundige en filosoof. Frege is erg belangrijk geweest voor de logica. Hij was namelijk de bedenker van de predicatenlogica. Frege werd geboren in 1848 in Duitsland. Aan de universiteit van Göttingen behaalde hij zijn doctoraat binnen de wiskunde. Zijn onderzoek ging over het meetkundig representeren van complexe getallen.
In 1879 bracht Frege zijn 'Begriffsschrift' uit waarin hij zijn systeem van predicatenlogica introduceerde. Dit is een van de belangrijkste mijlpalen in de logica geweest. Toen de Begriffsschrift uitkwam werd deze echter niet warm ontvangen. Velen begrepen het ook niet goed, dit kwam misschien door de vreemde tweedimensionale notatie. Het doel van Frege was om aan te tonen dat wiskunde te reduceren was tot pure logica. Hierin is hij niet geslaagd, maar het systeem dat hij heeft ontwikkeld wordt grotendeels nog geaccepteerd door moderne logici. Zijn iets wat vreemde notatie zullen we nu bespreken.

Figuur 5: Gottlob Frege

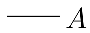
5.4.1 ★ Frege's Begriffsschrift

De notatie die Frege gebruikte voor predicatenlogica bestaat, in de kern, wanneer we deze vergelijken met de moderne notatie, uit niets anders dan de negatie, de implicatie en de universele kwantor. We weten uit paragraaf 3.8 dat twee operatoren genoeg zijn om alles uit te drukken. Ook weten we dat de existentiële kwantor omgeschreven kan worden naar de universele kwantor. Het systeem van Frege kan dus alles uitdrukken wat wij ook in moderne notatie kunnen uitdrukken. De reden dat we het systeem van Frege echter niet meer gebruiken zal snel genoeg duidelijk worden. Het is namelijk erg lastig om te ontcijferen. Dit komt doordat logische formules meer op een wegenkaart van een woonwijk lijken dan op moderne logica.

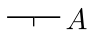
Als eerste heb je het symbool voor een uitspraak. We nemen de propositie A: de weg is nat. (We werken nu nog even met proposities, straks introduceren we de notatie voor kwantoren en predicaten.) Wanneer we dan stellen:



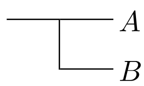
Stellen we dat de weg nat is. Het verticale streepje aan het begin drukt uit dat het een uitspraak is die de auteur presenteert als een waarheid. Zonder dat streepje wordt er een bepaalde propositie gegeven waarvan de waarheid niet met stelligheid wordt gemeend.



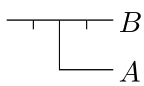
Vervolgens krijgen we de negatie. Een negatie wordt aangegeven als een klein verticaal streepje. 'Het is niet het geval dat weg nat is' wordt:



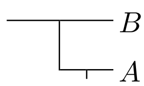
Wanneer we de implicatie bekijken komt het tweedimensionale aspect van de notatie naar voren. De voorwaarde wordt namelijk aan de onderkant toegevoegd. Stel we nemen propositie B: Het regent. En we willen uitdrukken: 'De weg is nat als het regent'
(dus $(B \to A)$*).* Dan wordt dit:



Met deze drie regels kunnen we in principe alles uitdrukken uit de propositielogica. Om formules uit de propositielogica uit te drukken is het makkelijk om deze eerst om te schrijven naar formules met alleen implicaties en negaties.
$(A \wedge B)$ is dan bijvoorbeeld $\neg(A \to \neg B)$. In Begriffsschrift wordt dit:

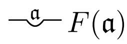


De disjunctie is te schrijven als $(\neg A \to B)$. In de notatie van Frege:

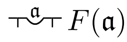


Als je goed kijkt zie je hier mooi de wet van De Morgan in terug.
Als laatst zal ik laten zien hoe kwantoren en predicaten worden genoteerd.

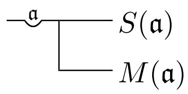
Zoals ik al zei heeft Begriffsschrift enkel de universele kwantor. Deze kan natuurlijk eenvoudig worden omgeschreven naar de existentiële kwantor. Immers: $\forall x Fx \equiv \neg\exists x \neg Fx$. Predicaten worden door Frege ongeveer hetzelfde genoteerd als in het moderne systeem het geval is. Fn wordt geschreven als —— $F(n)$. Predicaten met een hogere plaatsigheid worden geschreven als bijvoorbeeld: —— $L(m, n)$.
De universele kwantor wordt genoteerd als:



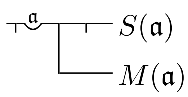
Frege gebruikt zelf $\mathfrak{a}$ als variabele, dit houd ik hier ook aan. We zouden dit dus vertalen als $\forall x Fx$ aangezien $\mathfrak{a}$ een variabele is en wij meestal x gebruiken voor een variabele.
We weten dat $\forall x Fx \equiv \neg\exists x \neg Fx$. De existentiële kwantor ($\exists x Fx$) in Begriffsschrift wordt dan:



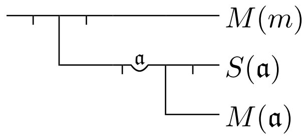
Met al deze bouwstenen kunnen we complexere formules gaan vormen. Ik zal een aantal andere vertalingen geven van logische formules in Begriffsschrift. Neem de vertalingen: $S(\mathfrak{a})$ = '$\mathfrak{a}$ is sterfelijk' en $M(\mathfrak{a})$ = '$\mathfrak{a}$ is een mens'.
'Elk mens is sterfelijk.' wordt dan:



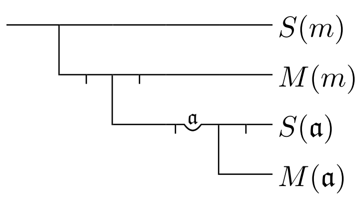
'Sommige mensen zijn sterfelijk.' wordt:



We nemen voor Socrates de constante m. 'Alle mensen zijn sterfelijk en Socrates is een mens.' wordt:



We kunnen het nog gekker maken wanneer we vertalen: 'Dat alle mensen sterfelijk zijn en dat Socrates een mens is impliceert dat Socrates sterfelijk is.' Eigenlijk hebben we nu een gehele argumentatie in één formule vastgelegd. In de notatie van Frege wordt dit:



Ik denk dat de lezer nu wel snapt waarom we dit systeem niet meer hanteren. Al ziet het er nog zo interessant uit; dit wordt natuurlijk compleet onleesbaar als we nog verder zouden gaan.

5.5 QL-Waardering

De waardering van QL-formules verloopt in verschillende stappen. Voor alle voorbeelden gebruik ik de volgende vertalingen: Fx = 'x is een filosoof', Lxy = 'x geeft les aan y', m = Socrates, n = Plato, o = Aristoteles. Het domein is alle mensen.

Om te beginnen gaan we een aantal termen introduceren. De eerste is: **model**. Het model is simpelweg het domein en alle vertalingen.

Verder definiëren we twee functies. De eerste is de functie v. De functie v is de waarderingsfunctie. Je stopt er een wff in, en er komt een waarheidswaarde T of F uit. De functie v werkt altijd ten opzichte van een model. Het kan zijn dat functie v in één model T geeft en in een ander model F bij dezelfde wff.
Dit heeft alles te maken met de tweede functie: de interpretatie functie i. In functie i neemt een constante of predicaat uit je model (L, n, m, etc.) en geeft de interpretatie. Ook functie i verschilt per model. Bijvoorbeeld: de interpretatie van m is Socrates.
Je krijgt dan:

$$i(m) = Socrates \tag{1}$$

Predicaten kunnen natuurlijk ook in de functie i worden gestopt. Je krijgt hierbij niet de vertaling van het predicaat, maar een **verzameling**. Bijvoorbeeld: de interpretatie van predicaat F, geeft de verzameling van alle filosofen in het model.
Een verzameling wordt genoteerd als: $\{a, b, c, etc..\}$ waarbij de letters **elementen** zijn van die verzameling. In ons geval:

$$i(F) = \{Socrates, Plato, Aristoteles\} \tag{2}$$

want Socrates, Plato en Aristoteles zijn de drie filosofen in ons Model. Deze drie namen zijn dus elementen van $i(F)$.
Als laatste moeten we het symbool $\in$ introduceren. Dit symbool zegt niets anders dan 'is een element van'. Bijvoorbeeld: $Aristoteles \in i(F)$ zegt: 'Aristoteles is een element van de verzameling filosofen in het model.'
Met deze definities kunnen we op formele wijzen bepalen of een atoom waar of niet waar is. Ik zal dit laten zien aan de hand van wat voorbeelden.

Stel we willen weten of het atoom Fo waar is. We willen dus de uitkomst van $v(Fo)$. De vraag die we moeten stellen is: 'is $i(o) \in i(F)$?' Volgens ons model krijgen we: $i(o) = Aristoteles$ en $i(F) = \{Socrates, Plato, Aristoteles\}$. Aristoteles is een element uit de verzameling $i(F)$, dus: $v(Fo) \Rightarrow T$.

Nu willen we weten of het atoom Lom waar is. Dit is iets lastiger, want we hebben te maken met een 2-plaatsig predicaat. De verzameling $i(L)$ komt er iets anders uit te zien, het wordt namelijk een verzameling van *geordende paren*, namelijk de paren van meester en leerling. In ons geval gaf Socrates Plato les, en Plato gaf Aristoteles les. Dit zijn de twee geordende paren die we krijgen in de verzameling $i(L)$. Geordende paren noteren we met deze: $\langle\rangle$ haakjes. We krijgen:

$$i(L) = \{\langle Socrates, Plato\rangle, \langle Plato, Aristoteles\rangle\} \tag{3}$$

Deze paren, aangezien Socrates les gaf aan Plato en Plato aan Aristoteles.
We stellen weer dezelfde vraag: 'is $i(om) \in i(L)$?' $i(om) = \langle Aristoteles, Socrates\rangle$. Dit paar komt niet voor in de verzameling $i(L)$, dus $v(Lom) \Rightarrow F$.

Waardering: Atomen en Operatoren Nu we weten hoe de waardes van atomen 'berekend' kunnen worden is de stap om operatoren toe te voegen erg klein. Wanneer er geen variabelen en kwantoren in het spel zijn gaat dit exact hetzelfde als bij de propositielogica. We behandelen de atomen simpelweg als proposities.

Stel we hebben formule A: $(Fo \wedge Lom)$. We weten al dat $Fo \Rightarrow T$ en $Lom \Rightarrow F$. Allebei de kanten van een conjunctie moeten waar zijn om het geheel waar te maken. Als we formule A in de waarderingsfunctie v stoppen, dan krijgen we dus: $v(A) \Rightarrow F$.

Waardering: Kwantoren en Variabelen Als laatste gaan we kijken naar de waardering van formules met kwantoren en variabelen (bijvoorbeeld $\exists xFx$ of $\forall yGy$). Laten we meteen beginnen met een voorbeeld: wanneer is de formule $\forall xFx$ waar? Een eerste gedachte zou kunnen zijn: wanneer alle constanten elementen zijn van $i(F)$. Dus wanneer Fm, Fn, Fo allemaal waar zijn. In ons model is dit het geval, maar toch is $\forall xFx$ niet waar.
Dat komt omdat Fx niet waar is bij **elke uitgebreide waardering**. Een uitgebreide waardering is het invullen van een constante uit het domein op de plek van een vrije variabele. Het domein in ons model is 'alle mensen', dus bij een uitgebreide waardering van Fx kan ik op de plek van x bijvoorbeeld mezelf invullen. Ik ben zelf geen filosoof, dus als ik mezelf op de plaats van x invul is Fx onwaar. Er is dus een uitgebreide waardering van Fx waarbij deze formule niet waar is. Als gevolg is $\forall xFx$ onwaar.

Hoe zit het dan met de existentiële kwantor? In ons geval is $\exists xFx$ waar, want we zouden bijvoorbeeld o kunnen invullen op de plek van x. We weten dat Fo waar is, dus $\exists xFx$ is ook waar. Voor een existentiële kwantor heb je niet altijd een uitgebreide waardering nodig, maar soms ook wel. Stel we hebben de formule: $\exists x \neg Fx$. Deze formule is waar als er minimaal één waardering bestaat waarbij $\neg Fx$ waar is. Al onze constanten voldoen hier niet aan, dus we hebben een uitgebreide waardering nodig. Wederom kan ik mezelf invullen om te zorgen dat $\neg Fx$ waar is. En zo is $\exists x \neg Fx$ ook waar.

De twee definities om te onthouden zijn:

1. $\forall xFx$ is waar als Fx waar is bij alle uitgebreide waarderingen.
2. $\exists xFx$ is waar als Fx waar is bij minimaal één (uitgebreide) waardering

Fx kan staan voor elke wff

Natuurlijk komen er ook kwantoren in combinatie met operatoren voor. Neem de volgende formule:

$$\exists x(Fx \wedge Lxo) \textit{ (Er is een filosoof die Aristoteles lesgeeft.)} \tag{4}$$

Deze formule is waar wanneer $(Fx \wedge Lxo)$ waar is voor minimaal één waardering.
We hebben te maken met een conjunctie dus er moet minimaal één x, element zijn van $i(F)$ én het eerste element zijn van het paar $\langle x, o \rangle$ uit de verzameling $i(L)$. Dat wil zeggen: er moet minimaal één filosoof zijn die Aristoteles lesgeeft. Plato voldoet in ons geval aan beide voorwaarden. We hebben dus geen uitgebreide waardering nodig.

$$v(\exists x(Fx \wedge Lxo)) \Rightarrow T \tag{5}$$

Als laatst zullen we kijken hoe het zit met meerdere kwantoren. Hier gebeurt eigenlijk niets nieuws maar het kan alsnog lastig zijn. We nemen de formule:

$$\exists x \exists y Lxy \textit{ (Iemand geeft les aan iemand.)} \tag{6}$$

Om $v(\exists x \exists y Lxy)$ te berekenen gaan we per kwantor te werk. Eerst krijgen we: $v(\exists x \exists y Lxy) \Rightarrow T$ als $\exists y Lxy$ waar is voor minimaal één waardering waarbij x wordt vervangen.

Als we naar $i(L)$ kijken zien we dat Socrates iemand is die lesgeeft, dus die kunnen we voor x invullen. Daarna krijgen we: $v(\exists yLmy) \Rightarrow T$ als Lmy waar is voor minimaal één waardering waarbij y wordt vervangen.
Als we naar $i(L)$ kijken zien we dat Lmy waar is als we voor y Plato invullen. $v(Lxy) \Rightarrow T$ dus $v(\exists yLmy) \Rightarrow T$ dus $v(\exists x\exists yLxy) \Rightarrow T$.
Wanneer we voor x iemand hebben waarbij we geen y kunnen vinden moeten we een nieuwe x proberen. Natuurlijk is het handig om alvast van tevoren te kijken welke x gaat werken in plaats van elk element uit het domein te proberen.

Deze techniek met de functies v en i is ook meer om te bewijzen dat een waardering klopt. De waardering zelf lukt meestal wel uit je hoofd. Als het domein en de predicaten echter minder intuïtief zijn kan dit niet het geval zijn. In dit geval, en het geval van bewijzen, is deze formele techniek belangrijk.

Als laatst kijken we naar de formule: $\exists x\forall yLxy$ (Er is iemand die iedereen lesgeeft). We krijgen: $v(\exists x\forall yLxy) \Rightarrow T$ als er één valuatie bestaat waarbij $v(\forall yLxy) \Rightarrow T$. Stel we vullen Plato in voor x. We krijgen: $v(\forall yLxy) \Rightarrow T$ wanneer $v(Lny) \Rightarrow T$ voor alle uitgebreide waarderingen. Plato heeft Socrates geen lesgegeven, dus Plato invullen voor x levert geen valuatie op die $\exists x\forall yLxy$ waar laat zijn. Op dezelfde manier zouden we elk mens in het domein kunnen invullen op de plek van x. In dit geval is het wel duidelijk dat er geen x bestaat die iedereen les heeft gegeven. Denk bijvoorbeeld aan een baby van 2 seconden oud die nog nooit les heeft gehad van iemand.
$v(\exists x\forall yLxy) \Rightarrow F$. Met universele kwantoren is het soms niet zo duidelijk, je kan niet altijd weten of elk element in het domein een bepaalde eigenschap heeft, zeker als het domein alle mensen is. In de opdrachten zal het domein daarom klein genoeg blijven om te kunnen werken met universele kwantoren.

Opdrachten 5.5

Neem de volgende vertalingen: Fx = 'x is even', Gx = 'x is oneven', Lxy = 'x is kleiner dan y', m = 4, n = 7, o = 12. Het domein is: $\{4, 7, 8, 11, 12\}$
Geef de waarheidswaardes van de volgende formules:

1. Fn
2. Lnm
3. $\exists xLxn$
4. $(Fn \rightarrow Go)$
5. $\exists x(Fx \wedge Lox)$
6. $\forall x(Fx \leftrightarrow \neg Gx)$
7. $\forall x(Gx \rightarrow Lmx)$
8. $\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Lxy))$

5.6 Distributie van Kwantoren

We weten dat we de existentiële kwantor kunnen omschrijven in de universele en vice versa. (zie blz 32) Dit is een logische equivalentie in QL.

$$\forall x Fx \equiv \neg \exists x \neg Fx \tag{I}$$

We kunnen nog meer als het gaat om logische equivalenties binnen QL. Zo kunnen we kwantoren verdelen over conjuncties, disjuncties en implicaties. Als we bijvoorbeeld zeggen: Alle x zijn F en G. Wanneer we dan zeggen: Alle x zijn F en alle x zijn G, is dat equivalent. In formulevorm:

$$\forall x(Fx \wedge Gx) \equiv (\forall x Fx \wedge \forall x Gx) \tag{II}$$

De universele kwantor is echter niet op die manier te verdelen over de disjunctie. De volgende formule geldt:

$$\neg(\forall x(Fx \vee Gx) \equiv (\forall x Fx \vee \forall x Gx))$$

Dit is intuïtief te begrijpen wanneer we Fx vertalen als 'x is even' en Gx als 'x is oneven'. In de eerste formule tussen de haakjes zeggen we dat alle x even of oneven zijn, dit is waar. In de tweede formule zeggen we dat alle x even zijn of dat alle x oneven zijn, dit is duidelijk onwaar.

De existentiële kwantor kunnen we wel verdelen over de disjunctie.

$$\exists x(Fx \vee Gx) \equiv (\exists x Fx \vee \exists x Gx) \tag{III}$$

De existentiële kwantor is weer niet te verdelen over de conjunctie.
We kunnen de existentiële kwantor verdelen over een implicatie als volgt:

$$\exists x(Fx \to Gx) \equiv (\forall x Fx \to \exists x Fx) \tag{IV}$$

Deze regel is af te leiden uit de voorgaande regels als volgt:

$$\begin{aligned}
&\exists x(Fx \to Gx) && (1)\\
&\equiv \neg\forall x \neg(Fx \to Gx) && (2)\\
&\equiv \neg\forall x(Fx \wedge \neg Gx) && (3)\\
&\equiv \neg(\forall x Fx \wedge \forall x \neg Gx) && (4)\\
&\equiv \neg(\forall x Fx \wedge \neg\exists x Gx) && (5)\\
&\equiv (\forall x Fx \to \exists x Gx) && (6)
\end{aligned}$$

Eigenlijk is (II) de enige distributieregel die we nodig hebben. Regel (IV) is namelijk gewoon af te leiden met regel (II) op de volgende manier:

$$\begin{aligned}
&\exists x(Fx \vee Gx) && (1)\\
&\equiv \exists x \neg(\neg Fx \vee \neg Gx) && (2)\\
&\equiv \neg\forall x(\neg Fx \wedge \neg Gx) && (3)\\
&\equiv \neg(\forall x \neg Fx \wedge \forall x \neg Gx) && (4)\\
&\equiv (\neg\forall x \neg Fx \vee \neg\forall x \neg Gx) && (5)\\
&\equiv (\exists x Fx \vee \exists x Gx) && (6)
\end{aligned}$$

We gebruiken hier ook regel (I) en de wet van De Morgan.
Al deze equivalenties zijn terug te vinden op het formuleblad.

6 Predicatenlogica Bewijzen

Net als bij PL gaan we argumentaties in QL bewijzen met bewijsbomen. In de basis werkt het ook hetzelfde maar door de aanwezigheid van kwantoren komt er toch iets meer bij kijken.

Om te beginnen gebruiken we alle regels voor vertakkingen uit 4.1 op exact dezelfde manier wanneer we werken formules zonder kwantoren. Stel we hebben de formule: $(Fn \vee Gn)$ op een tak staan, dan vertakt deze naar Fn en Gn. Voor de rest blijven de eerste vijf regels uit 4.1 ook hetzelfde.

Laten we een simpel voorbeeld doornemen zonder kwantoren. We nemen de argumentatie:

$$((Fn \wedge Gn) \vee Lmn), \neg Gn \therefore Lmn \tag{1}$$

De interpretatie maakt even niet uit. De stam van de boom bestaat weer uit de premissen en de negatie van de conclusie onder elkaar. Vervolgens kijken we steeds wat waar moet zijn, en zo halen we de wff's uit elkaar totdat de boom klaar is. De bewijsboom komt er zo uit te zien:

$$\begin{array}{lcc}
1. & \multicolumn{2}{c}{(Fn \wedge Gn) \vee Lmn) \checkmark} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{\neg Gn} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\neg Lmn} \\
& \swarrow & \searrow \\
4. & Lmn & (Fn \wedge Gn) \checkmark \\
5. & \otimes & Fn \\
6. & & Gn \\
& & \otimes
\end{array}$$

Alle takken sluiten, de argumentatie is dus bewezen als geldig.

Zoals je ziet gaan bewijsbomen exact hetzelfde als in PL wanneer er geen kwantoren in het spel zijn. Atomen functioneren hier hetzelfde als proposities.

Socrates is sterfelijk We nemen de argumentatie:

$$\forall x(Fx \to Gx), Fn \therefore Gn \tag{2}$$

Je zou deze argumentatie kunnen interpreteren als het eerste syllogisme uit 2.1. We zullen deze nu bewijzen in QL.
We hebben te maken met een universele kwantor, hoe gaan we hier mee om? We beginnen de boom op de manier die we gewend zijn.

$$\begin{array}{lc}
1. & \forall x(Fx \to Gx) \\
2. & Fn \\
3. & \neg Gn
\end{array}$$

We stellen ons nu weer de vraag: wat moet waar zijn? Volgens de boom is $(Fx \to Gx)$ waar voor alle x in ons domein. 'n' (of Socrates) zit sowieso in ons domein want Fn en Gn zitten in de argumentatie. We zouden x in $(Fx \to Gx)$ dus kunnen vervangen door n. $(Fn \to Gn)$ moet dus waar zijn. Dit is dus de volgende wff die we aan onze boom toevoegen. Let erop dat je de wff $\forall x(Fx \to Gx)$ *niet* afvinkt, deze wff kan namelijk met elke constante uit het domein worden 'geactiveerd'. We kunnen een wff met een universele kwantor dus hergebruiken. In dit geval is dat niet nodig want als we $(Fn \to Gn)$ toevoegen sluit te boom. Deze komt er zo uit te zien:

$$
\begin{array}{lcc}
1. & \multicolumn{2}{c}{\forall x(Fx \to Gx)} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{Fn} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\neg Gn} \\
4. & \multicolumn{2}{c}{(Fn \to Gn) \checkmark} \\
 & \swarrow & \searrow \\
5. & \neg Fn & Gn \\
 & \otimes & \otimes
\end{array}
$$

Existentiële kwantor Een wff met een universele kwantor kan met elke constante uit het domein worden geactiveerd, zo ook een constante die al wordt gebruikt in de boom. Bij een existentiële kwantor is dat niet het geval. Een existentiële kwantor kan maar één keer worden geactiveerd, ook moet deze worden geactiveerd met een nieuwe constante die nog niet voorkomt in de boom. We nemen de volgende argumentatie:

$$\exists xFx, \forall x(Fx \to Gx) \therefore \exists xGx \tag{3}$$

(Er is een A; Alle A zijn B; dus er is een B)
We beginnen de boom:

$$
\begin{array}{lc}
1. & \exists xFx \\
2. & \forall x(Fx \to Gx) \\
3. & \neg\exists xGx
\end{array}
$$

Voordat we ook maar iets gaan activeren moeten we de negatie voor de kwantor $\neg\exists x$ weg zien te werken. In paragraaf 5.3 hebben we gezien dat: $\neg\exists x... \equiv \forall x\neg....$ Deze regel gaan we toepassen, we voegen $\forall x\neg Gx$ toe aan de boom.
Nu hebben we alleen nog de existentiële wff $\exists xFx$ over. Deze gaan we activeren met een constante die nog niet voorkomt in de boom. Deze constante noemen we even 'a'. Nu hebben we alleen nog maar universele kwantoren over. Deze kunnen we activeren met elke constante in het domein, dus ook met a. Als we dat doen zijn alle kwantoren weg en kunnen we boom afmaken. De boom komt er zo uit te zien:

$$
\begin{array}{lcc}
1. & \multicolumn{2}{c}{\exists xFx \checkmark} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{\forall x(Fx \to Gx)} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\neg\exists xGx \checkmark} \\
4. & \multicolumn{2}{c}{\forall x\neg Gx} \\
5. & \multicolumn{2}{c}{Fa} \\
6. & \multicolumn{2}{c}{\neg Ga} \\
7. & \multicolumn{2}{c}{(Fa \to Ga) \checkmark} \\
 & \swarrow & \searrow \\
8. & \neg Fa & Ga \\
 & \otimes & \otimes
\end{array}
$$

Nu we een aantal voorbeelden hebben gehad kunnen we kijken naar de volledige systematische regels.

6.1 Systematische Regels QL-Bomen

- Elk punt op een bewijsboom heet een knoop.
- Op elke knoop staat een wff.
- Een pad bestaat uit een verbonden lijn knopen van boven naar beneden.
- Als er op een pad zowel $\neg W$ als W voorkomen, dan is dit pad gesloten. (W kan ook voor complexe wff's staan)
- Als alle paden van een bewijsboom gesloten zijn is de hele boom gesloten, anders niet.
- Neem formule W. In W komt de variabele x voor. Wanneer de formule $\forall xW$ voorkomt op een tak, kan deze formule geactiveerd worden met elke constante die staat voor een element uit het domein. $\forall xW$ wordt niet afgevinkt.
- Neem formule W. In W komt de variabele x voor. Wanneer de formule $\exists xW$ voorkomt op een tak, kan deze formule geactiveerd worden met een nieuwe constante die nog niet voorkwam op dezelfde tak. $\exists xW$ wordt afgevinkt.
- Wanneer er een formule in de vorm: $\neg\forall xW$ voorkomt op een tak, voeg $\exists x\neg W$ toe aan die tak. Vink $\neg\forall xW$ af.
- Wanneer er een formule in de vorm: $\neg\exists xW$ voorkomt op een tak, voeg $\forall x\neg W$ toe aan die tak. Vink $\neg\exists xW$ af.
- De regels voor operatoren zijn hetzelfde als in paragraaf 4.1.

Dit zijn de formele regels. Er zijn ook nog wat handigheidjes om het bewijzen makkelijker te maken.

- Begin altijd met het wegwerken van de negaties voor kwantoren ($\neg\exists x, \neg\forall x$)
- Activeer eerst de existentiële kwantoren, daarna pas de universele.

Opdrachten 6.1

A Bewijs de volgende QL-argumentaties met behulp van bewijsbomen.

1. $\forall x(Fx \to Gx), \neg Gm \therefore \neg Fm$
2. $\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx \wedge Hx) \therefore \exists x(Hx \wedge Gx)$
3. $((Gn \wedge Fn) \to (Lmn \vee Lnm)), \neg(Gn \vee Lmn), Fn \therefore Lnm$
4. $\forall x(Gx \to Fx), \neg\exists xFx \therefore \neg\exists xGx$
5. $\exists x\forall y(Gx \wedge (Fy \to Mxy)), Fm \therefore \exists x(Gx \wedge Mxm)$

B Bewijs de volgende argumentaties in QL met behulp van bewijsbomen.

1. Er is altijd iemand die van je houdt. Wanneer er iemand van je houdt ben je niet verdrietig. Niemand is dus verdrietig.
2. Iedereen bemint een minnaar. Romeo bemint Julia, dus iedereen bemint Julia.
3. Alle natuurkundigen beheersen wiskunde. Wanneer iemand wiskunde beheerst en van filosofie houdt, zal iemand wel geïnteresseerd zijn in formele logica. Wanneer men onderzoek doet naar het ontstaan van het heelal zal iemand ook geïnteresseerd zijn in filosofie. Natuurkundigen die onderzoek doen naar het ontstaan van het heelal zullen dus geïnteresseerd zijn in formele logica.

7 Uitbreidingen van de Predicatenlogica

7.1 Gelijkheid (=)

Met het =-teken kunnen we in QL variabelen en constanten gelijk aan elkaar stellen. Dit breidt ons uitdrukkingsvermogen binnen QL uit.

Kwalitatieve en numerieke gelijkheid We maken onderscheid tussen twee verschillende soorten gelijkheid.
We noemen twee dingen *kwalitatief* gelijk wanneer beide dezelfde eigenschappen hebben. Als ik bijvoorbeeld twee flesjes drinken van dezelfde soort koop, dan zijn deze kwalitatief gelijk. We spreken van *numerieke* gelijkheid wanneer we op twee manieren naar één en hetzelfde object verwijzen.
Bijvoorbeeld: als ik naar een flesje cola verwijs als 'dat flesje cola op tafel' en iemand anders verwijst naar hetzelfde flesje als 'dat flesje frisdrank op de keukentafel', Dan zijn dat flesje cola op tafel en dat flesje frisdrank op de keukentafel numeriek gelijk aangezien het één en hetzelfde ding is. Het =-teken in QL staat voor numerieke gelijkheid.

Eigenschappen van gelijkheid De gelijkheid heeft verschillende eigenschappen die hieronder opgesomd worden.

1. Reflexieve eigenschap: a = a.
2. Symmetrische eigenschap: als a = b, dan geldt: b = a.
3. Transitieve eigenschap: als a = b en b = c, dan geldt: a = c.
4. De wet van Leibniz: als a = b en Fa, dan Fb. Of: als a gelijk is aan b, dan heeft b elke eigenschap die a ook heeft.

7.2 Het =-teken in QL

In de formele taal veranderen er een aantal dingen wanneer we de gelijkheid toevoegen. Ten eerste is er een nieuwe soort atomaire wff. Namelijk:

- $(a = b)$, waarbij a en b kunnen staan voor elk individueel symbool, is een atomaire wff.

Natuurlijk kan een gelijkheid ook twee dezelfde symbolen bevatten zoals $(x = x)$.
Nu is de vraag hoe we dit atoom een waarheidswaarde toekennen. Dit is erg simpel. Het atoom $(a = b)$ is alleen waar wanneer a en b verwijzen naar hetzelfde ding.

Nieuwe Mogelijkheden Zoals ik al eerder zei geeft het =-teken de mogelijkheid om meer zinnen uit te drukken in QL dan voorheen. Ik zal nu een aantal voorbeelden doornemen. We nemen het domein 'mensen' en de volgende vertalingen:

- m = Spiderman
- n = Venom
- o = Peter Parker
- Fx = 'x is een superheld'
- Gx = 'x is een schurk'
- Lxy = 'x verslaat y'

1. Een simpel voorbeeld is: *'Spiderman is Peter Parker'.* Dit zouden we natuurlijk vertalen als:
$$(m = o) \tag{1}$$
Deze gelijkheid is waar aangezien Peter Parker de naam is van de jongen die achter het masker van Spiderman schuilt.

2. Met de existentiële kwantor drukken we uit: 'er zijn één of meer'. Met het =-teken kunnen we nu ook uitdrukken dat er ergens precies één van is. Stel we nemen de zin: *'Spiderman is de enige superheld'.* We kunnen deze zin anders verwoorden door te zeggen: 'Spiderman is een superheld, en als een ander persoon ook een superheld is, dan is deze persoon Spiderman.' Je ziet al waar de gelijkheid aan bod komt. In QL wordt deze zin:
$$(Fm \wedge \forall x(Fx \to (x = m))) \tag{2}$$

3. We kunnen de uitspraak in het vorige voorbeeld ook generaliseren en zeggen: *'er is precies één Superheld'.* We vervangen '*m*' hier voor een variabele en kwantificeren deze met de existentiële kwantor. Het resultaat is de volgende formule:
$$\exists x(Fx \wedge \forall y(Fy \to (x = y))) \tag{3}$$
Deze formule kunnen we korter schrijven als:
$$\exists x \forall y(Fy \leftrightarrow (x = y)) \tag{4}$$
Wellicht lijkt het alsof we zijn vergeten dat x de eigenschap F heeft in deze formule (4), maar dat is niet zo. Als we een willekeurige y nemen, en deze blijkt de eigenschap F te hebben, dan geldt: $(x = y)$ en dan heeft x deze eigenschap dus ook. Als een y de eigenschap F niet heeft, dan is y niet gelijk aan x.

4. Naast 'precies één', kunnen we ook 'maximaal één' – dus één of nul – uitdrukken. Stel we willen zeggen: *'er is maximaal één superheld'.* We kunnen dit verwoorden als: Wanneer een y en een x allebei een superheld zijn, zijn x en y dezelfde persoon. Dit is anders dan voorbeeld 2 aangezien we hier een soort regel opstellen en niet zeggen dat er daadwerkelijk een superheld is.
In QL wordt de zin:
$$\forall x \forall y((Fx \wedge Fy) \to (x = y)) \tag{5}$$

5. Het laatste voorbeeld dat ik zal geven heeft te maken met tweetallen. Stel we willen zeggen: *'er zijn twee of meer superhelden.'* Een andere verwoording is: Een y is een superheld, een x is een superheld en x is niet dezelfde persoon als y.
   In QL wordt dit:
$$\exists x \exists y((Fx \wedge Fy) \wedge \neg(x = y)) \tag{6}$$
   Stel we willen zeggen: *'er zijn precies twee superhelden'*. Het enige wat we moeten toevoegen aan de formule hiervoor is 'als er een z is die F is, dan is die z gelijk aan x of y'. In QL zou dat vertalen naar:
$$\forall z(Fz \rightarrow ((z = x) \vee (z = y))) \tag{7}$$
   Nu nemen we de conjunctie van de twee voorgaande formules en krijgen we: *'er zijn precies twee superhelden'*.
   In QL:
$$(\exists x \exists y((Fx \wedge Fy) \wedge \neg(x = y)) \wedge \forall z(Fz \rightarrow ((z = x) \vee (z = y)))) \tag{8}$$

7.3 Bewijzen met Gelijkheden

Het is een kleine stap om gelijkheden op te nemen in ons systeem van bewijzen.
We nemen de argumentatie: Spiderman is een superheld, Peter Parker is Spiderman dus Peter Parker is een superheld. In QL wordt deze argumentatie:
$$Fm, (m = o) \therefore Fo \tag{1}$$
We beginnen de bewijsboom zoals altijd: de premissen en de negatie van de conclusie.

1.	Fm
2.	$(m = o)$
3.	$\neg Fo$

Hoe gaan we deze boom sluiten? Heel simpel: een van de premissen is: $(m = o)$. Over de gelijkheid weten we dat elke eigenschap die m heeft, o ook heeft. We zouden m dus kunnen vervangen met o op de tak waar die gelijkheid voorkomt. Als we dat in onze boom doen krijgen we Fo onder aan de boom. De boom sluit hier en de argumentatie is als geldig bewezen.

1.	Fm
2.	$(m = o)$
3.	$\neg Fo$
4.	Fo
	$\otimes$

7.4 Systematische Regels voor Gelijkheden

De algemene regels voor bewijsbomen met gelijkheden:

- Neem wff A, in A komt de constante a voor. Wanneer op dezelfde tak als A de formule '(a = b)' voorkomt mag één of meer instantie van a in W vervangen worden door b. De nieuwe formule wordt toegevoegd aan die tak. Formule A, en '(a = b)' worden niet afgevinkt.
- Wanneer er op een tak een formule in de vorm: '$\neg(a = a)$' voorkomt, dan is deze tak gesloten.

Zonder die laatste regel zouden we waarheden als: $\forall x(x = x)$ niet kunnen bewijzen.

1.	$\neg\forall x(x = x)$ ✓
2.	$\exists x\neg(x = x)$ ✓
3.	$\neg(a = a)$
	$\otimes$

Opdrachten 7.4

A Bewijs de eigenschappen van gelijkheid uit paragraaf 7.1 in QL.

B Vertaal de volgende zinnen naar QL, gebruik het model uit paragraaf 7.2.

1. Spiderman is Peter Parker, en Spiderman is niet Venom.
2. Venom is niet de enige schurk, maar Spiderman is wel de enige superheld.
3. Er is maar één iemand die Spiderman verslaat.
4. Er is maar één iemand die Venom verslaat, en het is Spiderman.
5. Alleen een schurk die niet Venom is, verslaat Spiderman.

C Vertaal de volgende argumentaties naar QL en bewijs ze.

1. Spiderman is Peter Parker. Spiderman is geen schurk dus Peter Parker is dat ook niet.
2. Alleen een schurk die niet Venom is, verslaat Spiderman. Venom is de enige schurk dus niemand verslaat Spiderman.
3. Spiderman verslaat alle schurken, en niemand anders. Er zijn precies twee schurken dus Spiderman verslaat precies twee personen.

7.5 Russells Theorie van Beschrijvingen

We kennen beschrijvingen van twee types; *onbepaalde beschrijvingen* en *bepaalde beschrijvingen.* Met bepaalde beschrijvingen bedoelen we beschrijvingen in de vorm: 'De F'. Met onbepaalde beschrijvingen bedoelen we beschrijvingen in de vorm: 'Een F'. 'De F', verwijst naar één specifiek object, terwijl 'Een F' dat niet doet. Wanneer we de zin nemen: 'Sommige filosofen zijn wiskundigen', dan hebben we te maken met onbepaalde beschrijvingen. Deze beschrijvingen hebben we al behandelt.
'Sommige filosofen zijn wiskundigen' wordt iets als: $\exists x(Fx \wedge Gx)$.

Wanneer we kijken naar bepaalde beschrijvingen krijgen we te maken met lastige filosofische vragen. Er zijn namelijk een aantal logische problemen met bepaalde beschrijving zoals: *'De koning van Frankrijk is kaal'.* Je zult misschien zeggen: 'Frankrijk heeft geen koning, dus de koning van Frankrijk kan niet kaal zijn'. Maar als we dan zeggen 'De koning van Frankrijk is niet kaal'. Is deze zin dan wel waar? Het is immers het tegenovergestelde van de zin waarvan we zeiden dat deze onwaar is. Russell zag dit probleem en stelde de volgende manier voor om zinnen als 'De koning van Frankrijk is kaal' uit te drukken.
We nemen voor 'is een koning van Frankrijk' het predicaat F, en voor 'is kaal' het predicaat G. Russell zou de zin vertalen als: Er is een F, maximaal één ding is F en wat F is, is G. Deze vertalingen hebben we al geleerd. We krijgen de volgende formule:

$$\exists x((Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow (x = y))) \wedge Gx) \tag{1}$$

Volgens Russells theorie is een bepaalde beschrijving dus altijd waar of onwaar. Als er geen x is die F is, dan is elke conjunctie in de vorm $\exists x(Fx \wedge ...)$ dus ook onwaar.

Laten we terugkomen op de zin: 'de koning van Frankrijk is niet kaal'. Je zult waarschijnlijk zeggen: 'dat kan niet kloppen, de koning van Frankrijk bestaat niet.' Eerder zeiden we echter dat het tegenovergestelde al niet waar was. Loopt de wet van uitgesloten derde hiermee in de soep? Volgens sommigen wel, maar Russell heeft een antwoord op dit probleem dat niet zo drastisch is. Stel we nemen voor de vertaling van 'de koning van Frankrijk is niet kaal' gewoon de negatie van formule 1. We krijgen dit:

$$\neg\exists x((Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow (x = y))) \wedge Gx) \tag{2}$$

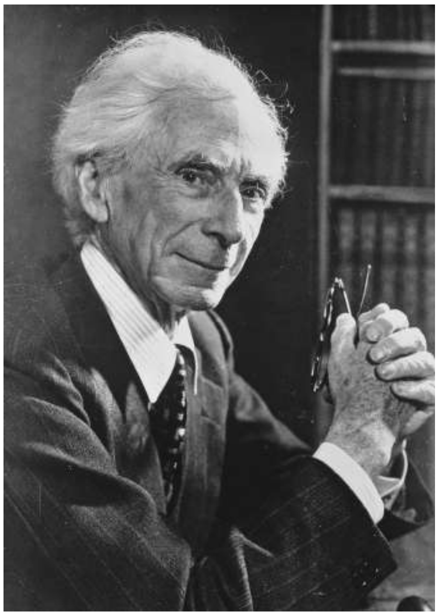
We hebben al gezien dat formule 1 onwaar is, want Frankrijk heeft geen koning. De negatie van formule 1 is dus waar. Dit is heel vreemd; we zeggen nu dat de koning van Frankrijk niet kaal kan zijn omdat hij niet bestaat maar dat hij wel bestaat en haar heeft. Formule 2 is overduidelijk geen correcte vertaling voor de zin 'de koning van Frankrijk is niet kaal'. Wat dan wel? Het heeft allemaal te maken met de scope van de negatie. Neem de volgende vertaling:

$$\exists x((Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow (x = y))) \wedge \neg Gx) \tag{3}$$

In dit geval is de formule ook onwaar aangezien er nog steeds geen x is die voldoet aan Fx. We hebben nu geen tegenspraak meer tussen de twee uitspraken. Deze oplossing is erg elegant. Er zijn echter logici en filosofen die vinden dat een zin als 'de koning van Frankrijk is kaal' helemaal geen waarheidswaarde toegekend moet worden. Dit filosofische debat gaan we niet tot een conclusie brengen in dit boekje, dus we laten het bij deze logische vertalingen die redelijk in de buurt komen bij wat we willen uitdrukken.

7.6 ★ Bertrand Russell

Bertrand Russell was een wiskundige en logicus, maar ook een filosoof en activist. Hij is geboren in 1872 in Monmouthshire in Wales. Op jonge leeftijd verloor Russell zijn ouders en zijn zus en werd hij opgevoed door zijn grootouders en later alleen door zijn oma. In 1890 gaat hij naar Trinity College in Cambridge waar hij Whitehead, met wie hij later samen werkt, ontmoet. In zijn leven heeft hij naast de wiskunde, waar we zo op komen, ook heel veel gedaan op het gebied van politiek en sociaal activisme. Hij heeft altijd gestreden voor vreedzaamheid en tegen nucleaire wapens. Hij is in zijn leven meerdere keren naar de gevangenis gegaan voor zijn meningen over oorlog en zijn deelname aan anti-kernwapen protesten. Over zijn eigen leven heeft Russell gezegd: *Three passions, simple but overwhelmingly strong, have governed my life: the longing for love, the search for knowledge, and unbearable pity for the suffering of mankind. These passions, like great winds, have blown me hither and thither, in a wayward course, over a great ocean of anguish, reaching to the very verge of despair. (...) With equal passion I have sought knowledge. I have wished to understand the hearts of men. I have wished to know why the stars shine. And I have tried to apprehend the Pythagorean power by which number holds sway above the flux. A little of this, but not much, I have achieved. (...) This has been my life. I have found it worth living, and would gladly live it again if the chance were offered me. (Russell, 1967)* In 1970 is hij op 97 jarige leeftijd overleden.



Figuur 6: Bertrand Russell

Russells theorie van beschrijvingen hebben we al behandeld. Hiernaast heeft hij echter nog veel meer voor de logica betekend. In paragraaf 5.4 over Frege zeiden we dat Frege het doel had om aan te tonen dat de wiskunde te reduceren was tot pure logica. De school van filosofie die dit doel heeft is het logicisme. Frege stopte met zijn logicistische project vanwege een inconsistentie in zijn systeem van verzamelingenleer die Russell gevonden had. Deze inconsistentie heet de russellparadox.

7.6.1 De Russellparadox

De russellparadox heeft te maken met hoe verzamelingen worden gevormd binnen de verzamelingenleer. We nemen bijvoorbeeld T om de eigenschap 'theepot' uit te drukken. De verzameling S van alle theepotten zou op de volgende manier worden gedefinieerd:

$$S = \{x|T(x)\} \tag{1}$$

Dit zegt: 'S is de verzameling van alle x waarvoor geldt dat T(x)'. Je zou T kunnen zien als een predicaat. Deze manier om een verzameling te vormen gaat uit van het axioma dat wanneer je een eigenschap F(x) hebt, er een verzameling bestaat waar precies alle x'en inzitten die aan F(x) voldoen. Dit is de verzamelingenleer zoals Frege hem had bedacht. Dit axioma zorgt echter voor de russellparadox. Stel we nemen als eigenschap: $(x \in x)$. We maken de verzameling R als volgt:

$$R = \{x|\neg(x \in x)\} \tag{2}$$

Wat dit zegt is dat R de verzameling is van precies alle elementen die geen onderdeel uitmaken van zichzelf. Dit kunnen dus ook verzamelingen zijn. De belangrijke vraag is: 'is R een onderdeel van zichzelf?'.
Als dit niet zo is, dan voldoet R dus aan de eigenschap $\neg(x \in x)$. In dat geval zit R dus in de verzameling R. Maar als R een onderdeel van zichzelf is, dan is R geen element in R. Dus dan is het weer zo dat . . . ad infinitum. Dit is het russellparadox. (Irvine en Deutsch, 2021)
Russell gaf een oplossing van deze paradox met zijn theorie van typen. Dit is een theorie die buiten de scope van dit boekje valt. Deze theorie van typen werkte hij in 1903 uit in '*The Doctrine of Types*'. In 1908 verbeterde hij deze theorie in '*Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*' en wederom in zijn meesterwerk: '*Principia Mathematica*' dat hij met Whitehead maakte. Dit werk is hét voorbeeld van logicisme; het werk probeerde de gehele wiskunde vast te leggen in de logica. Hieronder zie je een voorbeeld van het bewijs dat '1+1 = 2' uit Principia Mathematica. Dit bewijs komt pas rond pagina 360.

$*54 \cdot 43$. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$\vdash . *54 \cdot 26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota{}^{\backprime}x . \beta = \iota{}^{\backprime}y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$

$$[*51 \cdot 231] \qquad \equiv . \iota{}^{\backprime}x \cap \iota{}^{\backprime}y = \Lambda .$$

$$[*13 \cdot 12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . *11 \cdot 11 \cdot 35 . \supset$$

$$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota{}^{\backprime}x . \beta = \iota{}^{\backprime}y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$

$$\vdash . (2) . *11 \cdot 54 . *52 \cdot 1 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

(Russell en Whitehead, 1910)

Russell en Whitehead dachten dat ze dit project in een jaar konden doen, het duurde echter meer dan een decennium. Of Russell en Whitehead geslaagd zijn in hun doel om de gehele wiskunde te reduceren tot logica is niet helemaal het geval. Dit was ook niet het enige doel van hun werk. In Principia Mathematica worden ontzettend veel nieuwe wiskundige technieken bedacht en de notatie was ook een grote stap vooruit ten opzichte van die van bijvoorbeeld Frege. Principia Mathematica heeft in ieder geval ook gezorgd voor een hernieuwde interesse in de logica en in het logicisme. Ook heeft het de weg vrijgemaakt voor nieuwe baanbrekende ontdekkingen zoals de onvolledigheidsstelling van Gödel.
Het zal de lezer wellicht verbazen dat er ook wat humoristische opmerkingen staan in Principia. Zo wordt er gezegd dat het niet mogelijk is om alle functies van een bepaald type $\phi!\hat{z}$ op te noemen *'because life is too short'.* Wellicht is het leven ook te kort om alle drie de 600 pagina dikke boekdelen door te spitten, maar dat mag de lezer zelf uitmaken.

7.7 Logische Onderbouwing van de Wiskunde

We zagen net in paragraaf 7.6 over Russell zijn bewijs voor 1 + 1 = 2 in Principia Mathematica. Een bewijs als dit is een typisch voorbeeld van logicisme; het creëren van een logische onderbouwing voor de wiskunde.
Wanneer we gelijkheden meenemen in onze predicatenlogica kunnen we uitdrukken dat er bijvoorbeeld precies één superheld is. We kunnen het begrip 'superheld' natuurlijk ook weglaten. Dan zouden we zeggen dat er precies één is. Dit is niets anders dan het getal 1 uitdrukken. We weten ook hoe we 'precies 2' kunnen uitdrukken. QL verschilt niet zo veel van het systeem dat Russell gebruikte voor zijn bewijs. Het zal je dus ook niet verbazen dat we de argumentatie '1 + 1 = 2' gewoon kunnen uitdrukken in onze taal. We kunnen de stelling ook bewijzen met onze bewijsboomtechniek.
Als eerst moeten we bedenken hoe we '1 + 1 = 2' precies gaan verwoorden. We kunnen dit niet letterlijk doen in QL, want we hebben niet iets als getallen of dingen als plus en min. We moeten een verwoording vinden die binnen QL mogelijk is en die *isomorf* is met '1 + 1 = 2'. Isomorf houdt in dat we de stelling in QL exact kunnen interpreteren als '1 + 1 = 2' en dat dit exact dezelfde wiskundige structuur weergeeft.
Stel we nemen de argumentatie: 'Er is precies één superheld en er is precies één Schurk. Schurken kunnen geen superhelden zijn. Er zijn dus precies twee personen die superheld of schurk zijn.'
Er staat hier niet letterlijk '1 + 1 = 2', maar deze zin kan wel zo geïnterpreteerd worden; er is spraken van isomorfie. We kunnen deze uitspraak over superhelden en schurken weer iets formeler verwoorden op een manier die nog steeds isomorf is aan de eerste zin:

Er is precies één x die F is, er is precies één x die G is. Geen x is F en G tegelijk. Er zijn dus precies twee x'en of y'en die F of G zijn.

Dit zijn allemaal proposities die redelijk goed te verwoorden zijn in QL. Onze argumentatie wordt:

$$\exists x(Fx \land \forall y(Fy \to (y = x))), \exists x(Gx \land \forall y(Gy \to (y = x)), \neg\exists x(Fx \land Gx) \therefore$$

$$\exists x\exists y((((Fx \lor Gx) \land (Fy \lor Gy)) \land \neg(x = y)) \land \forall z((Fz \lor Gz) \to ((z = x) \lor (z = y))))$$

De liefhebber kan proberen dit bewijs zelf uit te voeren. Het kost je ongeveer een A4'tje en als het goed is heb je alles kennis die nodig is. Het bewijs zal niet meer passen op deze pagina en wordt gegeven op de volgende.
We zijn natuurlijk niet beperkt tot '1 + 1 = 2'. Met onze kennis kunnen we in ieder geval alle sommen in de vorm 'a + b = c' uitrukken in QL en bewijzen. '2 + 1 = 3' ziet er bijvoorbeeld zo uit in QL:

$\exists x\exists y((((Fx \lor Gx) \land (Fy \lor Gy)) \land \neg(x = y)) \land \forall z((Fz \lor Gz) \to ((z = x) \lor (z = y))))$,
$\neg\exists x(((Fx \land Gx) \lor (Gx \land Hx)) \lor (Hx \land Fx))$,
$\exists x(Hx \land \forall y(Hy \to (x = y))) \therefore$
$\exists x\exists y\exists z((((((Fx \lor Gx) \lor Hx) \land ((Fy \lor Gy) \lor Hy)) \land ((Fz \lor Gz) \lor Hz))\land$
$\neg(((x = y)\lor(x = z))\lor(z = y)))\land\forall w(((Fw\lor Gw)\lor Hw) \to (((w = x)\lor(w = y))\lor(w = z))))$
Het bewijs wordt overgelaten aan de lezer.

Bewijs. $1 + 1 = 2$

1.	$\exists x(Fx \wedge \forall y(Fy \to (y = x)))$ ✓							
2.	$\exists x(Gx \wedge \forall y(Gy \to (y = x))$ ✓							
3.	$\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$ ✓							
4.	$\neg\exists x\exists y((((Fx \vee Gx) \wedge (Fy \vee Gy)) \wedge \neg(x = y)) \wedge \forall z((Fz \vee Gz) \to ((z = x) \vee (z = y))))$ ✓							
5.	$\forall x\neg(Fx \wedge Gx)$							
6.	$\forall x\forall y\neg((((Fx \vee Gx) \wedge (Fy \vee Gy)) \wedge \neg(x = y)) \wedge \forall z((Fz \vee Gz) \to ((z = x) \vee (z = y))))$							
7.	$(Fa \wedge \forall y(Fy \to (y = a)))$ ✓							
8.	$(Gb \wedge \forall y(Gy \to (y = b)))$ ✓							
9.	Fa							
10.	Gb							
11.	$\forall y(Fy \to (y = a)))$							
12.	$\forall y(Gy \to (y = b)))$							
13.	$\neg((((Fa \vee Ga) \wedge (Fb \vee Gb)) \wedge \neg(a = b)) \wedge \forall z((Fz \vee Gz) \to ((z = a) \vee (z = b))))$ ✓							
14.	$\neg(((Fa \vee Ga) \wedge (Fb \vee Gb)) \wedge \neg(a = b))$ ✓				$\neg\forall z((Fz \vee Gz) \to ((z = a) \vee (z = b)))$ ✓			
15.	$\neg((Fa \vee Ga) \wedge (Fv \vee Gb))$ ✓		$(a = b)$					
16.	$\neg(Fa \vee Ga)$ ✓	$\neg(Fb \vee Gb)$ ✓						
17.	$\neg Ga$	$\neg Fb$						
18.	$\neg Fa$	$\neg Gb$						
19.	$\otimes$	$\otimes$	$\neg(Fa \wedge Ga)$ ✓					
20.			Ga					
21.			$\neg Fa$	$\neg Ga$				
22.			$\otimes$	$\otimes$	$\exists z\neg((Fz \vee Gz) \to ((z = a) \vee (z = b)))$ ✓			
23.					$\neg((Fc \vee Gc) \to ((c = a) \vee (c = b)))$ ✓			
24.					$(Fc \vee Gc)$ ✓			
25.					$\neg((c = a) \vee (c = b))$ ✓			
26.					$\neg(c = a)$			
27.					$\neg(c = b)$			
28.					Fc		Gc	
29.					$(Fc \to (c = a))$ ✓		$(Gc \to (c = b))$ ✓	
30.					$\neg Fc$	$(c = a)$	$\neg Gc$	$(c = b)$
					$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$

7.8 ★ Gödels Onvolledigheidsstelling

In paragraaf 7.6 over Russell en zijn Principia Mathematica had ik al gezegd dat Principia Mathematica de baan vrijmaakte voor nieuwe ontdekkingen. Een van die ontdekkingen is de onvolledigheidsstelling van Gödel. In deze paragraaf zal ik deze stelling uitleggen en een omschrijving geven van het bewijs. Ik baseer de omschrijving van het bewijs op een hoofdstuk uit het fantastische boek 'Gödel Escher Bach' (Hofstadter, 1979, p.509). Er zullen dus wat manieren van notatie zijn die niet helemaal overeenkomen. Gödel baseerde zijn bewijs op de notatie van Principia Mathematica.

De naam van de stelling zegt het al. Gödel bewees dat het logische bouwwerk van Principia Mathematica — dat ik als geheel ga afkorten als PM — onvolledig is. Dit houdt in dat er waarheden zijn die uit te drukken zijn in PM, maar niet te bewijzen zijn. Sterker nog, hij bewees dat elk formeel axiomatisch systeem (gebaseerd op axioma's), onvolledig is.
Deze onvolledigheid kan door twee dingen komen. Of het systeem is simpelweg niet 'sterk' genoeg om alle primitief recursieve waarheden (hier komen we zo op) uit te drukken. Of het systeem is wel sterk genoeg, en daardoor kwetsbaar voor het bewijs van Gödel. Voor Principia Mathematica is het tweede het geval, dit is waarom dit werk zo essentieel was voor Gödel.

Primitief recursief: Een primitief recursieve waarheid is een waarheid over getallen die berekeningen bevat die altijd een voorspelbaar eindpunt bereiken (Hofstadter, 1979). Voor de uitleg van het bewijs van Gödel is het niet super belangrijk om te begrijpen wat dit precies inhoudt. Het is wel belangrijk om te weten dat een systeem sterk genoeg is als het alle primitief recursieve waarheden kan uitdrukken. Een eigenschap die gecontroleerd kan worden in een procedure die een voorspelbaar eindpunt bereikt noemen we een primitief recursief predicaat.

$$\text{Deze zin is onwaar.} \tag{1}$$

Deze zin wordt ook wel de leugenaarsparadox genoemd en lijkt ook op de titel van dit boekje. Wanneer je gaat kijken of deze zin waar is kom je in een eindeloze spiraal van tegenstellingen. Deze paradox rust op hetzelfde principe als het bewijs van Gödel: zelfreferentie. Zelfreferentie leidt altijd tot paradoxen.
Russell begon zijn project over de theorie van de typen en schreef met Whitehead Principia Mathematica vanwege de russellparadox. Een paradox die ook weer met zelfreferentie te maken heeft. Juist om zelfreferentie te voorkomen stampten ze hun driedelige logische bouwwerk uit de grond. Gödel zag echter dat zelfreferentie inherent was aan formele systemen. Als het hem zou lukken om PM uitspraken te laten doen over zichzelf, dan kon hij iets als de leugenaarsparadox dit systeem binnensmokkelen. Dit is precies wat hij heeft gedaan.

7.8.1 Gödelgetallen

Het eerste onderdeel van het bewijs zijn de Gödelgetallen. Een Gödelgetal is een getal dat isomorf is aan een formule binnen PM. Zoals ik zal zei houdt isomorf in dat het één een afspiegeling is van het ander op een manier die het onderliggende systeem behoudt. Hoe worden deze Gödelgetallen gevormd? Dit is eigenlijk heel simpel. Elk symbool in PM krijgt een eigen nummer. Hieronder zie je een aantal vertalingen die Gödel zelf gebruikte in 1930.

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica etc. 179

„0“ ... 1	„$\vee$“ ... 7	„(“ ... 11
„f“ ... 3	„Π“ ... 9	„)“ ... 13
„$\sim$“ ... 5		

(Gödel, 1930)

Vervolgens maakte hij gebruik van de hoofdstelling van de rekenkunde. Namelijk dat elk getal groter dan 1 precies op één unieke manier geschreven kan worden als een product van priemgetallen. Bijvoorbeeld:

$$12 = 2^2 \cdot 3^1 \text{ en } 11880 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \tag{2}$$

Het symbool voor '=' staat niet in het plaatje hierboven. Stel we nemen voor = even het nummer 2. 0 = 0 zouden we dan, met 1, 2 en 1, omzetten in een Gödelgetal als volgt:

$$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90 \tag{3}$$

Het Gödel getal van $0 = 0$ is dus 90 in ons voorbeeld. Door de hoofdstelling van rekenkunde is het zo dat we deze formule altijd terug zullen krijgen uit het getal 90. Het getal 90 is dus isomorf aan $0 = 0$, het kan dus gezien worden als een formule binnen PM. Het getal 90 is echter ook gewoon een getal, en getallen kunnen binnen PM worden weergeven. Alle primitief recursieve eigenschappen van getallen kunnen worden weergeven binnen PM. Maar getallen kunnen dus ook isomorf zijn aan formules van PM. Hier hebben we de zelfreferentie te pakken. Een systeem dat uitspraken doet over getallen kan worden uitgedrukt in getallen waardoor het vervolgens uitspraken kan doen over zichzelf.

7.8.2 Uitspraken over PM

De eerste primitief recursieve eigenschap die wordt gebruikt voor het bewijs van Gödel is de eigenschap: '*bewijspaar*'. Een bewijspaar is een paar getallen m en n waarvoor geldt:

'm en n zijn een bewijspaar als m het Gödelgetal van een afleiding in PM is waarvan n het Gödelgetal van de onderste regel, ofwel de conclusie, is.'

(Hofstadter, 1979)
Ik zal de volgende notatie gebruiken:

$$Bewijspaar(m, n) \text{ of } B(m, n) \tag{4}$$

Het is goed om te snappen dat deze eigenschap primitief recursief is, maar de volgende eigenschap niet:

$$\exists m B(m, n) \tag{5}$$

Dit zegt namelijk dat er een getal m is dat het bewijs is van formule n. Dat houdt in: 'm is een stelling in PM'. Het zou heel fijn zijn als deze eigenschap primitief recursief was, dan zouden alle wiskundige bewijzen namelijk gedaan kunnen worden door een computer binnen een voorspelbare tijd. Dit is hoogstwaarschijnlijk niet het geval en heeft te maken met een heel ander wiskundig probleem waar we het nu zeker niet over gaan hebben.

De volgende eigenschap die we nodig hebben is *substitutie*. Substitutie is niets anders dan een Gödelgetal invullen op de plek van een vrije variabele in een andere formule; eigenlijk het Gödelgetal ervan. We drukken substitutie uit als een 3-plaatsig predicaat:

$$Sub(x, y, z) \tag{6}$$

- x = het Gödelgetal van de oorspronkelijke formule.
- y = het Gödelgetal van de formule die je in de oorspronkelijke formule stopt.
- z = de formule die deze substitutie oplevert.

Ook deze substitutie eigenschap is primitief recursief. Dit is van belang want alle eigenschappen die we hier definiëren moeten zijn uit te drukken in PM.

Om onze gereedschapskist compleet te maken definiëren we een laatste eigenschap: de *aritmoquine*. Dit is een aangepaste versie van de substitutie. De open variabelen x en y worden in het geval van de aritmoquine namelijk hetzelfde. Je vult dus een formule in, in zichzelf.

$$Aritmoquine(x, y) = Arq(x, y) = Sub(x, x, y) \tag{7}$$

Nu kunnen we het getal van Gödel maken. Eerst maken we een formule o met de vrije variabele z:

$$o = \neg\exists x \exists y (B(x, y) \wedge Arq(z, y) \tag{8}$$

De paradox ligt in het Gödelgetal G. G is niets anders dan de aritmoquine van het gödelgetal van o:

$$Arq(o, G) = \neg\exists x \exists y (B(x, y) \wedge Arq(o, y)) = G \tag{9}$$

Deze formule, of dit Gödelgetal, G zegt: Er zijn geen getallen x en y die een bewijspaar vormen en waarvan y de aritmoquine van o is. Korter gezegd:

Er is geen getal x dat een bewijspaar vormt met de aritmoquine van o (dus met y). (10)

Maar G is de aritmoquine van o, zoals we net hebben gezegd. Er is dus geen getal dat een bewijspaar vormt met G. Dus:

G is geen stelling van PM (11)

Dus eigenlijk:

G: Ik ben geen stelling van PM (12)

Zoals je ziet lijkt dit sterk op de leugenaarsparadox (1). Er is een zin die over zichzelf spreekt, maar deze is volledig uit te drukken in PM zoals we in (9) zagen.
Wat betekent dit? Als G een stelling zou zijn in PM, dan drukt hij een waarheid uit. Die waarheid is dat hij zelf geen stelling is van PM. Dit is een tegenspraak, G kan dus geen stelling zijn. Als G geen stelling is, dan is G waar. G is dus een waarheid, maar geen stelling. Er zijn dus waarheden die niet te bewijzen zijn in PM. PM is onvolledig.

Dit bewijs werkt niet alleen voor PM. Elk systeem dat sterk genoeg is om alle primitief recursieve eigenschappen uit te drukken is kwetsbaar voor deze techniek van Gödel. Je kan zelf de schok indenken voor het logicisme en voor de wiskunde in het algemeen die dit bewijs van Gödel teweegbracht. Het bouwwerk Principia Mathematica leek in te storten. We moeten echter niet vergeten dat Gödels werk op de schouders van reuzen stond. Zonder het werk van Russell, Whitehead, Frege en alle andere logici die ervoor kwamen was het niet gebeurt. Ook moeten we begrijpen dat dit bewijs van Gödel geen doodsvonnis is geweest voor de logica.

8 ★ Modale Logica

Modale logica is een dubbelzinnige term. Ten eerste is modale logica een verzamelnaam voor verschillende uitbreidingen en versies van propositie- en predicatenlogica. Onder deze verzamelnaam vallen systemen zoals temporele logica of deontische logica. De eerste houdt zich bezig met de logica van tijd en de tweede met de logica van wat toegestaan, verplicht en verboden is. Onder de verzamelnaam valt paradoxaal genoeg ook de modale logica zelf. De modale logica als logisch systeem houdt zich bezig met wat noodzakelijk en mogelijk is. Die modale logica is waar we het nu als eerste over gaan hebben.

8.1 Noodzakelijk en Mogelijk

Als eerste zullen we het hebben over een modale propositielogica. Alle symbolen van de propositielogica die we al kennen nemen we over. Ook voegen we twee nieuwe symbolen toe. Deze kan je zien als een soort kwantoren, maar wees voorzichtig met het trekken van parallellen. De twee nieuwe symbolen zijn: $\Box$ en $\Diamond$. De betekenis:

- $\Box A$ = Het is noodzakelijk dat A
- $\Diamond A$ = Het is mogelijk dat A

Hier staat A voor een propositie of voor een hele wff.

Net als de kwantoren $\forall$ en $\exists$ kunnen we deze nieuwe operatoren in elkaar omschrijven met behulp van negaties. Namelijk:

$$\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A \text{ of } \neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$$

Ga het maar na: Als A noodzakelijkerwijs zo is, dan is het niet zo dat niet A mogelijk is. Of als A niet noodzakelijk is, dan is het mogelijk dat A niet het geval is. Als we zeggen: $\neg\Diamond A$ (A is onmogelijk), dan kunnen we ook zeggen: Het is noodzakelijk dat A niet het geval is ($\Box\neg A$). Je ziet dat ook in het geval van deze modale operatoren, de operator om klapt wanneer je er een negatie overheen tilt.

8.2 De Eerste Axioma's

De fundamentele regels, of de axioma's, van de modale logica zijn niet altijd hetzelfde. Over sommige voorgestelde axioma's zijn hevige discussies. De eerste axioma's die ik nu gaan behandelen zijn echter niet controversieel. Er bestaan verschillende systemen van modale logica, deze verschillen van elkaar op basis van welke axioma's er in opgenomen zijn.

8.2.1 Systeem K

Systeem K kan je zien als het basissysteem. Hier zijn alle andere systemen op gebaseerd. Systeem K bevat de regel voor het omschrijven van de twee modale operatoren en de volgende twee axioma's:

1. Als A een axioma is, dan geldt: $\Box A$.
2. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ (Distributie axioma)

Een aantal andere regels die hieruit volgen zijn:

- $\Box(A \wedge B) \equiv (\Box A \wedge \Box B)$
- $(\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$

8.2.2 Systeem T

Systeem K is een redelijk zwak systeem. Veel dingen die erg aannemelijk zijn kunnen niet worden bewezen. Een stelling die is opgenomen als axioma in systeem T is axioma M:

- Axioma M: $\Box A \to A$
  Dus, wat noodzakelijkerwijs het geval is, is het geval.

8.3 Controversiële axioma's

8.3.1 Systeem S4

Systeem S4 is systeem T met axioma 4 eraan toegevoegd.

- Axioma 4: $\Box A \to \Box\Box A$

Wat dit axioma zegt is dat wanneer iets noodzakelijk is, het noodzakelijkerwijs noodzakelijk is. Dit axioma zorgt ervoor dat alle rijen van vierkantjes en ruitjes vervangen kunnen worden door slechts één vierkantje of één ruitje respectievelijk.

$$\Box\Box\Box\Box A \equiv \Box A \text{ of } \Diamond\Diamond\Diamond A \equiv \Diamond\Diamond\Diamond\Diamond A.$$

8.3.2 Systeem S5 en Axioma B

Systeem S5 is systeem T plus axioma 5 of systeem S4 plus axioma B. Deze axioma's zijn:

- Axioma 5: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$
- Axioma B: $A \to \Box\Diamond A$

Laten we even kijken naar axioma 5. Axioma 5 zegt: 'Wat mogelijk is, is noodzakelijkerwijs mogelijk'. Dit klinkt erg redelijk. Er is alleen wel een probleem.
Wanneer we systeem S5 of B gebruiken kunnen we het volgende bewijzen: $(\Diamond\Box A \to A)$.
Als iets mogelijk noodzakelijk is, dan is het het geval.
Dit is een stuk minder aannemelijk en er zijn dan ook heel veel logici die deze axioma's verwerpen. Een reden waarom logici systeem S5 wel zouden hanteren is omdat het modale ontologische godsbewijs hierin geldig is. Dat is een bewijs voor het bestaan van god binnen de modale logica.
Een andere reden is dat velen de stellingen $\Box(A \to \Diamond A)$ en $A \to \Box\Diamond A$ verwarren. De één zegt dat het noodzakelijk is dat wanneer A zo is, A ook mogelijk is terwijl de andere zegt dat wat zo is, noodzakelijkerwijs mogelijk is. De verwarring komt doordat 'noodzakelijkerwijs' zich als bijwoord vastplakt aan 'mogelijk is' terwijl het eigenlijk gaat over de hele implicatie. De eerste formule $\Box(A \to \Diamond A)$ is al een stelling in systeem T. Een nieuw axioma zou dus niet nodig hoeven zijn als we deze stelling zien als goede vertaling van axioma 5.

8.4 Waardering van Modale Logica

Nu we de verschillende systemen van modale logica hebben behandeld richten we ons op de waardering van formules binnen de modale logica. Op het eerste gezicht is het niet zo duidelijk hoe we te werk gaan wanneer we de waarheidswaarde van bijvoorbeeld $\Box A$ willen bepalen. Als we voor A nemen: 'De president van Frankrijk is de president van Frankrijk', dan is $\Box A$ waar. Maar als we voor A nemen: 'Frankrijk is een republiek', dan is $\Box A$ niet waar terwijl A (op het moment van schrijven) wel waar is. Hoe zit dit precies? Voor het waarderen van formules in modale (propositie)logica gebruiken we het concept van de **mogelijke werelden**.

We nemen een verzameling W van alle mogelijke werelden. Een waardering van een formule geeft een waarheidswaarde aan elke propositie voor elke mogelijke wereld in W. Stel we bevinden ons nu in wereld w. Wereld w is een element in de verzameling W van alle mogelijke werelden. Wanneer we de waarheidswaarde van A willen berekenen in onze wereld w gebruiken we de volgende 2-plaatsige functie:

$$v(A, w)$$

En omdat Frankrijk in onze wereld een republiek is, en A dus waar is, krijgen we:

$$v(A, w) \Rightarrow T$$

Je merkt dat dit niets nieuws is. Het wordt interessant wanneer we de formule $\Box A$ nemen. A staat nog steeds voor 'Frankrijk is een republiek'. Zoals ik al zei is $\Box A$ niet waar. Dit komt omdat A niet waar is in alle mogelijke werelden. Er zijn mogelijke werelden waarin Frankrijk geen republiek is, dit is niet zo moeilijk voor te stellen. Stel we nemen een willekeurige mogelijke wereld w', de definitie voor de waardering van $\Box A$ luidt dan:

$$v(\Box A, w) \Rightarrow T \text{ als, en alleen als voor elke wereld } w' \text{ in W geldt: } v(A, w') \Rightarrow T.$$

Dit doet je waarschijnlijk sterk denken aan de manier waarop een formule als $\forall x Fx$ gewaardeerd wordt. Nu hebben we het over alle mogelijke werelden in plaats van een domein waarin iets waar moet zijn. De definitie voor de waardering van $\Diamond A$ zal je dan ook niet verbazen:

$$v(\Diamond A, w) \Rightarrow T \text{ als, en alleen als voor minimaal één wereld } w' \text{ in W geldt: } v(A, w') \Rightarrow T.$$

8.5 Kwantoren in Modale Logica

Tot zover deze paragraaf over modale logica. Je zult je misschien afvragen waar de kwantoren blijven. Dit is een goede vraag. Zou het niet doodeenvoudig zijn om kwantoren toe te voegen in de modale logica? Op het eerste gezicht misschien, maar dit is, zoals veel dingen in de logica, en stuk minder eenvoudig dan het lijkt. Er zijn dan ook erg veel verschillende voorgestelde systemen voor modale predicatenlogica (QML).

De lastigheid zit hem in de keuze van het domein waarover gekwantificeerd wordt. Het domein van 'alle mensen' verschilt bijvoorbeeld per mogelijke wereld. Een oplossing is het nemen van een vast domein dat bestaat uit alle mogelijke objecten, hier komt je echter ook mee in de problemen. Sommige logici, waaronder Quine, zeggen dat kwantificeren binnen de modale logica simpelweg onzinnig is. In dit boekje zullen we het vanwege deze complexiteit niet hebben over QML. De geïnteresseerde lezer kan zelf wat opzoeken over de verschillende voorgestelde systemen.

8.6 Deontische Logica

Deontische logica valt in de verzameling van modale logica's. Deontische logica kan omschreven worden als een logica die zich bezighoudt met autoriteit en gedragsregels. Er is één basis-operator en er zijn twee operatoren die daarop gebaseerd zijn met een eigen naam. Deze symbolen plakken zich net als $\Box$ en $\Diamond$ vast aan proposities of formules net als negaties.
Het eerste symbool is het symbool O voor 'het is verplicht dat'. Als we voor A nemen: 'een burger betaalt belasting', dan is OA: 'Het is verplicht dat een burger belasting betaalt'.
De tweede operator is P. Gedefinieerd als: $PA \equiv \neg O \neg A$. P staat voor 'het is toegestaan dat'. PA is dus: 'Het is toegestaan dat een burger belasting betaalt'.
De laatste operator is F Gedefinieerd als: $FA \equiv O\neg A$. F staat voor 'het is verboden dat'. FA staat dus voor: 'Het is verboden dat een burger belasting betaalt'.

- OA = Het is verplicht dat A
- PA = Het is toegestaan dat A
- FA = Het is verboden dat A

We kunnen axioma's uit de normale modale logica niet letterlijk vertalen naar deontische logica. Stel we willen axioma M toevoegen in deontische logica als: $OA \to A$, dan krijgen we problemen. Het feit dat iets verplicht is zorgt er natuurlijk niet voor dat iets daadwerkelijk gebeurt. Een axioma dat we wel kunnen toevoegen is axioma D: 'Wat verplicht is, is toegestaan.'

$$\text{Axioma D: } OA \to PA$$

Meestal wordt het volgende axioma voor de distributie van de O-operator ook gebruikt:

$$\text{Axioma O-K: } O(A \to B) \to (OA \to OB)$$

Dit lijkt erg op het distributie-axioma 2 uit de normale modale logica.

8.6.1 Paradox can Chisholm

Een interessant paradox binnen de deontische logica is de paradox van Chisholm. Deze paradox gaat over deontische implicaties. We vertalen de O operator nu even als 'Het zo zou moeten zijn dat ...'. Dit is een veelgebruikte vertaling. Neem de volgende vier proposities:

1. Het zou zo moeten zijn dat Joris zijn buren komt helpen.
2. Het zou zo moeten zijn dat, als Joris gaat, hij zegt dat hij eraan komt.
3. Als Joris niet gaat, zou het zo moeten zijn dat hij niet zegt dat hij eraan komt.
4. Joris gaat niet.

We nemen: P: 'Joris komt zijn buren helpen' en Q: 'Joris zegt dat hij eraan komt'. Een vertaling van deze vier proposities zou zijn:

1.	OP
2.	$O(P \to Q)$
3.	$(\neg P \to O\neg Q)$
4.	$\neg P$

De vier originele proposities spreken elkaar niet tegen en de vertalingen zien er aannemelijk uit. We zitten echter wel in de problemen. Door axioma O-K kunnen we regel 2 omschrijven naar $(OP \to OQ)$. Door regel 1 kunnen we nu ook OQ toevoegen en door regel 3 en 4 kunnen we nu ook $O\neg Q$ toevoegen. We krijgen deze lijst van proposities:

1.	OP
2.	$O(P \to Q)$
3.	$(\neg P \to O\neg Q)$
4.	$\neg P$
5.	$(OP \to OQ)$
6.	OQ
7.	$O\neg Q$

We zeggen nu dat Q zo zou moeten zijn, maar ook dat het niet zo zou moeten zijn. Dit spreekt elkaar natuurlijk enorm tegen. Er kan nog geprobeerd worden om de vier proposities op minder aannemelijke manier te vertalen in deontische logica. Maar ik zal alvast verklappen dat dat geen zin gaat hebben. Het is namelijk een geaccepteerd feit dat een propositie zoals die op regel drie niet kan worden uitgedrukt in deontische logica.
Tot zover deze korte blik op deontische logica.

8.7 Temporele Logica

Temporele logica is de laatste 'smaak' van modale logica die we kort gaan behandelen. Temporele logica wordt ook wel tijdslogica genoemd en houdt zich bezig met dingen die zo zijn in de tijd. Ik zal voor temporele logica alleen even kort de notatie bespreken.
Er zijn twee basis-operatoren. De operator G is voor de toekomst en de operator F voor het verleden. Uit G en F volgen nog twee andere operatoren.

- GA = Het zal altijd zo zijn dat A.
- $FA = \neg G \neg A$ = Het zal zo zijn dat A.
- HA = Het was altijd zo dat A.
- $PA = \neg H \neg A$ = Het was zo dat A.

Er zijn natuurlijk ook axioma's. Hier volgen er een aantal:

- Als A een stelling is, dan zijn GA en HA dat ook.
- $G(A \to B) \to (GA \to GB)$ en $H(A \to B) \to (HA \to HB)$
- $A \to GPA$ en $A \to HFA$

De lezer wordt uitgenodigd om wat te spelen met deze notatie en axioma's. Het is interessant om te kijken naar hoe de combinaties van operatoren tijden in de Nederlandse taal kunnen uitdrukken. Voltooid tegenwoordige toekomende tijd: 'A zal geweest zijn', is bijvoorbeeld: FPA. Voltooid verleden tijd: 'A was geweest', is bijvoorbeeld: PPA. (Garson, 2018)

Tot zover modale logica.

9 Antwoorden

2.7 **A**

1. Abstracte vorm: Sommige A zijn B; Alle C zijn A $\therefore$ Sommige B zijn C.
   Tegenvoorbeeld: Sommige zoogdieren zijn beren; alle apen zijn zoogdieren; dus sommige beren zijn apen.

2. Abstracte vorm: Sommige A zijn B; Alle C zijn A $\therefore$ Sommige C zijn B.
   Tegenvoorbeeld: Sommige zoogdieren zijn beren; alle apen zijn zoogdieren; dus sommige apen zijn beren.

3. Sommige filosofen hadden les van Plato, niet allen. Het volgt nergens uit dat de niet-Griekse filosofen leerlingen moeten zijn van Plato.

4. Alle neven zijn gestoord, maar soms zijn gestoorden wel geschikt om in een jury te zitten dus het is niet zeker dat geen van de neven niet in de jury kunnen zitten.

2.7 **B**

1. Abstracte vorm: Sommige A zijn niet B; Alle A zijn C $\therefore$ Sommige C zijn niet B.
   Stel: Alle C zijn B. Daaruit volgt: Alle A zijn C dus alle A zijn B. Dit is in tegenspraak met dat sommige A niet B zijn.

2. Abstracte vorm: Alle A zijn B; Sommige C zijn niet B $\therefore$ Sommige C zijn niet A.
   Stel: Alle C zijn A. Daaruit volgt: Alle C zijn B. Dit is in tegenspraak met dat sommige C niet B zijn.

3. Abstracte vorm: Alle A zijn niet B; Sommige C zijn D; Alle D zijn A $\therefore$ Sommige C zijn niet B.
   Stel: Alle C zijn B. Daaruit volgt: Sommige B zijn D dus Sommige B zijn A. Dit is in tegenspraak met dat Alle A niet B zijn.

4. Stel: Een neef kan in een Jury zitten. Daaruit volgt: Een neef van jou is niet gestoord; Een neef van jou kan logica doen. Dit is in tegenspraak met dat geen van jouw neven logica kan doen.

2.7 **C** 1.

Bewijs. $\sqrt{97}$ is irrationaal.

$$\sqrt{97} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

$$97 = \frac{a^2}{b^2} \tag{2}$$

$$a^2 = 97b^2 \tag{3}$$

We zien hier dat a een veelvoud van 97 moet zijn. *(Lemma van Euclides: als a^2 deelbaar is door het priemgetal p, dan is a ook deelbaar door p.)*

$$97b^2 = (97k)^2 \tag{4}$$

$$97b^2 = 9409k^2 \tag{5}$$

$$b^2 = 97k^2 \tag{6}$$

We zien hier dat b ook een veelvoud van 97 is, a en b zijn beide te delen door 97. Dit is in tegenspraak met de stelling dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben. De aanname dat $\sqrt{97}$ rationaal is, is dus niet waar. Hieruit volgt dat $\sqrt{97}$ wel irrationaal is. □

2. Stel: Het aantal priemgetallen is eindig. Hieruit volgt dat er een laatste priemgetal is. We noemen dit priemgetal p. We gaan nu een nieuw getal maken. Dit getal is het product van alle priemgetallen tot en met p: q = 2 x 3 x 5 x ... x p. Het getal q is deelbaar door alle priemgetallen. We maken nu het getal Q door q + 1 te doen. Q is deelbaar door geen enkel priemgetal en dus door geen enkel getal behalve 1 en zichzelf. Q is dus een nieuw priemgetal, dit is in tegenspraak met stelling dat er een laatste priemgetal is. Er is geen laatste priemgetal en dus zijn er oneindig priemgetallen.

3.3 **A**

Let op: woorden als 'maar' en 'terwijl' drukken logisch hetzelfde uit als 'en'.

1. Plato *of* Quine was een groot geleerde.
2. Als Plato een groot geleerde was, *dan* waren Russell *en* Quine dat ook.
3. Het is niet het geval dat Socrates een groot geleerde was *en* Plato en Quine dat niet waren.
4. Quine *of* Plato was een groot geleerde *en* Russell ook, *maar* Socrates was geen groot geleerde.

3.3 **B**

5. $(P \wedge Q)$
6. $((P \wedge S) \wedge \neg(Q \wedge R))$ of $((P \wedge S) \wedge (\neg Q \vee \neg R))$ (zie 3.8)
7. $(S \rightarrow ((P \wedge Q) \wedge R))$
8. $((P \vee S) \wedge \neg(P \wedge S))$ of $((P \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg S))$
9. $(S \leftrightarrow R)$ of $((S \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow S))$
10. $((Q \wedge R) \rightarrow (P \wedge \neg S))$
11. $((P \rightarrow S) \vee \neg Q)$
12. $\neg(P \wedge \neg S)$ of $(P \rightarrow S)$ (zie 3.8)

3.5

1. F
2. F
3. T
4. T
5. T

3.6

1.

P	Q	P	→	¬	Q
T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	F

2.

P	Q	(P	∧	Q)	∨	¬	P
T	T	T	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T
F	T	F	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T	F

3.

P	Q	R	P	→	(Q	∨	¬	R)
T	T	T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	T	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T	T	T	F
F	F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	F	T	T	F

4.

P	Q	R	¬	(¬	(P	∧	Q)	→	R)
T	T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T	F
T	F	T	F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F	F	F	T	T
F	F	F	T	T	F	F	F	F	F

3.8 Mogelijke opties zijn: $\neg(P \wedge \neg Q)$ of $(\neg P \vee Q)$

P	Q	¬	(P	∧	¬	Q)	¬	P	∨	Q	P	→	Q
T	T	T	T	F	F	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	T	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T	F	T	F	T	F	F	T	F

3.9

P	P	↑	P	¬	P
T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	F

P	Q	(P	↑	Q)	↑	(P	↑	Q)	P	∧	Q
T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F	F

P	Q	(P	↑	P)	↑	(Q	↑	Q)	P	∨	Q
T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	F	T	F	T	T	F
F	T	F	T	F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F	F

P	Q	P	↑	(Q	↑	Q)	P	→	Q
T	T	T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	F	T	F

4

1.

1.	$((P \vee Q) \to R)$ ✓	
2.	$\neg R$	
3.	P	
4.	$\neg(P \vee Q)$ ✓	R
5.	$\neg P$	$\otimes$
6.	$\neg Q$	
	$\otimes$	

2.

1.	$(P \leftrightarrow Q)$ ✓		
2.	$(Q \vee R)$ ✓		
3.	$\neg R$		
4.	$\neg P$		
5.	Q		R
6.	$\neg P$	P	$\otimes$
7.	$\neg Q$	Q	
	$\otimes$	$\otimes$	

3.

1.	$((P \vee Q) \vee R)$ ✓				
2.	$\neg Q$				
3.	$\neg(R \wedge \neg P)$ ✓				
4.	$\neg R$			P	
5.	$(P \vee Q)$ ✓		R	$(P \vee Q)$ ✓	R
6.	P	Q	$\otimes$	P	Q
		$\otimes$			$\otimes$

Ongeldig bij: $P \Rightarrow T$

4.

1.	$(P \leftrightarrow Q)$ ✓			
2.	$\neg(\neg P \leftrightarrow \neg Q)$ ✓			
3.	$\neg P$		P	
4.	Q		$\neg Q$	
5.	P	$\neg P$	P	$\neg P$
6.	Q	$\neg Q$	Q	$\neg Q$
	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$

5.

1.	$\neg(P \wedge Q)$ ✓	
2.	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$ ✓	
3.	P	
4.	Q	
5.	$\neg P$	$\neg Q$
	$\otimes$	$\otimes$

6.

1. P
2. $\neg(P \wedge \neg Q)$ ✓
3. $\neg(Q \wedge \neg R)$ ✓
4. $(\neg R \vee S)$ ✓
5. $\neg S$
6. $\neg R \qquad S$
7. $R \qquad \neg Q \qquad \otimes$
8. $\otimes \qquad \neg P \qquad Q$

$\otimes \qquad \otimes$

7.

1. $\neg(\neg(P \vee Q) \rightarrow R)$ ✓
2. $\neg\neg((P \vee Q) \vee R)$ ✓
3. $((P \vee Q) \vee R)$ ✓
4. $\neg(P \vee Q)$
5. $\neg R$
6. $(P \vee Q) \qquad \neg R$

$\otimes \qquad \otimes$

8.

1. $(P \vee Q)$ ✓
2. $(P \rightarrow R)$ ✓
3. $\neg(Q \wedge \neg R)$ ✓
4. $\neg R$
5. $R \qquad \neg P$
6. $\otimes \qquad P \qquad Q$
7. $\otimes \qquad \neg Q \qquad R$

$\otimes \qquad \otimes$

9.

1. $\neg(P \leftrightarrow (Q \wedge R))$ ✓
2. $(S \vee \neg Q)$ ✓
3. $(S \rightarrow P)$ ✓
4. $\neg P \qquad P$
5. $(Q \wedge R)$ ✓ $\qquad \neg(Q \wedge R)$ ✓
6. $Q \qquad \neg Q \qquad \neg R$
7. $R \qquad S \qquad \neg Q \qquad S \qquad \neg Q$
8. $S \qquad \neg Q \qquad \neg S \qquad P \qquad \neg S \qquad P \qquad \neg S \qquad P$
9. $\neg S \qquad P \qquad \otimes \qquad \otimes \qquad \otimes$

$\otimes \qquad \otimes$

Ongeldig, bijv: $P \Rightarrow T$, $S \Rightarrow T$, $R \Rightarrow F$.

10.

1.	$\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$ ✓
2.	$(A \wedge B)$ ✓
3.	$\neg(A \vee B)$ ✓
4.	A
5.	B
6.	$\neg A$
	$\otimes$

11.

1.	$\neg((A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B))$ ✓			
2.	$(A \wedge B)$ ✓		$\neg(A \wedge B)$ ✓	
3.	$(\neg A \vee \neg B)$ ✓		$\neg(\neg A \vee \neg B)$ ✓	
4.	A		A	
5.	B		B	
6.	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B$
	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$

12.

1.	$((\neg(A \wedge \neg(B \wedge C)) \wedge \neg(B \wedge C)) \wedge A)$ ✓	
2.	A	
3.	$(\neg(A \wedge \neg(B \wedge C)) \wedge \neg(B \wedge C))$ ✓	
4.	$\neg(A \wedge \neg(B \wedge C))$ ✓	
5.	$\neg(B \wedge C)$ ✓	
6.	$\neg A$	$(B \wedge C)$
	$\otimes$	$\otimes$

13.

P: Joris is in het cafe; Q: Joris is in de bibliotheek; R: Joris is doormidden gehakt; S: Het café is in de bibliotheek; T: Joris leeft niet meer.

$(P \vee Q), ((P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S)), (R \rightarrow T), ((P \wedge Q) \wedge T) \therefore S$

1.	$(P \vee Q)$							
2.	$((P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S))$ ✓							
3.	$(R \rightarrow T)$ ✓							
4.	$((P \wedge Q) \wedge T)$ ✓							
5.	$\neg S$							
6.	T							
7.	$(P \wedge Q)$ ✓							
8.	P							
9.	Q							
10.	$\neg R$				T			
11.	$\neg(P \wedge Q)$ ✓		$(R \vee S)$ ✓		$\neg(P \wedge Q)$ ✓		$(R \vee S)$ ✓	
12.	$\neg P$	$\neg Q$	R	S	$\neg P$	$\neg Q$	R	S
	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$

14. P: Plato was een filosoof; Q: Aristoteles was een filosoof; R: We hebben logica; S: We hebben dit boekje.
$(\neg P \to \neg Q), (\neg Q \to \neg R), (\neg R \to \neg S) \therefore (S \to P)$

1.		$(\neg P \to \neg Q)$ ✓			
2.		$(\neg Q \to \neg R)$ ✓			
3.		$(\neg R \to \neg S)$ ✓			
4.		$\neg(S \to P)$ ✓			
5.		S			
6.		$\neg P$			
7.	P		$\neg Q$		
8.	$\otimes$	Q		$\neg R$	
9.		$\otimes$	R		$\neg S$
			$\otimes$		$\otimes$

15.
P: Cavalerie valt commandopost aan; Q: Cavalerie valt hospitaal aan; R: Infanterie valt commandopost aan; S: Infanterie valt hospitaal aan; T: Brug wordt verdedigt.

$$((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)), (P \to T), (T \to \neg(R \vee S)), (\neg T \wedge (P \vee R)) \therefore (Q \vee S)$$

1.		$((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$ ✓			
2.		$(P \to T)$ ✓			
3.		$(T \to \neg(R \vee S))$			
4.		$(\neg T \wedge (P \vee R))$ ✓			
5.		$\neg(Q \vee S)$ ✓			
6.		$\neg Q$			
7.		$\neg S$			
8.		$(P \vee Q)$ ✓			
9.		$\neg(P \wedge Q)$ ✓			
10.		$\neg T$			
11.		$(P \vee R)$ ✓			
12.		$\neg P$			T
13.	P		R		$\otimes$
14.	$\otimes$	P		Q	
		$\otimes$		$\otimes$	

De argumentatie is geldig. Koetoezov kan dus maar beter naar de commandant luisteren.

5.3 **A**

1. $(Fm \wedge Lmn)$
2. $\forall x(Fx \rightarrow Mxo)$
3. $\forall x(Gx \rightarrow (Mxo \wedge \neg Mxm))$
4. $\forall x \exists y Lyx$
5. $\exists x(Gx \wedge (\neg Mxm \wedge Mxn))$
6. $\exists x \forall y(Lyx \rightarrow \neg Mxy)$

5.3 **B**

1. Als Russell een wiskundige is en Plato een filosoof, dan houdt Russell van Plato.
2. Sommige wiskundigen houden van Russel.
3. Voor alle x geldt dat: Er is een y waarvoor geldt: x geeft les aan y en y houdt van Russel. Dus: Iedereen geeft les aan iemand die van Russell houdt.
4. Er is een x waarvoor geldt: voor alle y geldt dat: x is een wiskundige en als y een filoof is impliceert dat dat x van y houdt. Dus: Er is een wiskundige die van alle filosofen houdt.

5.3 **C**
$\forall x \forall y \exists z(Lyz \rightarrow Lxy), Lmn \therefore \forall x Lxn$ Dit zegt: Voor elke x en y geldt: als y van een z houdt (dus als y een minnaar is) dan houden alle x van y.
5.3 **D**

1. Geen even getal is oneven. Dit is waar.
2. Elk paar van getallen heeft een som. Dit is waar.
3. Voor elk getal is er een getal dat groter is. Dit is waar.
4. Als een nummer één meer dan een oneven getal, is het even. Dit is waar.
5. Als een nummer één meer is dan een even getal, dan is het oneven. Dit is waar.
6. Elk even nummer is gelijk aan tweemaal een oneven nummer. Dit is niet waar.
7. Als twee getallen verschillen met twee: als de één even is, dan is de ander het ook. Dit is waar.
8. De som van twee oneven getallen is even. Dit is waar.
9. Elk getal is de som van twee priemgetallen. Dit is het vermoeden van Goldbach, nog onbewezen.
10. Neem een getal. Er is een tweetal priemgetallen groter dan dat getal die verschillen met twee. Dit is het priemtweelingvermoeden. Dit is nog onbewezen.

5.5 $i(F) = \{4, 8, 12\}$, $i(G) = \{7, 11\}$, $i(L) = \{\langle 4, 7\rangle, \langle 4, 8\rangle, \langle 4, 11\rangle, ..., \langle 11, 12\rangle\}$

1. $i(n) = 7$, het is niet zo dat $i(n) \in i(F)$ dus $v(Fn) \Rightarrow T$
2. $i(n) = 7$ en $i(m) = 4$. Het is niet zo dat $\langle 7, 4\rangle \in i(L)$ dus $v(Lnm) \Rightarrow F$

3. $i(n) = 7$. Wanneer we $x = 4$ nemen is Lxn waar want $\langle 4, 7\rangle \in i(L)$. Er is dus een waardering waarvoor Lxn waar is. Dus: $v(\exists x Lxn) \Rightarrow T$
4. $i(n) = 7$ en $i(o) = 12$. Fn is onwaar. Go is ook onwaar want er geldt niet: $12 \in i(G)$. De hele implicatie is dus wel waar: $v((Fn \to Go)) \Rightarrow T$
5. We zoeken een x die aan beide voorwaarden voldoet. Deze is er niet want er bestaat geen: $\langle 12, x\rangle$. $v(\exists x(Fx \wedge Lox)) \Rightarrow F$
6. Stel we nemen $x = 4$. $Fx \Rightarrow T$ en $\neg Gx \Rightarrow T$. Voor $x = 4$ is $(Fx \leftrightarrow \neg Gx)$ dus waar. Analoog kunnen we aantonen dat hetzelfde geldt voor alle andere elementen uit het domein. $v(\forall x(Fx \leftrightarrow \neg Gx)) \Rightarrow T$
7. Stel we nemen $x = 7$. $Gx \Rightarrow T$ en Lmx ook. Als $Gx \Rightarrow F$, dan is $(Gx \to Lmx)$ altijd waar. We hoeven dus alleen te kijken naar $i(G)$ om te controleren dat voor alle elementen in het domein $(Gx \to Lmx)$ waar is. $7 \in i(G)$ en 4 is kleiner dan 7 dus voor $x = 7$ is $(Gx \to Lmx)$ ook waar. $v(\forall x(Gx \to Lmx)) \Rightarrow T$
8. Fx moet waar zijn dus we hoeven enkel te kijken naar $i(F)$ voor onze opties voor x. De implicatie is altijd waar als $Gy \Rightarrow F$ dus voor y hoeven we alleen te kijken naar $i(G)$. Stel we nemen $x = 4$. $L4y$ is waar voor alle $y \in i(G)$ dus $\forall x(Gy \to Lxy)$ is waar. Fx is ook waar dus: $v(\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \to Lxy))) \Rightarrow T$

6.1 **A**

1.

1.	$\forall x(Fx \to Gx)$	
2.	$\neg Gm$	
3.	Fm	
4.	$(Fm \to Gm)$ ✓	
5.	$\neg Fm$	Gm
	$\otimes$	$\otimes$

2.

1.	$\forall x(Fx \to Gx)$		
2.	$\exists x(Fx \wedge Hx)$ ✓		
3.	$\neg\exists x(Hx \wedge Gx)$ ✓		
4.	$\forall x\neg(Hx \wedge Gx)$		
5.	$(Fa \wedge Ha)$ ✓		
6.	Ha		
7.	Fa		
8.	$\neg(Ha \wedge Ga)$ ✓		
9.	$\neg Ha$	$\neg Ga$	
10.	$\otimes$	$(Fa \to Ga)$ ✓	
11.		$\neg Fa$	Ga
		$\otimes$	$\otimes$

3.

$$\begin{array}{lcc}
1. & \multicolumn{2}{c}{((Gn \lor Fn) \to (Lmn \lor Lnm)) \checkmark} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{\neg(Gn \lor Lmn) \checkmark} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{Fn} \\
4. & \multicolumn{2}{c}{\neg Lnm} \\
5. & \multicolumn{2}{c}{\neg Gn} \\
6. & \multicolumn{2}{c}{\neg Lmn} \\
7. & \neg(Gn \lor Fn) \checkmark & (Lmn \lor Lnm) \checkmark \\
8. & & Lmn \qquad\quad Lnm \\
9. & \neg Gn & \otimes \qquad\qquad \otimes \\
10. & \neg Fn & \\
 & \otimes &
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{lcc}
1. & \multicolumn{2}{c}{\forall x(Gx \to Fx)} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{\neg\exists x Fx \checkmark} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\exists x Gx \checkmark} \\
4. & \multicolumn{2}{c}{\forall x \neg Fx} \\
5. & \multicolumn{2}{c}{Ga} \\
6. & \multicolumn{2}{c}{\neg Fa} \\
7. & \multicolumn{2}{c}{(Ga \to Fa) \checkmark} \\
8. & \neg Ga & Fa \\
 & \otimes & \otimes
\end{array}$$

5.

$$\begin{array}{lcc}
1. & \multicolumn{2}{c}{\exists x \forall y(Gx \land (Fx \to Mxy)) \checkmark} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{Fm} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\neg\exists x(Gx \land Mxm) \checkmark} \\
4. & \multicolumn{2}{c}{\forall x \neg(Gx \land Mxm)} \\
5. & \multicolumn{2}{c}{\forall y(Ga \land (Fa \to May))} \\
6. & \multicolumn{2}{c}{(Ga \land (Fm \to Mam)) \checkmark} \\
7. & \multicolumn{2}{c}{Ga} \\
8. & \multicolumn{2}{c}{(Fm \to Mam) \checkmark} \\
9. & \neg Fm & Mam \\
10. & \otimes & \neg(Ga \land Mam) \\
11. & & \neg Ga \qquad\quad \neg Mam \\
 & & \otimes \qquad\qquad \otimes
\end{array}$$

6.1 **B**

1. Lxy = x houdt van y. Fx = x is verdrietig.

$\forall x \exists y Lyx, \forall x(\forall y Lyx \to \neg Fx) \therefore \neg\exists x Fx$

$$\begin{array}{lcc}
1. & \multicolumn{2}{c}{\forall x \exists y Lyx} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{\forall x(\forall y Lyx \to \neg Fx)} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\exists x Fx \checkmark} \\
4. & \multicolumn{2}{c}{Fa} \\
5. & \multicolumn{2}{c}{\forall x Lbx} \\
6. & \multicolumn{2}{c}{Lba} \\
7. & \multicolumn{2}{c}{(\forall y Lya \to \neg Fa)} \\
8. & \multicolumn{2}{c}{(Lba \to \neg Fa) \checkmark} \\
9. & \neg Lba & \neg Fa \\
 & \otimes & \otimes
\end{array}$$

2. Lxy = x bemint y; m = Romeo en n = Julia.
$\forall x \forall y(\exists z Lyz \to Lxy), Lmn \therefore \forall x Lxn$

1.	$\forall x \forall y(\exists z Lyz \to Lxy)$		
2.	Lmn		
3.	$\neg \forall x Lxn$		
4.	$\exists x \neg Lxn$ ✓		
5.	$\neg Lan$		
6.	$\forall y(\exists z Lyz \to Lay)$		
7.	$(\exists z Lnz \to Lan)$ ✓		
8.	$\neg \exists z Lnz$ ✓		Lan
9.	$\forall z \neg Lnz$		$\otimes$
10.	$\neg Lnm$		
11.	$\forall y(\exists z Lyz \to Lny)$		
12.	$(\exists z Lmz \to Lnm)$ ✓		
13.	$\neg \exists z Lmz$ ✓	Lnm	
14.	$\forall z \neg Lmz$	$\otimes$	
15.	$\neg Lmn$		
	$\otimes$		

3. Fx = x is een natuurkundige; Gx = x beheerst wiskunde; Hx = x houdt van filosofie, Ix = x is geïnteresseerd in formele logica; Jx = x doet onderzoek naar het ontstaan van het heelal.
$\forall x(Fx \to Gx), \forall x((Gx \wedge Hx) \to Ix), \forall x(Jx \to Hx) \therefore \forall x((Fx \wedge Jx) \to Ix)$

1.	$\forall x(Fx \to Gx)$				
2.	$\forall x((Gx \wedge Hx) \to Ix)$				
3.	$\forall x(Jx \to Hx)$				
4.	$\neg \forall x((Fx \wedge Jx) \to Ix)$ ✓				
5.	$\exists x \neg((Fx \wedge Jx) \to Ix)$ ✓				
6.	$\neg((Fa \wedge Ja) \to Ia)$ ✓				
7.	$(Fa \wedge Ja)$ ✓				
8.	$\neg Ia$ ✓				
9.	Fa				
10.	Ja				
11.	$(Fa \to Ga)$ ✓				
12.	Ga				$\neg Fa$
13.	$((Ga \wedge Ha) \to Ia)$ ✓				$\otimes$
14.	$\neg(Ga \wedge Ha)$ ✓			Ia	
15.	$\neg Ga$	$\neg Ha$		$\otimes$	
16.	$\otimes$	$(Ja \to Ha)$ ✓			
17.		$\neg Ja$	Ha		
		$\otimes$	$\otimes$		

7.4 **A**

1. $\forall x(x = x)$
2. $\forall x \forall y((x = y) \rightarrow (y = x))$
3. $\forall x \forall y \forall z(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z))$
4. $\forall x \forall y((Fx \wedge (x = y)) \rightarrow Fy)$

1. Is al gegeven. **2.**

1.	$\forall x \forall y((x = y) \rightarrow (y = x))$ ✓	
2.	$\exists x \exists y \neg((x = y) \rightarrow (y = x))$ ✓	
3.	$\neg((a = b) \rightarrow (b = a))$	
4.	$(a = b)$	
5.	$\neg(b = a)$	
6.	$\neg(a = a)$	volgt uit regel 4 en 5
	$\otimes$	

3.

1.	$\neg\forall x \forall y \forall z(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z))$ ✓	
2.	$\exists x \exists y \exists z \neg(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z))$ ✓	
3.	$\neg(((a = b) \wedge (b = c)) \rightarrow (a = c))$ ✓	
4.	$((a = b) \wedge (b = c))$ ✓	
5.	$\neg(a = c)$	
6.	$(a = b)$	
7.	$(b = c)$	
8.	$\neg(b = c)$	volgt uit regel 5 en 6
9.	$\neg(c = c)$	volgt uit regel 7 en 8
	$\otimes$	

4.

1.	$\neg\forall x \forall y((Fx \wedge (x = y)) \rightarrow Fy)$ ✓	
2.	$\exists x \exists y \neg((Fx \wedge (x = y)) \rightarrow Fy)$ ✓	
3.	$\neg((Fa \wedge (a = b)) \rightarrow Fb)$ ✓	
4.	$(Fa \wedge (a = b))$ ✓	
5.	$\neg Fb$	
6.	Fa	
7.	$(a = b)$	
8.	Fb	volgt uit regel 6 en 7
	$\otimes$	

7.4 **B**

1. $((m = o) \wedge \neg(m = n))$
2. $\exists x((Gx \wedge Gn) \wedge \neg(x = n)) \wedge \forall x(Fx \leftrightarrow (x = m))$
3. $\exists x \forall y(Lxm \leftrightarrow (x = y))$
4. $(Lmn \wedge \forall x(Lxn \rightarrow (x = m)))$
5. $\forall x(Lxm \rightarrow (\neg(x = n) \wedge Gx))$

7.4 **C**

1. $(m = o), \neg Gm \therefore \neg Go$
2. $\forall x(Lxm \rightarrow (\neg(x = n) \wedge Gx)), \forall x(Gx \leftrightarrow (x = n)) \therefore \neg\exists x Lxm$
3. $\forall x(Gx \leftrightarrow Lmx), (\exists x \exists y((Gx \wedge Gy) \wedge \neg(x = y)) \wedge \forall z(Gz \rightarrow ((z = x) \vee (z = y)))) \therefore$ $(\exists x \exists y((Lmx \wedge Lmy) \wedge \neg(x = y)) \wedge \forall z(Lmz \rightarrow ((z = x) \vee (z = y))))$

1.

1.	$(m = o)$
2.	$\neg Gm$
3.	Go
4.	Gm
	$\otimes$

2.

1.	$\forall x(Lxm \rightarrow (\neg(x = n) \wedge Gx))$		
2.	$\forall x(Gx \leftrightarrow (x = n))$		
3.	$\exists x Lxm$ ✓		
4.	Lam		
5.	$(Lam \rightarrow (\neg(a = n) \wedge Ga))$ ✓		
6.	$\neg Lam$	$(\neg(a = n) \wedge Ga)$ ✓	
7.	$\otimes$	$\neg(a = n)$	
8.		Ga	
9.		$(Ga \leftrightarrow (a = n))$ ✓	
10.		$\neg Ga$	Ga
11.		$\neg(a = n)$	$(a = n)$
		$\otimes$	$\otimes$

3.

1.	$\forall x(Gx \leftrightarrow Lmx)$
2.	$(\exists x\exists y((Gx \wedge Gy) \wedge \neg(x=y)) \wedge \forall z(Gz \rightarrow ((z=x) \vee (z=y)))) \checkmark$
3.	$\neg(\exists x\exists y((Lmx \wedge Lmy) \wedge \neg(x=y)) \wedge \forall z(lmz \rightarrow ((z=x) \vee (z=y))))$
4.	$((Ga \wedge Gb) \wedge \neg(a=b)) \wedge \forall z(Gz \rightarrow ((z=a) \vee (z=b))))$
5.	$((Ga \wedge Gb) \wedge \neg(a=b)) \checkmark$
6.	$\forall z(Gz \rightarrow ((z=a) \vee (z=b)))$
7.	$(Ga \wedge Gb) \checkmark$
8.	$\neg(a=b)$
9.	Ga
10.	Gb
11.	$(Ga \rightarrow ((a=a) \vee (a=b)) \checkmark$
12.	$((a=a) \vee (a=b)) \checkmark \qquad \neg Ga$
13.	$(a=b) \qquad (a=a) \qquad \otimes$
14.	$\otimes \qquad (Ga \leftrightarrow Lma) \checkmark$
15.	$Lma \qquad \neg Lma$
16.	$Ga \qquad \neg Ga$
17.	$(\neg\exists x\exists y((Lmx \wedge \neg(x=y)) \vee \neg\forall z(Lmz \rightarrow ((z=x) \vee (z=y)))) \checkmark \qquad \otimes$
18.	$(\forall x\forall y\neg((Lmx \wedge \neg(x=y)) \vee \neg\forall z(Lmz \rightarrow ((z=x) \vee (z=y)))) \checkmark$
19.	$(\neg((Lma \wedge Lmb \wedge \neg(a=b)) \vee \exists z\neg(Lmz \rightarrow ((z=a) \vee (z=b)))) \checkmark$
20.	$\neg((Lma \wedge Lmb) \wedge \neg(a=b)) \checkmark \qquad \exists z\neg(Lmz \rightarrow ((z=a) \vee (z=b))) \checkmark$
21.	$\neg(Lma \wedge Lmb) \checkmark \qquad (a=b)$
22.	$\neg Lma \qquad \neg Lmb \qquad \otimes$
23.	$\otimes \qquad (Ga \leftrightarrow Lmb) \checkmark$
24.	$Gb \qquad \neg Lmb$
25.	$Lmb \qquad \neg Gb$
26.	$\otimes \qquad \otimes \qquad \neg(Lmc \rightarrow ((c=a) \vee (c=b))) \checkmark$
27.	Lmc
28.	$\neg((c=a) \vee (c=b)) \checkmark$
29.	$\neg(c=a)$
30.	$\neg(c=b)$
31.	$(Gc \leftrightarrow Lmc) \checkmark$
32.	$Gc \qquad \neg Gc$
33.	$Lmc \qquad \neg Lmc$
34.	$(Gx \rightarrow ((c=a) \vee (c=b)) \checkmark \qquad \otimes$
35.	$\neg Gc \qquad ((c=a) \vee (c=b)) \checkmark$
	$\otimes$
36.	$(c=a) \qquad (c=b)$
	$\otimes \qquad \otimes$

10 Begrippen

Axioma: Een fundamentele waarheid die binnen een systeem als waar wordt aangenomen zonder dat een bewijs nodig is.

Categorische propositie: Een propositie als 'Alle A zijn B', of 'Sommige B zijn niet C'.

Contradictie: Een contradictie is een logische formule die onwaar is voor alle mogelijke waardes van de atomen.

Correct: Een argumentatie is correct wanneer deze geldig is en de premissen ook nog eens waar zijn in de echte wereld.

Geldig: Een argumentatie is deductief geldig wanneer er geen waardering van de atomen bestaat waardoor de premissen waar zijn maar de conclusie onwaar.

Equivalent: Twee logische formules zijn equivalent wanneer de waardes van de hoofdoperatoren hetzelfde zijn bij dezelfde waarderingen van de atomen.

Element: Een object in een verzameling.

Hoofd-operator: De operator die de waarheidswaarde van de hele formule bepaalt.

Individuele symbolen: De verzamelnaam voor individuele constanten en individuele variabelen in de predicatenlogica.

Isomorfie: Twee dingen zijn isomorf wanneer de een de ander weerspiegelt op een manier die de onderliggende structuur behoudt.

Kwalitatieve gelijkheid: Twee dingen zijn kwalitatief gelijk wanneer deze dezelfde eigenschappen hebben.

Model: In de predicatenlogica is het model de combinatie van het domein en de interpretaties van de predicaten en constanten.

Numerieke gelijkheid: Twee dingen zijn numeriek gelijk wanneer de twee dingen naar één en hetzelfde object verwijzen.

Operator: Een symbool dat de logische relatie tussen twee formules of atomen uitdrukt.

Premisse: De informatie die je voor waar aanneemt waarop je een argumentatie bouwt.

Propositie: Een zin die een bewering formuleert die waar of onwaar kan zijn.

Syllogisme: Een vorm van argumentatie met exact twee premissen en één conclusie, vaak bestaande uit categorische proposities.

Tautologie: Een tautologie is een logische formule die waar is voor alle mogelijke waardes van de atomen.

Waardering: Het toewijzen van een waarheidswaarde aan een logische formule.

Well-formed-formula (wff): Een logische formule die correct is gevormd.

Verzameling: Een verzameling is een collectie van verschillende objecten, elementen genoemd, die zelf als een wiskundig object wordt beschouwd. *(def. volgens Wikipedia)*

Referenties

Curry, H. B. (1963). *Foundations of Mathematical Logic*. Dover.

Frege, G. (1879). Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1931*, 1–82.

Garson, J. (2018). Modal Logic. In E. N. Zalta (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2018). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Gödel, K. (1930). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*.

Goldrei, D. (2005). *Propositional and Predicate Calculus: A Model of Argument*. Springer.

Hofstadter, D. (1979). *Gödel, Escher, Bach*.

Irvine, A. D. (2021). Bertrand Russell. In E. N. Zalta (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2021). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Irvine, A. D. & Deutsch, H. (2021). Russell's Paradox. In E. N. Zalta (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2021). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Linsky, B. & Irvine, A. D. (2020). Principia Mathematica. In E. N. Zalta (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2020). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Ludlow, P. (2018). Descriptions. In E. N. Zalta (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2018). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

McNamara, P. (2019). Deontic Logic. In E. N. Zalta (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2019). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Russell, B. (1945). *Geschiedenis van de westerse filosofie*.

Russell, B. (1967). *The Autobiography of Bertrand Russell*.

Russell, B. & Whitehead, A. N. (1910). *Principia Mathematica*. Merchant Books.

Shapiro, S. & Kouri Kissel, T. (2018). Classical Logic. In E. N. Zalta (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2018). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Smith, P. (2003). *An Introduction to Formal Logic*.

Smith, R. (2019). Aristotle's Logic. In E. N. Zalta (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2019). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Smullyan, R. (1995). *First-Order Logic*. Dover Publications, Inc.

Wason, P. C. (1968). Reasoning about a rule [PMID: 5683766]. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *20*(3), 273–281. https://doi.org/10.1080/14640746808400161

Wikipedia contributors. (2020). Gödel numbering — Wikipedia, The Free Encyclopedia [[Online; accessed 17-January-2021]]. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=G%C3%B6del_numbering&oldid=988835618

Wikipedia-bijdragers. (2021). Hoofdstelling van de rekenkunde — Wikipedia, de vrije encyclopedie [[Online; accessed 11-januari-2021]]. https://nl.wikipedia.org/w/index.php?title=Hoofdstelling_van_de_rekenkunde&oldid=57998395

Zalta, E. N. (2020). Gottlob Frege. In E. N. Zalta (Red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2020). Metaphysics Research Lab, Stanford University.