# De Banach-Tarskiparadox

Over de Relatie tussen
Wiskunde en de Werkelijkheid

*Door:*
Joris de Man

# De Banach-Tarskiparadox

## Over de Relatie tussen Wiskunde en de Werkelijkheid

*Profiel:*
Natuur en Gezondheid

*Begeleider:*
Helle Hendriks

*Vakken:*
Wiskunde, Natuurkunde

*In samenwerking met:*
K.P. Hart, TU Delft

*Door:*
Joris de Man, 6 VWO

Dominicus College
Nijmegen

21 februari 2019

*Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.*

- Albert Einstein

## Dankwoord

Dit werkstuk was niet mogelijk geweest zonder de hulp van twee personen. Allereerst mijn begeleider, mevrouw Hendriks. Zij heeft het toch wel bijzondere onderwerp vanaf het begin af aan gesteund en had niets dan enthousiaste woorden erover. Dat zorgde ervoor dat ook ik enthousiaster werd over het onderwerp, wat de afronding van het werkstuk mogelijk maakte. Voorts heeft haar commentaar talrijke inzichten en correcties van fouten opgeleverd. En natuurlijk vooral bedankt voor de prettige samenwerking!

Daarnaast dank aan professor Hart van de Technische Universiteit Delft. Hij heeft de moeite genomen om ruim twee uur te spreken over het fascinerende onderwerp en daarmee een aantal stukken van het bewijs opgehelderd, benadrukt wat de belangrijke delen van het bewijs zijn en bovendien de motivatie gegeven om ook de sterke vorm van de paradox te bewijzen. Verder heeft hij het werkstuk van veel waardevol commentaar voorzien, wat een aantal wiskundige (en taalkundige) fouten heeft voorkomen. Ook heeft hij het boek van Wagon en Tomkowicz, *The Banach-Tarski Paradox* te leen gegeven, dat een zeer bruikbaar naslagwerk was bij het maken van het werkstuk.

*Veel dank!*

*Nijmegen, Februari 2019*

# Inhoudsopgave

# Introductie

De wiskunde is een bijzonder domein. Ze is als kunst: elegant, diepgaand, abstract en vaak onbegrijpelijk. Misschien vooral onbegrijpelijk: doorgaans is het nodig veel wiskunde te kennen om de pracht en kracht van een bewijs in te kunnen zien. Wat de wiskunde zo bijzonder maakt, is haar vermogen om onfeilbare waarheden te produceren, door van niets anders gebruik te maken dan de pure logica. Net als kunst kan de wiskunde ons verrassen. Ze laat ons zien dat volgens de logica verantwoorde resultaten niet altijd intuïtief zijn. Sommige stellingen gaan zelfs zo ver, dat ze te boek staan als *paradox*.

Een van de wonderlijkste paradoxale stellingen is de Banach-Tarskiparadox, die in 1924 gepubliceerd werd door haar bedenkers Stefan Banach en Alfred Tarski [1]. De twee bewezen dat het mogelijk is om een solide bal in eindig veel stukken te snijden, en de stukken vervolgens weer in elkaar te schuiven tot *twee kopiën* van diezelfde bol (zie Figuur 1). Het behoeft geen wiskundige om te zien dat dit direct in strijd is met al onze kennis en intuïties over de wereld. Niet alleen dat, zelfs wiskundig lijkt het geheel absurd. Een verdubbeling van een bol tot twee bollen, dat lijkt toch niets anders dan $1 = 1 + 1$? Toch zijn de wetten van de redeneerkunst niet verbroken. Zoals gezegd geeft de wiskunde pure waarheden - zolang de redenering correct is -, en de Banach-Tarskiparadox is er een van.

Figuur 1: De Banach-Tarskiparadox

Het resultaat wordt vaak als volgt beschreven: het is mogelijk een erwt te nemen, deze in stukken te hakken en weer in elkaar te zetten in een bal zo groot als de zon. De paradox doet dan ook denken aan de vermenigvuldiging van de broden, een van de wonderen van Jezus. Jezus sneed een aantal broden in stukken en maakte er vervolgens duizenden van. Is God dan daadwerkelijk een meesterlijk wiskundige, en de Banach-Tarskiparadox een mirakel, of is er meer aan de hand?

Er lijkt in ieder geval een sterke relatie te zijn tussen de wiskunde en de werkelijkheid. Alle wetenschap leunt per slot van rekening op de wiskunde. De natuurkunde, de studie van het universum zelf, nog het meeste. De geschiedenis is bezaaid met gevallen waarin wiskundige theoriën voorspellingen deden over de werkelijkheid, die perfect bleken te kloppen.

Figuur 2: Was Jezus een wiskundige?

We zullen onderzoeken wat die relatie tussen de wiskunde en de werkelijkheid precies inhoudt, en, specifieker, een antwoord zoeken op de volgende vraag: *Is de Banach-Tarskiparadox mogelijk in de werkelijkheid?*

Daartoe bekijken we om te beginnen in Hoofdstuk 1 het deelgebied van de wiskunde dat ten grondslag ligt aan de Banach-Tarskiparadox: de verzamelingenleer. Vervolgens nemen we in Hoofdstuk 2 de gelijkverdeelbaarheid onder de loep, het belangrijkste begrip voor de stelling van Banach en Tarski. Met de benodigde voorkennis in handen zullen we in Hoofdstuk 3 de Banach-Tarskiparadox ontleden, en alle stukken van het bewijs leveren die het bizarre resultaat mogelijk maken. Afsluitend zal in Hoofdstuk 4 gekeken worden naar de mogelijkheid van de paradox in de werkelijkheid, en bovenal de relatie tussen wiskunde en de werkelijkheid en de filosofische vragen die daarbij komen kijken.

Vanuit fysische en filosofische overwegingen is de verwachting dat het zeer onwaarschijnlijk is dat de Banach-Tarskiparadox mogelijk is in de werkelijkheid, maar dat dit nooit met zekerheid te bepalen is.

**Hoofdvraag:** *Hoe werkt de Banach-Tarskiparadox, en is deze mogelijk in de werkelijkheid?*
**Deelvragen:**

1. *Wat zijn de fundamentele onderdelen van de verzamelingenleer, en wat houden ze in?*
2. *Wat voor relatie is gelijkverdeelbaarheid, en welke eigenschappen heeft het?*

3. *Hoe is de Banach-Tarskipardox te bewijzen?*
4. *Is de Banach-Tarskiparadox toe te passen op subatomaire deeltjes?*

**Hypothese:** *Het is onmogelijk met zekerheid te bepalen of de Banach-Tarskiparadox wel of niet mogelijk is in de werkelijkheid.*

We zullen de eerste drie deelvragen beantwoorden door, aan de hand van wiskundige vakliteratuur, definities te geven en natuurlijk vooral stellingen te bewijzen. Daarnaast spreken we, voordat we de paradox in Hoofdstuk 3 bewijzen, met een wiskundige, die we achteraf ook de wiskundige bewijzen laten controleren om fouten te voorkomen. Zo is van tevoren de opbouw van het bewijs goed in kaart gebracht. Voor de laatste deelvraag maken we gebruik van natuurkundige literatuur, die we combineren met de in de vorige deelvragen verworven kennis, om zo de voor- en tegenargumenten voor de mogelijkheid van de paradox in de werkelijkheid tegenover elkaar te zetten. De antwoorden op de vier deelvragen vormen tezamen het antwoord op de hoofdvraag.

Het zal een reis worden door veel verschillende takken van de wiskunde. Langzaam zullen de puzzelstukken aan elkaar hechten en het bewijs van de Banach-Tarskiparadox vormen. De bewijzen zijn niet altijd even gemakkelijk, en zijn daarom voorzien van verklarend commentaar. Hiermee kan iedere lezer een idee krijgen van de wondere wereld van de wiskunde, en wellicht zelfs Banach-Tarski zelf doorgronden.

*Veel leesplezier!*

# Hoofdstuk 1

# De verzamelingenleer

Het bewijs van de stelling van Banach en Tarski is een bewijs vanuit de verzamelingenleer. De verzamelingenleer is een tak van de wiskunde waarmee niet iedereen bekend is, en daarom is het verstandig om de theoretische beginselen ervan nog eens goed te bezichtigen. Allereerst zal er gekeken worden naar verzamelingen zelf. Vervolgens zullen de fundamentele operaties van de verzamelingenleer worden behandeld, samen met enkele belangrijke eigenschappen van verzamelingen. We zullen zien wat afbeeldingen zijn, en kennis maken met verschillende soorten oneindigheid. Afsluitend zal de rol van het keuzeaxioma worden besproken.

## 1.1 Verzamelingen

### 1.1.1 Definitie

Waar binnen de 'gewone' wiskunde getallen het fundamentele object zijn, is binnen de verzamelingenleer het fundamentele object de verzameling. Georg Cantor, de grondlegger van de verzamelingenleer, beschreef verzamelingen als volgt, [2]: "Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung $M$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten $m$ unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen." Een verzameling is dus een collectie van geheel verschillende objecten (die 'elementen' genoemd worden en bijvoorbeeld getallen kunnen zijn) die wordt beschouwd als één geheel.

### 1.1.2 Notatie

De notatie van verzamelingen bestaat uit accolades waarbinnen de elementen worden opgesomd, gescheiden door middel van een komma [3, hfdst. 2, p. 10]. Een verzameling $A$ met elementen 0, 2 en 4 wordt genoteerd als: $A = \{0, 2, 4\}$. Om aan te geven dat een element, zeg 2, een element van $A$ is wordt genoteerd: $2 \in A$. Als 2 geen element van A is, wordt dit genoteerd als $2 \notin A$. Vaak wordt een speciale notatie gebruikt om de elementen van een verzameling verkort weer te geven, door de voorwaarde(n) te geven waaraan de elementen moeten voldoen: $B = \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \pi \,\}$ is bijvoorbeeld de verzameling reëele getallen exclusief $\pi$. Voor verzamelingen met oneindig veel elementen worden vaak puntjes gebruikt, bijvoorbeeld $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ voor de natuurlijke getallen. Een speciale verzameling is de *lege verzameling* $\{\,\}$. Deze wordt genoteerd met $\varnothing$. Vanzelfsprekend geldt voor de lege verzameling: $(\forall x)(x \notin \varnothing)$.

### 1.1.3 Gelijke verzamelingen

**Definitie 1.1.** Twee verzamelingen heten *gelijk* als ze dezelfde elementen bevatten.[1] Notatie: $S = T$, ofwel: $S = T \iff ((\forall x)(x \in S \iff x \in T))$.[2]

Voor twee verzamelingen $S$ en $T$ geldt dus $S = T$ dan en slechts dan als elk element uit $S$ ook een element uit $T$ is, en omgekeerd. Zo geldt $\{4, 5, 6\} = \{6, 4, 5\}$, maar niet $\{3, 6, 9\} = \{3, 7, 9\}$. Het laatste wordt genoteerd als $\{3, 6, 9\} \neq \{3, 7, 9\}$.

## 1.2 Elementaire operaties

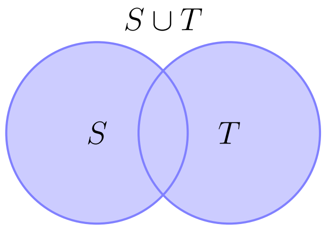
Nu het begrip verzameling gedefinieerd is, kunnen enkele belangrijke operaties bekeken worden, wat we doen aan de hand van [3, hfdst. 2, p. 11] en het boek van Devlin [4, hfdst. 1, p. 4]. De fundamentele operaties komen uitgebreid terug in het bewijs van de paradox; het is dus van belang ze helder te definiëren. Voor het inzichtelijk maken van de operaties zijn Venn-diagrammen toegevoegd, waarin zeer duidelijk te zien is wat de operaties precies voorstellen.

[1] Merk daarbij op dat de *ordening* van de elementen er dus niet toe doet.

[2] Zeer formeel beschouwd is dit eigenlijk het *gelijkheidsaxioma*, een van de grondbeginselen van de verzamelingenleer. Voor de leesbaarheid is het axioma hier als een definitie benoemd.

### 1.2.1 Vereniging

De vereniging kan gezien worden als de additie van de verzamelingenleer. De operatie combineert - zoals de naam al doet vermoeden - twee verzamelingen tot een nieuwe verzameling door de elementen van beide verzamelingen samen te nemen.



Figuur 3: Vereniging

**Definitie 1.2.** De *vereniging* van twee verzamelingen $S$ en $T$ is de verzameling van alle elementen die in $S$ of in $T$ zitten. Notatie: $S \cup T$, ofwel: $S \cup T = \{ x \mid (x \in S) \vee (x \in T) \}$.

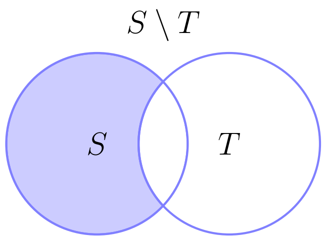
Merk op dat deze operatie zowel commutatief ($S \cup T = T \cup S$) als associatief ($S \cup (T \cup Z) = (S \cup T) \cup Z$ met $Z$ een verzameling) is. De vereniging van meerdere verzamelingen kan verkort worden weergegeven:

$$\bigcup_{n=a}^{b} S_n = S_a \cup S_{a+1} \cup \cdots \cup S_{b-1} \cup S_b \text{ met } a < b$$

Zo geldt: $\{0, 2, 4\} \cup \{0, 1, 3, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Als $C$ een collectie verzamelingen is, wordt de vereniging van alle verzamelingen in $C$ ook wel genoteerd als $\bigcup C$. De notatie voor de vereniging van meerdere verzamelingen komt meestal terug als $\bigcup_{n=1}^{b} S_n$, en is vergelijkbaar met de sigma-notatie voor sommen: $\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b-1) + f(b)$. Bij $n$ wordt dus steeds 1 opgeteld. Verder kan $b$ - net als bij de sigma-notatie - de waarde $\infty$ aannemen, wat een oneindige rij verenigingen op zou leveren. Men spreekt in dat geval dan ook van een oneindige vereniging.

### 1.2.2 Verschil

Het verschil lijkt, net als de vereniging, op een conventionele operatie op getallen: de aftrekking. Ook deze operatie combineert twee verzamelingen tot een nieuwe verzameling. De nieuwe verzameling bestaat uit alle elementen van een verzameling, min de elementen die ook in een specifieke andere verzameling zitten. De definitie verduidelijkt het begrip verder:



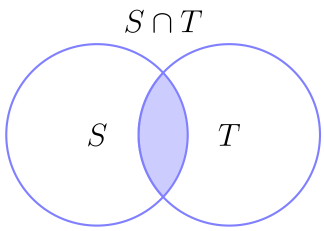
Figuur 4: Verschil

**Definitie 1.3.** Het *verschil* van twee verzamelingen $S$ en $T$ is de verzameling van alle elementen uit $S$ die geen element van $T$ zijn. Notatie: $S \setminus T$, ofwel: $S \setminus T = \{\, x \mid (x \in S) \wedge (x \notin T) \,\}$.[3]

Zo geldt voor $S = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ en $T = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ dat $S \backslash T = \{3, 12, 15\}$.

### 1.2.3 Intersectie

De intersectie (ook wel doorsnede) van twee verzamelingen $S$ en $T$ combineert de twee verzamelingen tot een nieuwe verzameling die alle elementen bevat die in $S$ én in $T$ zitten.



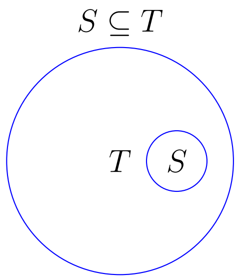
Figuur 5: Intersectie

**Definitie 1.4.** De *intersectie* of *doorsnede*, van twee verzamelingen $S$ en $T$ is de verzameling van alle elementen die in $S$ en in $T$ zitten. Notatie: $S \cap T$, ofwel: $S \cap T = \{\, x \mid (x \in S) \wedge (x \in T) \,\}$.

Zo geldt: $\{1, 5, 8\} \cap \{2, 3, 5, 7, 8\} = \{5, 8\}$. Ook deze operatie is commutatief en associatief. Als $C$ een collectie verzamelingen is, wordt de intersectie van alle verzamelingen in $C$ ook wel genoteerd als $\bigcap C$.

## 1.3 Deelverzamelingen

Buiten de operaties zijn er nog enkele belangrijke begrippen te behandelen, waaronder deelverzamelingen. Zoals de naam al suggereert is een deelverzameling een verzameling wiens elementen ook deel uitmaken van een andere verzameling [4, hfdst. 1, p. 3] [3, hfdst. 2, p. 10-11]:



Figuur 6: Een deelverzameling

**Definitie 1.5.** Voor twee verzamelingen $S$ en $T$ geldt dat $S$ een *deelverzameling* is van $T$ dan en slechts dan als elk element uit $S$ ook een element uit $T$ is. Notatie: $S \subseteq T$, ofwel: $S \subseteq T \iff ((\forall x)(x \in S \Rightarrow x \in T))$.

[3]Ook de notatie $S - T$ wordt gebruikt. In dit verslag zal de notatie $S \setminus T$ gehanteerd worden.

Zo geldt er: $\{\pi, e, \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{R}$. Andersom kan in het geval dat $S \subseteq T$ ook gezegd worden dat $T$ $S$ bevat: $T \supseteq S$, wat natuurlijk op hetzelfde neerkomt. Merk op dat $(S \subseteq T \wedge T \subseteq S) \iff (S = T)$. Naast de normale deelverzameling is er nog een 'sterkere' vorm deelverzameling: de strikte deelverzameling.

**Definitie 1.6.** Een verzameling $S$ is een *strikte deelverzameling* van $T$ als geldt: $S \subseteq T \wedge S \neq T$. Notatie: $S \subset T$.

Zo geldt bijvoorbeeld: $\{1, 2, 4, 8, 16\} \subset \mathbb{N}$.

## 1.4 Disjuncte verzamelingen

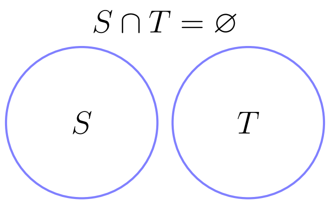
Disjuncte verzamelingen zijn niets anders dan verzamelingen die geen elementen met elkaar gemeen hebben. Als we dus de intersectie van twee disjuncte verzamelingen nemen, is deze gelijk aan de lege verzameling [5, hfdst. 4, p. 15]:

**Definitie 1.7.** Twee verzamelingen $S$ en $T$ heten *disjunct* dan en slechts dan als $S \cap T = \varnothing$.

Zo geldt dat $\{3, 9, 27\}$ en $\{2, 4, 8, 16\}$ disjunct zijn, maar $\{1, 5, 10\}$ en $\{5, 10, 14\}$ niet. De definitie van disjuncte verzamelingen kan worden uitgebreid naar verzamelingen van verzamelingen, in de vorm van de paarsgewijs disjuncte verzameling.

**Definitie 1.8.** Een verzameling verzamelingen $C$ heet *paarsgewijs disjunct* dan en slechts dan als voor alle $S \in C$ en $T \in C$ met $T \neq S$ geldt dat $S \cap T = \varnothing$.

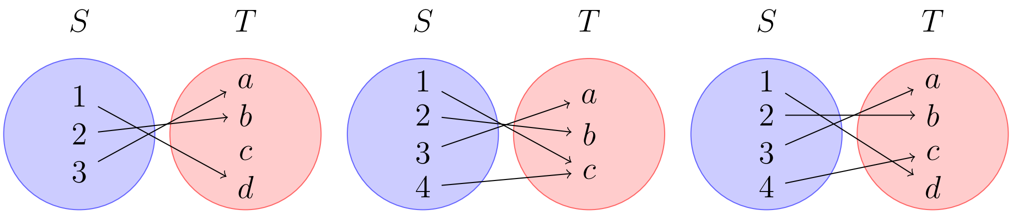
Nu disjuncte verzamelingen gedefinieerd zijn, kan ook de disjuncte vereniging worden toegelicht. Zoals de naam al suggereert, is de disjuncte vereniging simpelweg de vereniging van disjuncte verzamelingen. Hiervoor zal in dit verslag voor beknoptheid een aparte notatie gebruikt worden: $\sqcup$ in plaats van $\cup$. Wanneer $S \cap T = \varnothing$ en het van belang is dat de te verenigen verzamelingen disjunct zijn wordt $S \cup T$ dus $S \sqcup T$.



Figuur 7: Disjuncte verzamelingen

## 1.5 Afbeeldingen

Een *bijectie* is een voorbeeld van een *afbeelding*. Afbeeldingen zijn niets anders dan functies, en vormen dus een relatie tussen twee verzamelingen die elementen uit de ene verzameling koppelt aan elementen van de andere verzameling. Een afbeelding $f$ van een verzameling $S$ op $T$ wordt genoteerd als $f : S \to T$. Het is daarbij belangrijk dat bij iedere $x \in S$ er één $y \in T$ hoort. Voor elke $x \in S$ moet er dus een element $f(x) \in T$ bestaan (zie Figuur 8). Het toepassen van een afbeelding $f$ op alle elementen uit een verzameling $C$ wordt ook wel genoteerd als $f(C) = \{ f(x) \mid x \in C\}$. Voor de definitie van een bijectieve afbeelding zijn eerst twee andere definities nodig [6, hfdst. 2, p. 54] [4, hfdst. 1, p. 14-15].




(a) Injectieve afbeelding (b) Surjectieve afbeelding (c) Bijectieve afbeelding

Figuur 8: Afbeeldingen

**Definitie 1.9.** Een afbeelding $f$ van $S$ op $T$ heet *injectief* dan en slechts dan als voor elke $x \in S$ en $y \in S$ met $x \neq y$ geldt dat $f(x) \neq f(y)$. Elk element uit $T$ mag dus gekoppeld zijn aan hoogstens één element uit $S$.

**Definitie 1.10.** Een afbeelding $f$ van $S$ op $T$ heet *surjectief* dan en slechts dan als er voor elke $y \in T$ een $x \in S$ is met $f(x) = y$. Elk element in $T$ moet dus gekoppeld zijn aan op zijn minst één element uit $S$.

Hiermee is de definitie van een bijectie te geven: een bijectie van $S$ op $T$ is een afbeelding die elk element uit $S$ afbeeldt op exact één element uit $T$, en waarbij elk element uit $T$ gekoppeld is aan exact één element uit $S$, ofwel een afbeelding die zowel injectief als surjectief is.

**Definitie 1.11.** Een afbeelding $f$ van $S$ op $T$ heet *bijectief* dan en slechts dan als deze zowel injectief als surjectief is.

Een voorbeeld van een dergelijke afbeelding is de afbeelding van $\mathbb{N}$ op de verzameling positieve even getallen $E = \{ x \mid x = 2n \wedge n \in \mathbb{N} \}$. Dit is een bijectie $f : \mathbb{N} \to E$ gegeven door $n \mapsto 2n$.[4]

## 1.6 Aftelbaarheid en overaftelbaarheid

Figuur 9: M.C. Escher maakte veelvuldig gebruik van oneindigheid

De oneindigheid speelt een fundamentele rol bij de Banach-Tarskiparadox, maar is niet zo simpel als ze lijkt. Zo bestaan er oneindigheden van verschillende groottes. Bij de Banach-Tarskiparadox zullen we te maken krijgen met twee van deze soorten: de aftelbare en overaftelbare oneindigheid. De aftelbare oneindigheid is de conventionele oneindigheid, waar bijna iedereen wel mee bekend is. Het is de oneindigheid van de oneindige natuurlijke getallen; het tellen tot in de oneindigheid. Intuïtief is een verzameling aftelbaar als haar elementen te 'tellen' zijn. Deze telbaarheid betekent in feite dat we aan ieder element van de verzameling één uniek natuurlijk getal kunnen koppelen. Dit houdt in dat er een bijectie met een deelverzameling van de natuurlijke getallen (heel $\mathbb{N}$ voor een aftelbaar oneindige verzameling) bestaat [3, hfdst. 6, p. 39-40]:

**Definitie 1.12.** Een verzameling $S$ heet *aftelbaar* dan en slechts dan als er een bijectieve afbeelding $C \to S$ bestaat met $C \subseteq \mathbb{N}$.

Een voorbeeld van een aftelbare (oneindige) verzameling is de verzameling van alle positieve even getallen: er bestaat immers een bijectieve afbeelding van $\mathbb{N}$ op die verzameling (zie 1.5).[5] Daaruit valt direct af te leiden waarom zo een verzameling aftelbaar heet. Wat men doet bij tellen is namelijk vergelijkbaar; men correspondeert elk natuurlijk getal met een te tellen object. Zo zijn de positieve even getallen te 'tellen': $0 \to 0$, $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 6$, etc. Er bestaan echter verzamelingen waarbij het niet mogelijk de elementen te 'tellen'. Zulke verzamelingen heten overaftelbaar [3, hfdst. 6, p. 40].

[4]Dit kan dus ook geschreven worden als $f(n) = 2n$, het is niets anders dan een functie.

[5]Een interessant gevolg hiervan is dat de verzamelingen van de natuurlijke getallen en de positieve even getallen dezelfde grootte hebben; er zijn dus evenveel positieve even als natuurlijke getallen. Hieruit blijkt dus al dat oneindigheid ogenschijnlijk rare resultaten teweeg kan brengen.

**Definitie 1.13.** Een verzameling $S$ heet *overaftelbaar* dan en slechts dan als er geen bijectieve afbeelding $C \to S$ bestaat met $C \subseteq \mathbb{N}$.

Overaftelbare verzamelingen zijn *veel* groter dan aftelbare verzamelingen. Een voorbeeld van een overaftelbare verzameling is $\mathbb{R}$ [3, hfdst. 6, p. 40]. Dit lijkt op het eerste gezicht wellicht vreemd. Toch is het intuïtief wel te verklaren: men kan beginnen met tellen bij $0 \in \mathbb{R}$, maar wat daarna moet komen is niet duidelijk. Een getal als $0.000\ldots1 \in \mathbb{R}$ volstaat niet, er kan immers altijd een 'extra' 0 worden toegevoegd. Het 'tellen' van de reëele getallen is dus niet mogelijk, en de verzameling reëele getallen is groter dan de verzameling natuurlijke getallen.[6]

## 1.7 ZF, ZFC en het keuzeaxioma

Met alle basis uit de weg rest alleen het keuzeaxioma, dat cruciaal is voor het bewijs van de Hausdorff-paradox in Hoofdstuk 3. Zoals elke tak van de wiskunde heeft de verzamelingenleer een aantal axioma's als basis. De standaardaxioma's van de verzamelingenleer zijn de Zermelo-Fraenkelaxioma's (ZF). Het ZF axiomastelsel bestaat uit acht axioma's en is vernoemd naar en grotendeels opgesteld door Zermelo en Fraenkel [7] [8] [9]. Er is nog een ander axioma dat vaak bij de ZF axioma's wordt inbegrepen: het keuzeaxioma. Het is belangrijk om de rol van dit axioma - dat dus niet binnen ZF valt - te bespreken.


Figuur 10: Oppassen met het keuzeaxioma

Het keuzeaxioma werd voor het eerst opgesteld door Zermelo [10] in 1904 en heeft een speciale plek binnen de wiskunde, vooral omdat het in het begin tamelijk controversieel was [11, hfdst. 1, p. 8]. Toch heeft het keuzeaxioma zijn controversiële status door de jaren heen verloren. Het wordt door de meeste contemporaine wiskundigen geaccepteerd, omdat het ontzettend veel toepassingen kent in sterk uiteenlopende takken van de wiskunde [12, hfdst. 4, p. 279]. Verder is het keuzeaxioma equivalent aan vele andere postulaten, zoals de bewering dat elke vectorruimte een basis heeft [13]. Het keuzeaxioma is in die vorm gemakkelijker te accepteren. Het axioma-stelsel van

[6] Het formele bewijs van deze claim ligt buiten het bereik van dit werkstuk. Het is vooral belangrijk om te zien dat er verschillende groottes oneindige verzamelingen zijn.

Zermelo en Fraenkel samen met het keuzeaxioma wordt ook wel ZFC (met C voor *Axiom of Choice*) genoemd. In de rest van dit verslag zal uiteraard worden uitgegaan van de negen axioma's van ZFC. De formele definitie van het keuzeaxioma wordt hieronder beschreven [4, hfdst. 2, p. 56]:

**Axioma 1** (Keuzeaxioma)**.** *Zij $C$ een paarsgewijs-disjuncte verzameling van niet-lege verzamelingen. Dan is het mogelijk een nieuwe verzameling $M$ te creëren die precies één element bevat van elke verzameling uit $C$.*

Het keuzeaxioma is voor te stellen met behulp van een (eventueel oneindige) rij van met munten gevulde buidels. Het keuzeaxioma stelt dan dat het mogelijk is om uit elke buidel één munt te halen. Merk daarbij wel op dat het niet duidelijk is welke munt nu precies gekozen wordt. Een van de vreemdste gevolgen van het keuzeaxioma, de *Banach-Tarskiparadox* zelf, zal in de volgende hoofdstukken nader worden bekeken.

## 1.8 Conclusie

In dit hoofdstuk hebben we gezien wat verzamelingen in de wiskunde precies inhouden: een verzameling is een collectie unieke elementen die als geheel beschouwd wordt. Net als bij getallen horen bij verzamelingen bepaalde operaties, zoals de vereniging en de intersectie. Verzamelingen kunnen gelijk zijn, slechts enkele elementen gemeenschappelijk hebben of disjunct zijn. Daarnaast kan een verzameling een deelverzameling zijn van een andere verzameling. Ook is het begrip afbeelding als functie binnen de verzamelingenleer verduidelijkt. Afbeeldingen zijn er in meerdere soorten. We zagen dat er verschillende groottes oneindigheid bestaan, de aftelbare en overaftelbare oneindigheid. Beide vormen zullen terugkomen bij de paradox. Afsluitend hebben we het keuzeaxioma bekeken, een axioma dat essentieel is voor de paradox en stelt dat uit een paarsgewijs disjuncte collectie verzamelingen altijd een verzameling gevormd kan worden die precies één element uit elke verzameling in de collectie bevat.

In het volgende hoofdstuk zal gekeken worden naar nieuwe theorie die voortbouwt op de in hoofdstuk 1 besproken stof, en meer gericht is op de paradox zelf: gelijkverdeelbaarheid.

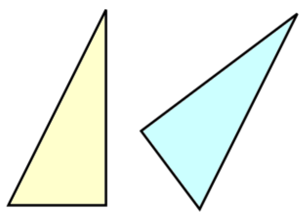
# Hoofdstuk 2

# Gelijkverdeelbaarheid

Het begrip *gelijkverdeelbaarheid* of *equidecomposabiliteit* is welbeschouwd het belangrijkste begrip in dit verslag; niet alleen ligt het ten grondslag aan het bewijs van de Hausdorff- en Banach-Tarskiparadox, het is ook een gewichtig begrip voor de beantwoording van de hoofdvraag. Een uitdieping ervan is dus op zijn plaats. Om te beginnen zal een rigoreuze definitie van congruentie en verwante begrippen worden geformuleerd. Met behulp van deze begrippen kennen we vervolgens gelijkverdeelbaarheid een duidelijke definitie toe. Afsluitend zullen enkele belangrijke eigenschappen van gelijkverdeelbaarheid worden behandeld die bij deelvraag drie en vier hun toepassing vinden.

## 2.1 Congruentie

Gelijkverdeelbaarheid is nauw verwant aan het begrip *congruentie*, dat op zijn plek weer lijkt op gelijkvormigheid. Waar er bij gelijkvormigheid enkel verwacht wordt dat twee objecten 'dezelfde vorm' hebben, is het bij congruentie echter ook een vereiste dat de twee objecten dezelfde grootte hebben (zie Figuur 11). Wat metterdaad bedoeld wordt als twee objecten dezelfde vorm en grootte hebben, is dat de objecten op elkaar te plaatsen zijn door middel van een transformatie waarbij de onderlinge afstand tussen de punten in



Figuur 11: Congruente driehoeken

beide objecten gelijk blijft. Zulk een transformatie is in feite een afstandsbewarende bijectieve afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, waar $\mathbb{R}^n$ staat voor de $n$-dimensionale euclidische ruimte. Een dergelijke afbeelding, een bijectieve afbeelding die afstand behoud, heet ook wel een *isometrie* [14].

**Definitie 2.1.** Een bijectieve afbeelding $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heet een *isometrie* als $\forall a \in \mathbb{R}^n$ en $\forall b \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $d(\phi(a), \phi(b)) = d(a, b)$.[1]

Translaties, spiegelingen en rotaties zijn alle voorbeelden van isometriën. Nu de isometrie gedefinieerd is kan ook congruentie een goede beschrijving worden verschaft. Omdat per definitie alle afstandsbewarende bijectieve afbeeldingen isometriën zijn, zijn objecten dus uitsluitend congruent als er een isometrische transformatie bestaat die het ene object een-op-een op de andere afbeeldt [14] [15].

**Definitie 2.2.** Deelverzamelingen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ en $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heten *congruent* als er een isometrie $\phi$ bestaat waarvoor $\phi(S) = T$. Notatie: $S \cong T$.

Twee cirkels met gelijke radius zijn een voorbeeld van twee congruente objecten. Deze zijn namelijk door middel van een translatie op elkaar te plaatsen. De cirkels zouden niet congruent zijn geweest als hun radii ongelijk waren. Het zou dan immers een vergroting van een van de cirkels vergen om de cirkels op elkaar te kunnen plaatsen.

Merk op dat het hier nog steeds gaat om verzamelingen. We stellen geometrische objecten eenvoudigweg voor als verzamelingen. Een cirkel in $\mathbb{R}^2$ met straal $r$ is zo de deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ van alle punten $p$ met gelijke afstand tot een zeker middelpunt $M$: $\{ p \mid d(M, p) = r \}$. Op deze verzamelingen zijn vervolgens de operaties uit de verzamelingenleer toe te passen. Wat vooral interessant is voor de Banach-Tarskiparadox is het *verdelen* van geometrische objecten in stukken. Dit zal verder worden bekeken in 2.2.

## 2.2 Verdeelbaarheid

Voordat gelijkverdeelbaarheid gedefinieerd kan worden, is het raadzaam eerst te bekijken wat het betekent als een object verdeelbaar is. Als een object verdeelbaar

[1] Hier stelt $d(x, y)$ de afstandsfunctie voor $\mathbb{R}^n$ voor.

is in een aantal andere objecten, bedoelen we daar in feite mee dat het object in stukken te snijden is, en dat die stukken vervolgens verplaatst kunnen worden zodat een aantal losse objecten ontstaan. Dit is te beschrijven met isometriën:

**Definitie 2.3.** Een deelverzameling $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *verdeelbaar* in de verzamelingen $S_1, S_2, \ldots, S_{b-1}, S_b$ als er isometriën $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_{b-1}, \phi_b$ bestaan waarvoor geldt:

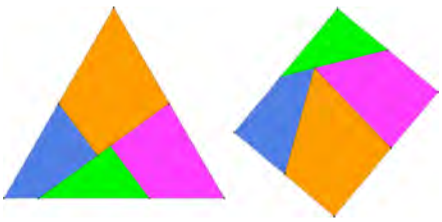
$$\bigsqcup_{n=1}^{b} \phi_n(S_n) = S$$

Dit rijmt ook met het intuïtieve concept van het verdelen van objecten. Wat we doen als we een object 'verdelen', is het opdelen van het object in onoverlappende stukken (zie Figuur 12). Deze stukken moeten vervolgens, eventueel na een afstandsbewarende transformatie, bij elkaar (verenigd) natuurlijk nog steeds gelijk zijn aan het gehele object.

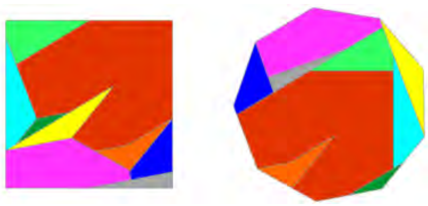
Figuur 12: Verdeelbaarheid en sinaasappels

## 2.3 Gelijkverdeelbaarheid

Gelijkverdeelbaarheid bouwt voort op verdeelbaarheid en congruentie. Het achterliggende idee is dat twee objecten (voor te stellen als verzameling) gelijkverdeelbaar zijn als ze *verdeelbaar* zijn in een *gelijk*, eindig aantal onderling disjuncte stukken (deelverzamelingen) die vervolgens respectievelijk congruent zijn aan elkaar [15]. In Figuur 13 is dit goed te zien:



(a) Driehoek en een rechthoek



(b) Een complexer geval

Figuur 13: Gelijkverdeelbare figuren

**Definitie 2.4.** Deelverzamelingen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ en $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heten *gelijkverdeelbaar* als er deelverzamelingen $S_1, S_2, \ldots, S_{b-1}, S_b$ van $S$ en deelverzamelingen $T_1, T_2, \ldots, T_{b-1}, T_b$ van $T$ bestaan waarvoor:

1. $\bigsqcup_{n=1}^{b} S_n = S$
2. $\bigsqcup_{n=1}^{b} T_n = T$
3. $(\forall n)(S_n \cong T_n)$

Notatie: $S \sim T$.

Met onderstaand voorbeeld, dat opgesteld is aan de hand van het artikel van French [16], wordt duidelijker wat gelijkverdeelbaarheid precies inhoudt. De natuurlijke getallen zijn voor te stellen als punten in de eendimensionale ruimte $\mathbb{R}^1$. Als nu één van die punten wordt weggenomen, is het aan te tonen dat de verzameling die dan ontstaat gelijkverdeelbaar is met de oorspronkelijke verzameling. Omdat het punten in een ruimte betreft, is het namelijk toegestaan om alle punten te transleren met een bepaalde waarde; een translatie is immers een isometrie!

**Lemma 2.1.** *Zij $C$ de verzameling gegeven door $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, dan geldt $C \sim \mathbb{N}$.*

*Bewijs.* Het volstaat deelverzamelingen te vinden van $\mathbb{N}$ en $C$ die onderling congruent zijn. Neem $A = \mathbb{N}$ en verdeel deze in deelverzamelingen $A_1 = \{\, x \mid x = 2n \wedge n \in \mathbb{N} \,\} = \{0, 2, 4, \dots\}$ en $A_2 = \mathbb{N} \setminus A_1 = \{1, 3, 5, \dots\}$, zodat $\bigsqcup_{n=1}^{2} A_n = A_1 \sqcup A_2 = A = \mathbb{N}$. Transleer nu elk punt in $A_2$ met 2 naar rechts tot $A_2' = \{3, 5, 7, \dots\}$. Er geldt: $A_2 \cong A_2'$ en klaarblijkelijk $A_1 \cong A_1$. Merk nu op dat $C = A_1 \sqcup A_2' \sim A_1 \sqcup A_2 = A = \mathbb{N}$. We zien dat $C \sim \mathbb{N}$. □

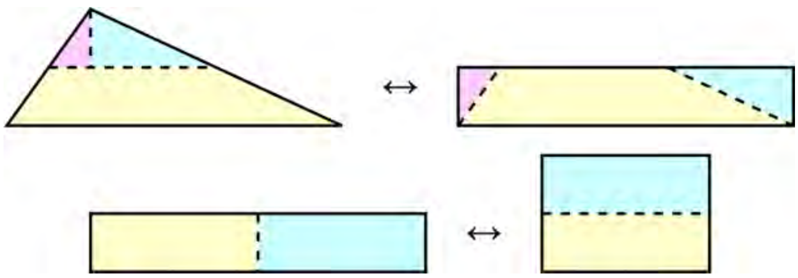
## 2.4 Eigenschappen van gelijkverdeelbaarheid

### 2.4.1 Symmetrie

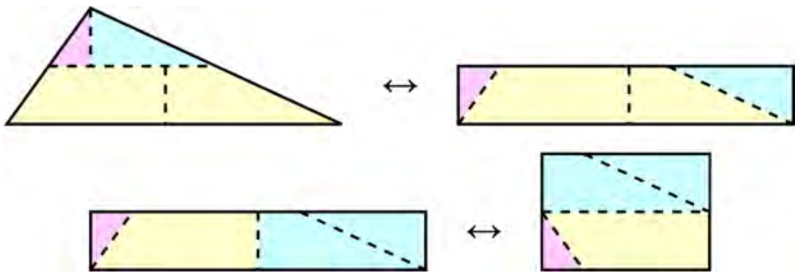
Gelijkverdeelbaarheid is een symmetrische relatie [15]: als $A$ gelijkverdeelbaar is met $B$, dan is $B$ ook gelijkverdeelbaar met $A$. Er geldt dus: $A \sim B \iff B \sim A$. Dit behoeft geen bewijs; het volgt vrijwel direct uit de definitie. Als geldt dat $A \sim B$, dan betekent dit dat er rijen deelverzamelingen van $A$ en $B$ bestaan zoals in Definitie 2.4. Daarmee is voldaan aan de eerste twee eisen voor zowel $A \sim B$ als $B \sim A$. Merk nu op dat congruentie symmetrisch is: als er een isometrie $\phi$ bestaat waarvoor $\phi(A) = B$, dan volgt uit het feit dat een isometrie bijectief is dat er een inverse $\phi^{-1}$ bestaat, zodat $\phi^{-1}(B) = A$, en dus $A \cong B \iff B \cong A$. Met het symmetrische karakter van congruentie is ook voldaan aan eis drie, waaruit volgt dat gelijkverdeelbaarheid symmetrisch is.

### 2.4.2 Transitiviteit

Gelijkverdeelbaarheid is naast symmetrisch ook transitief: als $A \sim B$ en $B \sim C$ dan $A \sim C$. Intuïtief is dit gemakkelijk te zien met behulp van Figuur 14. We zien in Figuur 14a dat steeds twee figuren gelijkverdeelbaar zijn: de driehoek is gelijkverdeelbaar met de langwerpige rechthoek, de langwerpige rechthoek met de korte rechthoek. Met wat hulplijnen in Figuur 14b is het ook te zien dat de driehoek gelijkverdeelbaar is met de korte rechthoek (en vice versa). We zien dus dat $A \sim C$ als $A \sim B$ en $B \sim C$. Om de transitiviteit aan te tonen is echter meer werk vereist dan bij 2.4.1. Eerst is een ander resultaat nodig [11, hfdst. 2, p. 31]:



(a) Gelijkverdeelbaarheid tussen beide paren



(b) Stukken die de transitiviteit laten zien

Figuur 14: Transitiviteit van gelijkverdeelbaarheid

**Lemma 2.2.** *Zijn* $R = \bigcup_{n=1}^{b}(S \cap T_n)$ *en* $D = S \cap (\bigcup_{n=1}^{b} T_n)$. *Dan geldt* $R = D$.

*Bewijs.* Neem een element $x \in \bigcup_{n=1}^{b}(S \cap T_n)$. Dan bestaat er een $n'$ zodat $x \in (S \cap T_{n'})$ oftewel $(x \in S) \wedge (x \in T_{n'} \subseteq (\bigcup_{n=1}^{b} T_n))$. We mogen dus schrijven: $x \in (S \cap (\bigcup_{n=1}^{b} T_n))$. Hieruit volgt: $(\bigcup_{n=1}^{b}(S \cap T_n)) \subseteq (S \cap (\bigcup_{n=1}^{b} T_n))$ oftewel

$R \subseteq D$. Nu doen we hetzelfde andersom. Neem een element $y \in (S \cap (\bigcup_{n=1}^{b} T_n))$. Dan bestaat er een $n'$ zodat $y \in (S \cap T_{n'})$ oftewel $y \in (S \cap T_{n'}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{b}(S \cap T_n)$. We mogen dus schrijven: $y \in \bigcup_{n=1}^{b}(S \cap T_n)$. Hieruit volgt: $(S \cap (\bigcup_{n=1}^{b} T_n)) \subseteq (\bigcup_{n=1}^{b}(S \cap T_n))$ oftewel $D \subseteq R$. Herinner dat $R \subseteq D$. We zien nu dat $R = D$. $\square$

Door nog eens te kijken naar Figuur 14 zien we dat we de objecten in nog kleinere stukjes moeten verdelen om tot het resultaat $A \sim C$ te komen. Dit gaan we dan ook doen [14]:

**Lemma 2.3.** *Zijn $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^n$ en $C \subseteq \mathbb{R}^n$, met $A \sim B$ en $B \sim C$. Dan $A \sim C$.*

*Bewijs.* $A \sim B$ en $B \sim C$, dus er bestaan rijen:

1. $\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = A$ en $\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i = B$ zodat $(\forall i)(A_i \cong B_i)$.
2. $\bigsqcup_{k=1}^{m} B'_k = B$ en $\bigsqcup_{k=1}^{m} C_k = C$ zodat $(\forall k)(B'_k \cong C_k)$.

en isometriën $\phi_i$ en $\psi_k$ zodat $(\forall i)(\phi_i(A_i) = B_i)$ en $(\forall k)(\psi_k(B'_k) = C_k)$. Er moet onderscheid worden gemaakt tussen de stukken $B_i$ en $B'_k$, omdat het aantal stukken voor de twee opdelingen niet gelijk hoeft te zijn: $n$ en $m$ kunnen immers verschillen. Definieer nu:

1. $A_{i,k} = A_i \cap \phi_i^{-1}(B'_k)$
2. $B_{i,k} = B_i \cap B'_k$
3. $C_{i,k} = \psi_k(B_i) \cap C_k$

Neem nu $P$ en $L$, als mogelijke verdelingen van $A$ en $C$ respectievelijk:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m} A_{i,k} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m} (A_i \cap \phi_i^{-1}(B'_k)) \text{ en } L = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} C_{i,k} = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} (C_k \cap \psi_k(B_i))$$

Merk op dat index $i$ bij $L$ en index $k$ bij $P$ allebei alleen rechts van het intersectieteken staan. Nu is dus Lemma 2.2 te gebruiken:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcup_{k=1}^{m} \phi_i^{-1}(B'_k) \text{ en } L = \bigcup_{k=1}^{m} C_k \cap \bigcup_{i=1}^{n} \psi_k(B_i)$$

Het stuk $\bigcup_{k=1}^{m} \phi_i^{-1}(B'_k)$ bij $P$ lijkt op de definitie van verdeelbaarheid; we zoeken daarom een gehele $B$, zodat index $k$ wegvalt. Isometrie $\phi_i^{-1}$ blijft constant binnen het genoemde stuk, dus is dit stuk ook te schrijven als $\phi_i^{-1}(\bigcup_{k=1}^{m}(B'_k)) =$

$\phi_i^{-1}(\bigsqcup_{k=1}^{m}(B'_k)) = \phi^{-1}(B)$, alle stukken $B'_k$ zijn immers per definitie onderling disjunct. Herinner dat $\phi_i(A) = B_i$, en zie dat $B_i \subseteq B$. Daarmee geldt: $\phi_i(A_i) = B_i \subseteq B$. Gebruik nu de inverse: $\phi_i^{-1}(\phi_i(A_i)) = A_i = \phi_i^{-1}(B_i) \subseteq \phi^{-1}(B)$. Dit geeft:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap \phi_i^{-1}(B)) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

Voor $L$ is hetzelfde mogelijk: $\bigcup_{i=1}^{n}(\psi_k(B_i)) = \psi_k(\bigcup_{i=1}^{n}(B_i)) = \psi_k(\bigsqcup_{i=1}^{n}(B_i) = \psi_k(B)$. Neem ook hier de bijbehorende isometrie voor elk stuk: $\psi_k(B'_k) = C_k$ en zie dat $B'_k \subseteq B$. Gebruik genoemde isometrie (niet de inverse): $\psi_k(B'_k) = C_k \subseteq \psi_k(B)$:

$$L = \bigcup_{k=1}^{m}(C_k \cap \psi_k(B)) = \bigcup_{k=1}^{m} C_k = C$$

$P$ en $L$ zijn dus inderdaad de gezochte verdelingen. Als $A \sim C$, dan moeten alle stukken $A_{i,k}$ en $C_{i,k}$ echter ook nog onderling disjunct en congruent zijn. Het eerste is eenvoudig te controleren. Neem voor beide stukken indices $i, i', k, k'$, zodat:

1. $A_{i,k} \cap A_{i',k'} = A_i \cap \phi_i^{-1}(B'_k) \cap A_{i'} \cap \phi_i^{-1}(B'_{k'}) = A_i \cap A_{i'} \cap \phi_i^{-1}(B'_k) \cap \phi_i^{-1}(B'_{k'})$
2. $C_{i,k} \cap C_{i',k'} = \psi_k(B_i) \cap C_k \cap \psi_k(B_{i'}) \cap C_{k'} = C_k \cap C_{k'} \cap \psi_k(B_i) \cap \psi_k(B_{i'})$

Stukken $A_i \cap A_{i'}$ en $\psi_k(B_i) \cap \psi_k(B_{i'})$ zijn gelijk aan $\varnothing$ als $i \neq i'$, $C_k \cap C_{k'}$ en $\phi_i^{-1}(B'_k) \cap \phi_i^{-1}(B'_{k'})$ zijn gelijk aan $\varnothing$ als $k \neq k'$. Dit betekent dat beide stukken 1 en 2 gelijk zijn aan $\varnothing$ als $i \neq i' \vee k \neq k'$. Stukken $A_{i,k}$ en $C_{i,k}$ zijn dus onderling disjunct. Verder zijn ze alle inderdaad congruent: $\psi_k(\phi_i(A_{i,k})) = \psi_k(\phi_i(A_i \cap \phi_i^{-1}(B'_k))) = \psi_k(\phi_i(A_i) \cap \phi_i(\phi_i^{-1}(B'_k))) = \psi_k(B_i \cap B'_k) = \psi_k(B_i) \cap \psi_k(B'_k) = \psi_k(B_i) \cap C_k = C_{i,k}$, waarmee aan alle eisen voor gelijkverdeelbaarheid is voldaan. $\square$

## 2.5 Conclusie

Om gelijkverdeelbaarheid te definiëren hebben we eerst gekeken wat congruentie precies inhoudt. Twee objecten zijn congruent als ze op elkaar te plaatsen zijn op een manier die afstanden in de objecten behoudt. Het werd duidelijk dat geometrische objecten voor te stellen zijn als verzamelingen, en dus ook te bewerken zijn aan de hand van de operaties van de verzamelingenleer. We zagen daarna hoe het 'in stukken snijden' ofwel het verdelen van objecten wiskundig gedefinieerd kan worden. Vervolgens kwam het belangrijkste begrip aan bod: de gelijkverdeelbaarheid. Twee objecten zijn gelijkverdeelbaar als beide objecten in een *gelijk* aantal stukken te snijden zijn, op zo een manier dat de stukken van beide objecten onderling congruent zijn. Gelijkverdeelbaarheid heeft, net als andere relaties, bepaalde eigenschappen: ze is symmetrisch en transitief. Deze eigenschappen komen overal terug bij het werken met gelijkverdeelbaarheid, en worden ook belangrijk in het vierde hoofdstuk.

In het volgende hoofdstuk gaan we alle basisstof uit Hoofdstuk 1 en Hoofdstuk 2 gebruiken om de stelling van de miraculeuze bolverdubbeling aan te tonen.

# Hoofdstuk 3

# De Banach-Tarskiparadox

Met alle besproken begrippen kan nu het resultaat van Banach en Tarski onder handen worden genomen. Hiervoor is nog wel een aantal andere resultaten nodig. Om de paradoxen die zullen volgen niet als occulte tovenarij te doen blijken, zal allereerst het oneindige hotel van Hilbert besproken worden. Dit zal het begrip oneindigheid - voor zover dit mogelijk is - wat denkbaarder maken. Daarop zal langzaam worden toegewerkt naar de verdubbeling in drie dimensies. Eerst zal een paradoxaal resultaat voor de omtrek van een cirkel bekeken worden, daarna een voor het oppervlak van de eenheidsbol en ten langen leste de wonderbaarlijke verdubbeling van de massieve eenheidsbol: de Banach-Tarskiparadox.

## 3.1 Het Hotel van Hilbert


Figuur 15: Geen gewoon hotel

Om te illustreren hoe bevreemdend de oneindigheid kan zijn, heeft wiskundige David Hilbert een hotel bedacht, dat later de naam *Hilberts Hotel* heeft gekregen. Aanvankelijk was het louter een hersenspinseltje dat Hilbert in een van zijn lezingen naar voren had gebracht, maar later is het een bekende wiskundige anekdote geworden [17]. Het hotel is geen doorsnee hotel, het is een oneindig hotel. Aftelbaar oneindig, om precies te zijn: elk verblijf in het hotel is genummerd met een uniek natuurlijk getal.

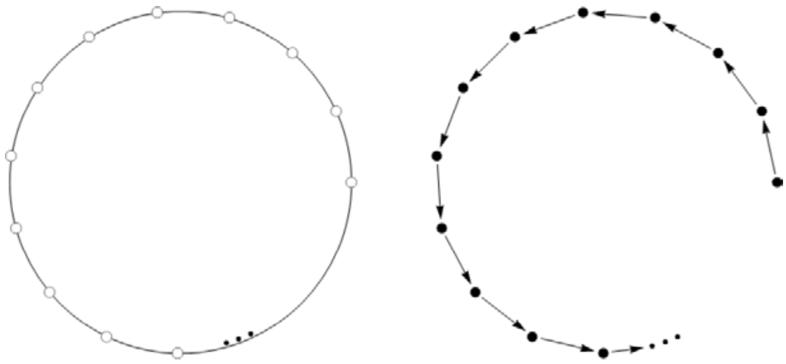
Beeld je in aan te komen bij het bewuste hotel. De eigenaar vertelt je dat alle kamers helaas bezet zijn. Toch is er nog plek: door elke gast naar de kamer met het eerste opvolgende natuurlijke getal te sturen, komt onverhoeds een nieuwe kamer vrij [17]. Elke gast in de kamer met nummer $n$ gaat zo naar de kamer met nummer $n+1$. Toch is het hotel zelf niet veranderd. Ogenschijnlijk heeft het hotel ineens een kamer erbij gekregen, maar dit is niet zo. Deze opmerkelijke constructie is mogelijk omdat het hotel oneindig groot is. In feite is dit analoog aan het al eerder beschreven bewijs in Lemma 2.1. Welbeschouwd is het ook wel logisch: er is geen 'laatste' kamer, geen enkele gast hoeft het hotel te verlaten.

Nog vreemder is dat het zelfs geen probleem is voor het hotel om een aftelbaar oneindig aantal nieuwe gasten te herbergen [17]. Elke al aanwezige bezoeker hoeft slechts van zijn kamer met nummer $n$ te verhuizen naar de kamer met nummer $2n$, en daar is een aftelbaar oneindige verzameling beschikbare kamers. Wiskundig beschouwd is dit alles gewoon mogelijk. Feitelijk zijn de paradoxen die volgen dan ook helemaal geen 'formele' paradoxen: wiskundig kloppen alle redeneringen. We noemen ze echter zo, omdat ze ons klaarblijkelijk als compleet ongerijmd voorkomen.

## 3.2 Omtrek van een cirkel

Het idee van Hilbert kan worden toegepast op de omtrek van de eenheidscirkel $S^1$ [18]. Informeel gesteld nemen we een punt $x \in S^1$ op de omtrek van de cirkel weg. Daarvoor kijken we naar de verzameling $X \subset S^1$ van de punten $x_n$ die verkregen worden door het te verwijderen punt tegen de klok in te roteren met $n \in \mathbb{N}$ radialen ($n$ mag 0 zijn, wat het originele punt $x = x_0$ geeft) tot een nieuw punt $x_n$. Dit is de verzameling $X = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} x_n$. Deze vereniging is disjunct, omdat een rotatie van het punt met (een veelvoud van) een radiaal nooit gelijk is aan de identiteit (zie Stelling 3.1).

Vervolgens gebruiken we een redenering in de geest van het Hotel van Hilbert: roteer alle punten in $X$ opnieuw met een radiaal tegen de klok in (zie Figuur 16). Zie daarbij de gelijkenis met het verplaatsen van de gasten. Dit roteren



Figuur 16: De punten worden verschoven, net als de gasten in Hilberts Hotel

geeft de verzameling $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} x_n = X \setminus \{x_0\}$, en warempel, het punt is verdwenen. Omdat alleen rotaties vereist waren, volgt $S^1 \setminus \{x\} \sim S^1$. De punten worden zogezegd 'verschoven' over de omtrek, net zoals de gasten in de kamers van het Hotel. Dit is ook hier geen probleem, het aantal punten in $X$ is immers aftelbaar oneindig. Dit kan als volgt formeel worden beschreven [14] [18] [19]:

**Stelling 3.1.** *Zij $x$ een punt op de eenheidscirkel $S^1$ in $\mathbb{R}^2$, dan geldt $S^1 \setminus \{x\} \sim S^1$.*

*Bewijs.* Definieer een rotatie $\rho$ van de eenheidscirkel met 1 radiaal. Neem nu $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n x = \{x, \rho x, \rho^2 x, \dots\} \subset S^1$ met $n \in \mathbb{N}$. De rotatie $\rho^n$ is nooit gelijk aan de identiteit, gezien $\pi$ irrationaal is. Anders zou er immers een $n$ bestaan waarvoor $n \bmod 2\pi = 0$,[1] oftewel $n = m \cdot 2\pi$ met $m \in \mathbb{N}$ en daarmee $\pi = \frac{n}{2m}$. Dit is een contradictie. Hieruit volgt dat $X = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \rho^n x$. Roteer vervolgens elk punt in $X$ met $\rho$, dit geeft $\rho(X) = \{\rho x, \rho^2 x, \rho^3 x, \dots\} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \rho^n x$, oftewel $X \setminus \{x\}$. Zie dat $S^1 = (S^1 \setminus X) \cup X \sim (S^1 \setminus X) \cup \rho(X) = S^1 \setminus \{x\}$. Hiermee verkrijgen we $S^1 \setminus \{x\} \sim S^1$ en is de stelling bewezen. $\square$

Merk op dat dit resultaat verkregen wordt met behulp van slechts rotaties. Dit principe zal ook gebruikt worden bij de hierna volgende paradoxen. Zie ook dat er hier geen gebruik wordt gemaakt van het keuzeaxioma. Ook zonder het keuzeaxioma zijn er dus 'paradoxale' (lees: contra-intuïtieve) resultaten te vinden.

[1] Dit houdt in dat er een veelvoud van $2\pi$ zou bestaan dat gelijk is aan een natuurlijk getal, wat natuurlijk absoluut niet kan kloppen.

## 3.3 De vrije groep

Om de Hausdorff-paradox goed te kunnen begrijpen is enige elementaire groepentheorie benodigd. Groepen zijn op zichzelf al interessant, maar voor dit werkstuk is een gedetailleerde uiteenzetting van groepen niet noodzakelijk. Voor de Banach-Tarskiparadox zijn specifiek rotatiegroepen van belang, hoewel er ook andere soorten groepen bestaan, zoals straks zal worden toegelicht.

### 3.3.1 Groepen

**Definitie 3.1.** Een verzameling $G$ gecombineerd met een binaire operatie $\circ$ heet een *groep* (genoteerd met $(G, \circ)$ of kortweg $G$) dan en slechts dan als aan de volgende voorwaarden is voldaan:

1. Voor alle $a \in G, b \in G, c \in G$ geldt $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
2. Er bestaat een $e \in G$ zodat voor alle $a \in G$ geldt $a \circ e = e \circ a = a$
3. Voor alle $a \in G$ bestaat een $a^{-1}$ zodat $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$
4. Voor alle $a \in G, b \in G$ geldt $a \circ b \in G$

Respectievelijk houdt dit in dat de operatie $\circ$ associatief moet zijn, er een identiteit $e$ moet bestaan (niet te verwarren met het getal $e$), er een inverse moet bestaan voor elk element in de groep, en dat voor elke $a$ en $b$ het resultaat van $a \circ b$ ook weer in de groep zit [20, hfdst. 1, p. 7].

In feite is iedereen al bekend met een aantal groepen. Een voorbeeld van een groep is $(\mathbb{Z}, +)$, de verzameling gehele getallen $\mathbb{Z}$ genomen met de operatie optellen. Dit is gemakkelijk te zien. Het is duidelijk voor gehele getallen geldt dat $a + (b + c) = (a + b) + c$. Verder bestaat er een identiteit, 0, want voor alle $a \in \mathbb{Z}$ geldt $a + 0 = 0 + a = a$. Daarnaast is er een inverse voor elk geheel getal $a$, namelijk $-a$. Het optellen van gehele getallen geeft bovendien altijd een ander geheel getal, en hiermee is aan alle eisen voor een groep voldaan. Daarentegen is $\mathbb{N}$ met de operatie optellen geen groep; er bestaan per slot van rekening geen inversen omdat de negatieve getallen ontbreken.

### 3.3.2 Woorden

*Woorden* zijn uitdrukkingen bestaande uit een rij symbolen uit een verzameling [20, hfdst. 2, p. 31]. Zo is *aabca* een woord van $X = \{a, b, c\}$. De elementen van $X$ heten ook wel de *letters* van het woord. Woorden worden veelal korter opgeschreven. Zo kan een woord $\tau\tau\tau\tau\sigma$ geschreven worden als $\tau^4\sigma$. Met deze objecten zijn ook weer groepen te creëren, zoals straks duidelijk zal worden.

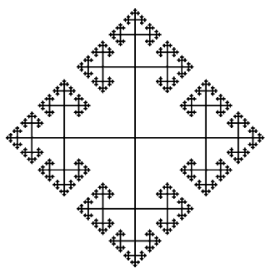
Als we opnieuw de verzameling $X$ nemen, dan kunnen we hier een verzameling $X'$ van maken die naast $a, b, c$ ook de 'inversen' van die letters bevat. Als we een inverse van een letter $a \in X$ noteren als $a^{-1}$ geeft dit $X' = X \cup \{a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}\}$. We zeggen nu dat een woord *gereduceerd* is als we alle aangrenzende paren van letters en hun inversen - dus paren in de vorm van $\tau\tau^{-1}$ - wegwerken [20, hfdst. 2, p. 32] [21, hfdst. 1, p. 4]. Zo is een woord als $\sigma\tau\tau^{-1}\tau$ te reduceren tot $\sigma\tau$. Het woord dat ontstaat is niet afhankelijk van de volgorde waarop het wegwerken gebeurt. Het *lege woord* is toegestaan en is het woord dat geen enkele letter bevat. Het lege woord kan als identiteit dienen, zoals duidelijk zal worden in 3.3.3. Zo is $\tau\tau^{-1}$ te reduceren tot het lege woord. Met gereduceerde woorden gaan we nu een groep samenstellen met bepaalde paradoxale eigenschappen die doorslaggevend zullen zijn voor het bewijs van de Hausdorff-paradox.

### 3.3.3 Vrije groepen

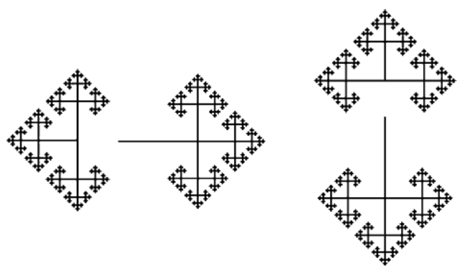
We nemen nu wederom een verzameling $X = \{\tau, \sigma\}$ en construeren een verzameling $F$ bestaande uit alle mogelijke gereduceerde woorden met letters uit $X$ en hun inversen. Hier heten $\tau$ en $\sigma$ de *generatoren* van $F$. Deze woorden uit $F$ zijn vervolgens samen te voegen, en door het woord dat ontstaat na een samenvoeging weer te reduceren ontstaat een nieuw gereduceerd woord. Hiermee is in feite een nieuwe operatie $\circ$, de *samenvoeging* van woorden, gedefinieerd [14]. Een samenvoeging van de woorden $\tau\tau$ en $\tau^{-1}\sigma$ ziet er dan uit als $\tau\tau \circ \tau^{-1}\sigma = \tau\sigma$. Merk op dat het gereduceerde woord dat ontstaat na de bewerking al in $F$ zit (het is tenslotte een gereduceerd woord met letters $\tau, \sigma, \tau^{-1}, \sigma^{-1}$). De oplettende lezer ziet nu dat al aan alle eisen voor een groep voldaan is. De identiteit $e$ is hier het lege woord: een samenvoeging van een niet-leeg woord met het lege woord levert weer het originele niet-lege woord op. Deze $(F, \circ)$ heet *de vrije groep van orde 2*, en is bijzonder fascinerend omdat ze als het ware te 'verdubbelen' is (zie Figuur 17). De details hiervan worden duidelijk in de volgende stelling [21, hfdst. 1, p. 4-6] [22]:

**Stelling 3.2.** *Zij $F$ de vrije groep van orde 2 met generatoren $\tau$ en $\sigma$. Dan bestaan er onderling disjuncte stukken $A_1, A_2, B_1, B_2$ van $F$ zodat $F = A_1 \sqcup \sigma A_2 = B_1 \sqcup \tau B_2$.*

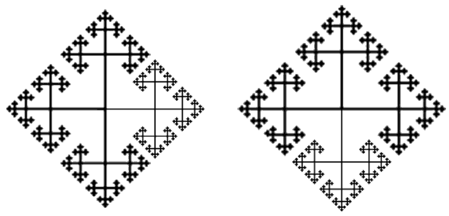
*Bewijs.* Definieer $W(\rho)$ met $\rho$ een van $\sigma^{\pm}$ of $\tau^{\pm}$ als de verzameling van de woorden in $F$ die links beginnen met $\rho$. Neem vervolgens $A_1 = W(\sigma)$, $A_2 = W(\sigma^{-1})$, $B_1 = W(\tau)$ en $B_2 = W(\tau^{-1})$. Deze zijn vanzelfsprekend onderling disjunct. Merk op dat $F = \{e\} \sqcup W(\sigma) \sqcup W(\sigma^{-1}) \sqcup W(\tau) \sqcup W(\tau^{-1})$. Zie verder dat $W(\sigma) \sqcup \sigma W(\sigma^{-1}) = F$, $\sigma W(\sigma^{-1})$ is immers gelijk aan de verzameling van het lege woord en de woorden die niét beginnen met $\sigma$, dus geeft de vereniging met de verzameling van alle woorden die wél beginnen met $\sigma$ de volledige $F$ (zie Figuur 18 voor een mooie illustratie hiervan). Op dezelfde wijze geldt uiteraard $W(\tau) \sqcup \tau W(\tau^{-1}) = F$. Hiermee hebben we $A_1 \sqcup \sigma A_2 = F$ en $B_1 \sqcup \tau B_2 = F$ en is de stelling bewezen. $\square$



(a) Stap 1: $F$



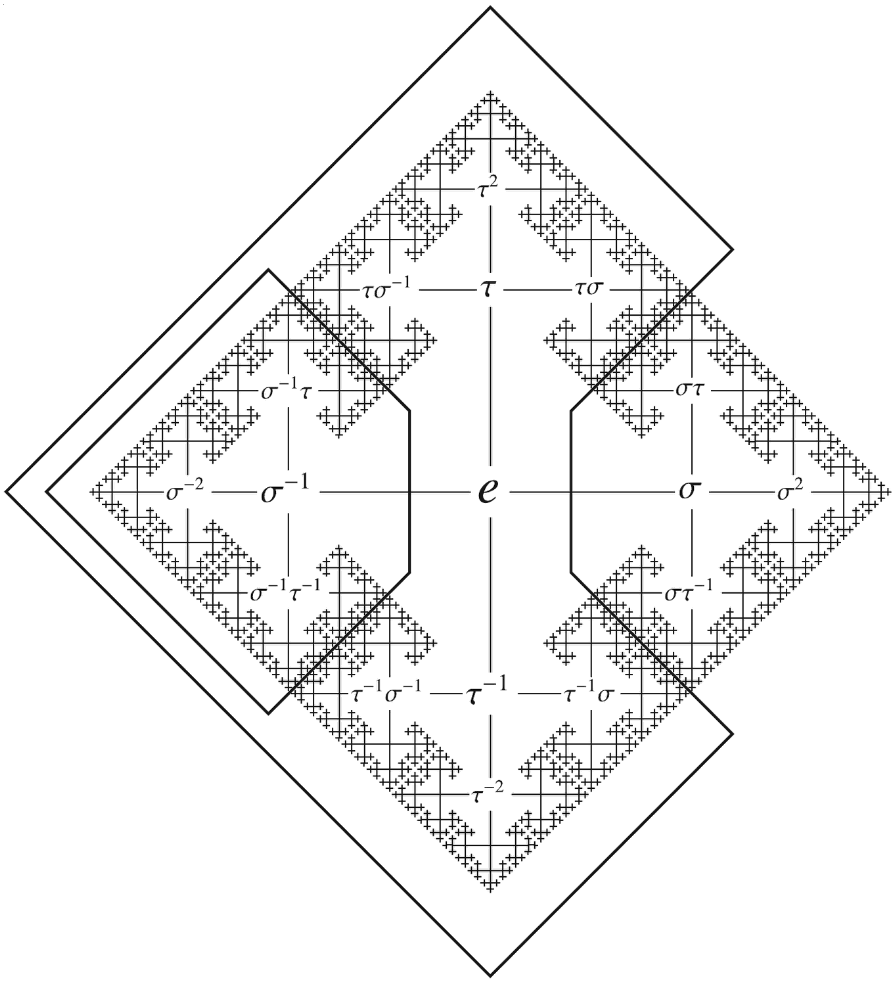
(b) Stap 2: $F$ wordt gesplitst



(c) Stap 3: Twee kopiën van $F$

Figuur 17: De verdubbeling van de vrije groep

Deze paradoxale verdeling van $F$ is nog te verbeteren [21, hfdst. 1, p. 6] [22] [23]. Merk op dat de identiteit $e$ overblijft als 'los stuk' bij de vorige stelling. Middels een kleine aanpassing van de stukken is het mogelijk om deze weg te werken, wat voor de verdubbeling van de bolschil van groot belang zal zijn.




Figuur 18: De vrije groep $F$. Het kleine omrande deel stelt $W(\sigma^{-1})$ voor, het grote deel $\sigma W(\sigma^{-1})$. Het is duidelijk zichtbaar dat $F = W(\sigma) \sqcup \sigma W(\sigma^{-1})$.

**Stelling 3.3.** *Zij $F$ de vrije groep van orde 2 met generatoren $\tau$ en $\sigma$. Dan is $F$ te verdelen in stukken $A_1, A_2, B_1, B_2$ zodat $F = A_1 \sqcup \sigma A_2 = B_1 \sqcup \tau B_2$.*

*Bewijs.* Een kleine aanpassing van de stukken $A_1$ en $A_2$ is voldoende voor dit bewijs. Neem opnieuw de $W(\rho)$ uit Stelling 3.2 en definieer opnieuw $B_1 = W(\tau), B_2 = W(\tau^{-1})$, maar neem nu $A_1 = W(\sigma) \sqcup \{e\} \sqcup \{\sigma^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0\}$ en $A_2 = W(\sigma^{-1}) \setminus \{\sigma^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0\}$. Zie in dat nu $F = A_1 \sqcup A_2 \sqcup B_1 \sqcup B_2 = A_1 \sqcup \sigma A_2 = B_1 \sqcup \tau B_2$. Immers, $A_2$ is gelijk aan alle woorden die beginnen met $\sigma^{-1}$ exclusief $\sigma^{-1}, \sigma^{-2}, \ldots$, dus $\sigma A_2$ geeft alle woorden die niet beginnen met $\sigma$ exclusief de woorden $e, \sigma^{-1}, \sigma^{-2}, \ldots$, waaruit direct volgt dat $F = A_1 \sqcup \sigma A_2$. $\square$

Dit resultaat, evenzo de andere stof uit dit intermezzo, vindt zijn toepassing in het bewijs van de Hausdorff-paradox. Daar zoeken we ook een vrije groep als deze, maar dan met rotaties. In deze stelling is overigens al iets curieus op te merken: $F$ is in vier stukken gedeeld, waarbij de vier stukken vervolgens weer samen te voegen zijn tot *twee kopiën* van $F$! Dit lijkt al verdacht veel op de verdubbeling die zal worden bewezen bij de Banach-Tarskiparadox.

### 3.3.4 Banen

Er is nog een laatste belangrijke eigenschap van groepen die besproken moet worden. Daarvoor bekijken we eerst wat *acties* zijn. Een actie is niets anders dan een regel om elementen uit een groep te combineren met elementen uit een verzameling. Neem een groep $G$, een verzameling $X$, een $\alpha \in G$ en $x \in X$. We noteren de actie dan als $\alpha x$. Voor acties gelden een aantal voorwaarden:

1. $\alpha x \in X$ voor alle $x \in X, \alpha \in G$
2. $ex = x$ voor alle $x \in X$ (met $e$ de identiteit uit $G$)
3. $\alpha_1(\alpha_2 x) = \alpha_1\alpha_2 x$ voor alle $x \in X, \alpha_1 \in G, \alpha_2 \in G$

Merk op dat $\alpha_1(\alpha_2 x)$ staat voor twee acties op $x$, en $\alpha_1\alpha_2 x$ voor één actie door $\alpha_1\alpha_2 \in G$. Als we een willekeurige groep $G$ en een verzameling $X$ nemen, en vervolgens de verzamelingen nemen die ontstaan door alle elementen $x$ uit $X$ te onderwerpen aan alle acties (bij de Hausdorff-paradox zijn dit rotaties) $\alpha$ uit $G$, dan zijn de *verschillende* verzamelingen gegarandeerd een verdeling van $X$. Dat wil zeggen: de disjuncte vereniging van deze verzamelingen geeft $X$ terug. Voor een willekeurige $x$ ziet deze verzameling eruit als $G \cdot x = \{\, \alpha x \mid \alpha \in G \,\}$ (formeel gesproken heet dit de *baan* van $x$). In volgend lemma wordt dit duidelijk [24]:

**Lemma 3.4.** *Zij $G$ een groep die werkt op een verzameling $X$. Dan vormen de onderling verschillende banen van $X$ gevormd door $G$ een verdeling van $X$.*

*Bewijs.* Willen de banen een verdeling van $X$ vormen, dan moet elk element $x \in X$ ook in een baan zitten. Neem $G \cdot x$ de baan van $x$, dan is dit gemakkelijk te zien want $x \in G \cdot x$. Verder moeten de banen onderling disjunct zijn. We nemen de banen $G \cdot x_1 = \{\, \alpha x_1 \mid \alpha \in G \,\}$ en $G \cdot x_2 = \{\, \alpha' x_2 \mid \alpha' \in G \,\}$ van twee willekeurige elementen $x_1$ en $x_2$. Stel $y \in G \cdot x_1 \cap G \cdot x_2$, dan bestaan er $\alpha_1, \alpha_2$ zodat $y = \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$. Merk op dat $x_1 = ex_1 = \alpha_1^{-1}\alpha_1 x_1 = \alpha_1^{-1}(\alpha_1 x_1) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2 x_2) = \alpha_1^{-1}\alpha_2 x_2$.

Maar $\alpha_1^{-1}\alpha_2 x_2$ zit in $G \cdot x_2$ want de eigenschappen van groepen garanderen dat $\alpha_1^{-1}\alpha_2 \in G$. Hiermee vinden we $x_1 \in G \cdot x_2 = \{\, \alpha' x_2 \mid \alpha' \in G \,\}$. Er geldt nu $G \cdot x_1 = \{\, \alpha x_1 \mid \alpha \in G \,\} \subseteq \{\, \alpha(\alpha' x_2) \mid \alpha \in G \wedge \alpha' \in G \,\}$ want er bestaat een $\alpha'$ zodat $\alpha' x_2 = x_1$. Omdat $G$ een groep is bestaat er een identiteit $e \in G$ en daarmee $G \cdot x_1 \subseteq \{\, \alpha(\alpha' x_2) \mid \alpha \in G \wedge \alpha' \in G \,\} \subseteq \{\, \alpha x_2 \mid \alpha \in G \,\} = G \cdot x_2$ (per definitie). Hiermee vinden we $G \cdot x_1 \subseteq G \cdot x_2$. Op vergelijkbare wijze vindt men $G \cdot x_2 \subseteq G \cdot x_1$ waaruit volgt dat $G \cdot x_1 = G \cdot x_2$ als $G \cdot x_1 \cap G \cdot x_2 \neq \varnothing$. $\square$

## 3.4 Hausdorff-paradox

Voordat de gehele bol verdubbeld kan worden, is het belangrijk om eerst deze paradox te bekijken. Deze houdt zich weliswaar alleen bezig met de bolschil, maar dit resultaat kan relatief eenvoudig uitgebreid worden tot de Banach-Tarskiparadox met behulp van een slimme toepassing. Deze paradox is dan ook de kern van het gehele bewijs voor de bolverdubbeling.

Alle tot dusver gevonden resultaten beperken zich tot min of meer eendimensionale structuren. De Hausdorff-paradox maakt het daartegenover mogelijk om het oppervlak van de eenheidsbol, dat genoteerd wordt als $S^2$, - afgezien van een zekere aftelbare verzameling $D$ - te verdubbelen. Om tot dit resultaat te komen wordt de vrije groep uit Stelling 3.3 gebruikt. Het is al aangetoond in de genoemde stelling dat de vrije groep van orde 2 te 'verdubbelen' is. Deze verdubbeling heeft echter nog geen enkele meetkundige betekenis. We willen daarom hetzelfde doen met $S^2$, een geometrisch object. Om dat mogelijk te maken, gaan we kijken naar woorden die matrixproducten voorstellen, en zoeken naar een vrije groep binnen de rotaties van $\mathbb{R}^3$. Hiermee is vervolgens (bijna) mogelijk de hele $S^2$ te verdubbelen.

### 3.4.1 Een vrije groep van rotaties

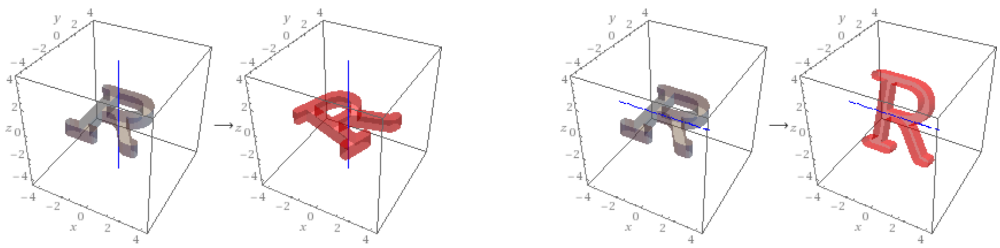
Voor deze paradox kijken we naar rotaties in $\mathbb{R}^3$. We bekijken de groep $R$ die voortgebracht wordt door twee goedgekozen rotaties $\phi$ en $\psi$ en hun inversen. We beschouwen de rotaties in matrixvorm, waarmee alle woorden producten van rotatiematrices voorstellen. Een willekeurig matrixproduct van $R$ kan er dan bijvoorbeeld zo uitzien: $\phi^5\psi\phi\psi^2\phi^{-1}\psi$. Deze matrixproducten stellen zelf dus samengestelde rotaties voor.

Bij beide rotaties $\phi$ en $\psi$ hoort uiteraard een as, zeg $a_\phi$ en $a_\psi$ voor $\phi$ en $\psi$ respectievelijk. Deze assen horen door het middelpunt van de bal (dus de oorsprong) te gaan. We zoeken nu de twee assen $a_\phi$ en $a_\psi$ en de bijbehorende rotatiehoeken zodat alle elementen uit $R$ een *unieke* rotatie voorstellen. Hausdorff liet in 1914 als eerste zien dat dit mogelijk is [21, hfdst. 2, p. 15]. Er bestaan veel verschillende paren van rotaties die aan deze eigenschap voldoen. Als de twee assen loodrecht op elkaar staan en we voor de rotatiehoeken beide $\arccos(\omega)$ nemen, dan voldoen alle rationale $\omega$ behalve $\omega = 0$, $\omega = \pm\frac{1}{2}$ en $\omega = \pm 1$ [21, hfdst. 2, p. 15-16] [25]. We zijn vrij om de rotaties te kiezen zolang ze voldoen. We bekijken een eenvoudig paar van rotaties met $\omega = \frac{1}{3}$ dat volstaat en werken hiermee verder.

Voor de rotatie $\phi$ nemen we een rotatie rond de $z$-as, voor $\psi$ een rotatie rond de $x$-as (uiteraard tegen de klok in). De twee hoeken laten we zoals gezegd beide gelijk zijn aan $\arccos(\frac{1}{3})$. Dit levert de volgende matrices op:

$$\phi^\pm = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \psi^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Deze matrices hebben de eigenschap die we zoeken. In Figuur 19 zijn de rotaties afgebeeld. Een product als $\psi^5$ zou eruitzien als een rotatie van $5 \cdot \arccos(\frac{1}{3})$ om de $x$-as, wat neerkomt op de 'R' uit de figuur vijfmaal te roteren met $\psi$.



(a) De rotatie $\phi$

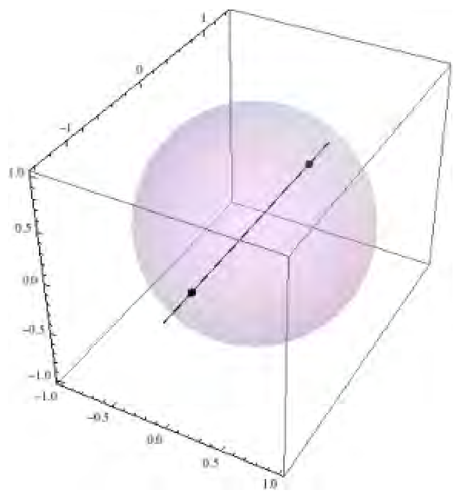
(b) De rotatie $\psi$

Figuur 19: Rotaties $\phi$ en $\psi$

De groep $R$ die gegenereerd wordt door $\phi$ en $\psi$ is nu een vrije groep van rotaties, alle woorden stellen immers unieke rotaties voor. Hiermee hebben we weer een vrije groep van orde 2 als in 3.3.3, maar dan met rotaties. De identiteit binnen deze groep is vanzelfsprekend de identiteitsrotatie $I$, de rotatie die ieder punt in de ruimte onveranderd laat. We nemen nu $\sigma = \phi$ en $\tau = \psi$ zodat duidelijk is dat de stellingen over de vrije groep ook op deze rotatiegroep van toepassing zijn. Merk op dat we nu in feite een manier hebben om de verdubbeling van de vrije groep een ruimtelijke betekenis te geven. Deze groep is dan ook cruciaal voor de Hausdorff-paradox.

### 3.4.2 Bewijs

Alles bij elkaar is nu een vrije groep van orde 2 opgesteld met woorden die unieke rotaties voorstellen. Het doel is met deze groep $S^2$ op te delen net als $F$ bij Stelling 3.3. Er is helaas wel een probleem. Elke rotatie $\alpha$ (die dus samengesteld is uit $\sigma = \phi$ en $\tau = \psi$) ongelijk aan de identiteit uit de gevonden vrije groep $R$ is voor te stellen als slechts één rotatie rond een bepaalde as $a_\alpha$. Dit betekent dat er altijd twee punten onveranderd blijven na het draaien van de bal met $\alpha$ ($\alpha \neq I$), de punten van de bal die snijden met de $a_\alpha$-as om precies te zijn (zie Figuur 20). Deze punten vormen een probleem bij het verdelen van het boloppervlak. We lossen het eenvoudigweg op door de verzameling $D$ van deze punten te nemen, en vervolgens enkel te kijken naar $S^2 \setminus D$, zoals in de introductie van deze sectie al is genoemd. Voor alle $\alpha \in R$ met $\alpha \neq I$ blijft er dan geen enkel punt onveranderd, en daarmee kunnen we alsnog de benodigde stukken bemachtigen [23] [26]:



Figuur 20: Onveranderde punten bij een rotatie. De zwarte punten zijn de snijpunten van de rotatieas met de bal.

**Stelling 3.5** (Hausdorff-paradox). *Er bestaan een aftelbare deelverzameling $D \subset S^2$ en deelverzamelingen $A, B$ van $S^2 \backslash D$ zodat $S^2 \backslash D \sim A \sim B$ met $A \sqcup B = S^2 \backslash D$.*

*Bewijs.* We willen als het ware de verdubbeling van de vrije groep gaan toepassen op $S^2$. Daartoe proberen we $S^2$ net als de vrije groep in bepaalde stukken te verdelen. Uit Lemma 3.4 weten we in ieder geval dat $S^2$ verdeeld wordt in banen door $R$. Middels het keuzeaxioma construeren we een verzameling $M_0$ die één element uit iedere baan bevat. We weten nu het volgende:[2]

$$S^2 = \bigcup \{ \alpha(M_0) \mid \alpha \in R \}$$

We willen graag dat deze vereniging een disjuncte vereniging is, maar dat is helaas niet zo. Als we bijvoorbeeld $(1, 0, 0) \in M_0$ zouden hebben, dan $\psi(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, want $\psi$ is een rotatie om de $x$-as. Dit punt $(1, 0, 0)$ zit dan in $M_0$, maar ook in $\psi(M_0)$, en de vereniging is niet meer disjunct. Op deze manier kan ieder vast punt van een rotatie $\alpha \in R \setminus \{I\}$ in meer verzamelingen dan alleen $\alpha(M_0)$ zitten. Dit probleem lossen we op door de verzameling $D$ van deze punten te nemen:

$$D = \{ x \mid x \in S^2 \text{ en er bestaat een } \alpha \in R \setminus \{I\} \text{ met } \alpha(x) = x \}$$

Omdat er voor elke rotatie (niet gelijk aan $I$) slechts twee vaste punten zijn, en het aantal rotaties in $R$ aftelbaar is, is $D$ zelf aftelbaar oneindig. We beschouwen $S^2 \setminus D$ en willen nu het volgende aantonen: als $x \in S^2 \setminus D$, dan $\alpha(x) \in S^2 \setminus D$ voor alle $\alpha \in R$. Dit doen we met een contra-positief bewijs:

Neem een vast punt $x$ dat wordt vastgelaten door een $\alpha \in R$ en $\rho(x)$ een ander element uit de baan van $x$. Zie dat $\rho(x)$ dan wordt vastgelaten door $\rho\alpha\rho^{-1}$ omdat $\rho\alpha\rho^{-1}(\rho(x)) = \rho\alpha(x) = \rho(x)$. We zien dat $\alpha(x) \in D$ als $x \in D$ voor alle $\alpha \in R$.

Nu kunnen we wel een verdeling van $S^2 \setminus D$ geven. We beschouwen van $S^2 \setminus D$ weer de banen; met het keuzeaxioma nemen we de verzameling $M$ met één element uit iedere baan van $S^2 \setminus D$. We hebben nu met behulp van Lemma 3.4 het volgende:

$$S^2 \setminus D = \bigsqcup \{ \alpha(M) \mid \alpha \in R \}$$

Deze vereniging is disjunct, om de volgende reden. Stel $\alpha_1 \in R$ en $\alpha_2 \in R$ met $\alpha_1(M) \cap \alpha_2(M) \neq \varnothing$. Dan moet er dus wel een punt $x$ zijn met $x \in \alpha_1(M)$ en

[2] We noteren $\alpha(M)$ de verzameling die verkregen wordt door ieder element uit $M$ te onderwerpen aan de rotatie $\alpha \in R$.

$x \in \alpha_2(M)$, en dus moeten er $x_1 \in M$ en $x_2 \in M$ bestaan waarvoor $x = \alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)$. Dan geldt ook $\alpha_1^{-1}\alpha_2(x_2) = \alpha_1^{-1}\alpha_1(x_1) = \alpha_1^{-1}(x) = x_1$, waaruit volgt dat $x_1$ en $x_2$ in dezelfde baan liggen (want $\alpha_1^{-1}\alpha_2 \in R$). Omdat $M$ slechts één element uit deze baan bevat, moet wel dat $x_1 = x_2$. Dan zou echter gelden dat $x_1$ een vast punt is van $\alpha_1^{-1}\alpha_2$, en omdat $x_1 \notin D$ moet wel $\alpha_1^{-1}\alpha_2 = I$ en dus $\alpha_1 = \alpha_2$. Hieruit volgt dat $\alpha_1(M) \cap \alpha_2(M) = \varnothing$ als $\alpha_1 \neq \alpha_2$. De bovenstaande vereniging is dus disjunct, waarmee we een verdeling van $S^2 \setminus D$ hebben.

We gebruiken nu een constructie analoog aan die van Stelling 3.3 en nemen met $W(\rho)$ uit die stelling weer de stukken $A_1 = W(\sigma) \sqcup \{e\} \sqcup \{\sigma^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0\}$, $A_2 = W(\sigma^{-1}) \setminus \{\sigma^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0\}$, $B_1 = W(\tau)$ en $B_2 = W(\tau^{-1})$, waarbij $\sigma^{\pm}$ en $\tau^{\pm}$ hier uiteraard respectievelijk de goedgekozen rotaties $\phi^{\pm}$ en $\psi^{\pm}$ voorstellen. Neem nu de volgende stukken:

$$A_1' = \bigsqcup \{\, \alpha_1(M) \mid \alpha_1 \in A_1 \,\} \text{ en } A_2' = \bigsqcup \{\, \alpha_2(M) \mid \alpha_2 \in A_2 \,\}$$

$$B_1' = \bigsqcup \{\, \alpha_3(M) \mid \alpha_3 \in B_1 \,\} \text{ en } B_2' = \bigsqcup \{\, \alpha_4(M) \mid \alpha_4 \in B_2 \,\}$$

en zie het volgende in: $A_1' \sqcup A_2' \sqcup B_1' \sqcup B_2' = \bigsqcup\{\, \alpha(M) \mid \alpha \in A_1 \sqcup A_2 \sqcup B_1 \sqcup B_2 \,\} = \bigsqcup\{\, \alpha(M) \mid \alpha \in R \,\} = S^2 \setminus D$ en $A_1' \sqcup \sigma A_2' = \bigsqcup\{\, \alpha(M) \mid \alpha \in A_1 \sqcup \sigma A_2 \,\} = \bigsqcup\{\, \alpha(M) \mid \alpha \in R \,\} = S^2 \setminus D$, waarbij de gelijkheden $A_1 \sqcup A_2 \sqcup B_1 \sqcup B_2 = A_1 \sqcup \sigma A_2 = R$ volgen uit Stelling 3.3. Op dezelfde wijze geldt vanzelfsprekend $B_1' \sqcup \tau B_2' = S^2 \setminus D$.

Er geldt dus: $S^2 \setminus D = A_1' \sqcup A_2' \sqcup B_1' \sqcup B_2' = A_1' \sqcup \sigma A_2' = B_1' \sqcup \tau B_2'$. Definieer ten slotte $A = A_1' \sqcup A_2'$ en $B = B_1' \sqcup B_2'$ en we vinden $S^2 \setminus D = A_1' \sqcup \sigma A_2' \sim A$ en $S^2 \setminus D = B_1' \sqcup \tau B_2' \sim B$ en daarmee $S^2 \setminus D \sim A \sim B$. $\square$

Deze stelling laat zien dat het boloppervlak zonder $D$ gelijkverdeelbaar is met twee deelverzamelingen van zichzelf. Anders gesteld: $S^2 \setminus D$ is te verdelen in stukken, die vervolgens na enige transformaties twee kopiën van $S^2 \setminus D$ opleveren!

## 3.5 Banach-Tarskiparadox

Alles is nu opgezet om tot het uiteindelijke bewijs te komen. Er is echter nog wel een beletsel. Herinner dat bij de Hausdorff-paradox er een aftelbare verzameling $D$ overbleef. Deze vormt een hinderpaal bij het verdubbelen van de bal. We willen daarom eerst deze verzameling $D$ wegwerken. Intuïtief is het al duidelijk dat een aftelbare deelverzameling compleet in het niet valt in vergelijking met de volledige $S^2$ die overaftelbaar veel punten bevat. Het blijkt dan ook vrij eenvoudig om deze $D$ weg te werken. We kunnen gewoon een as nemen die door het midden van de bal gaat en door geen enkel punt uit $D$, en de punten uit $D$ 'opvullen' als bij Stelling 3.1. Formeel is het uiteraard ook geldig [21, hfdst. 3, p. 29]:

**Lemma 3.6.** *Zij $D$ een aftelbare deelverzameling van $S^2$, dan $S^2 \sim S^2 \setminus D$.*

*Bewijs.* We zoeken een rotatie $\rho$ van $S^2$ zodat we het volgende kunnen schrijven: $\bar{D} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D)$. Neem $l$ een lijn door de oorsprong die geen punten deelt met $D$ (deze bestaat omdat $D$ aftelbaar is). Neem $\Theta$ de aftelbare verzameling hoeken $\theta$ waarvoor voor een punt $P \in D$ geldt dat $\rho^n(P) \in D$ met $\rho^n$ een rotatie om $l$ van $n\theta$ radialen. Neem nu $\theta \notin \Theta$ (deze bestaat weer omdat $\Theta$ aftelbaar is) en de bijbehorende rotatie $\rho$ om $l$ met $\theta$ radialen. Nu geldt $\rho^n(D) \cap D = \varnothing$, en daarmee ook $\rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \varnothing$ voor $0 \leq m < n$, want $\rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \rho^0(D) \cap \rho^{n-m}(D) = \varnothing$. De gestelde $\rho$ voldoet dus. Merk op dat $\rho(\bar{D}) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}(D) = \bar{D} \setminus D$ waaruit volgt dat $S^2 \setminus D = (S^2 \setminus \bar{D}) \sqcup \rho(\bar{D}) \sim (S^2 \setminus \bar{D}) \sqcup \bar{D} = S^2$. We zien dat $S^2 \setminus D \sim S^2$. □

Dit resultaat, gecombineerd met de transitiviteit van gelijkverdeelbaarheid, maakt het eenvoudig om het gehele boloppervlak te verdubbelen, bij Stelling 3.5 vonden we immers al een verdubbeling van het boloppervlak exclusief de aftelbare verzameling $D$ van vaste punten.

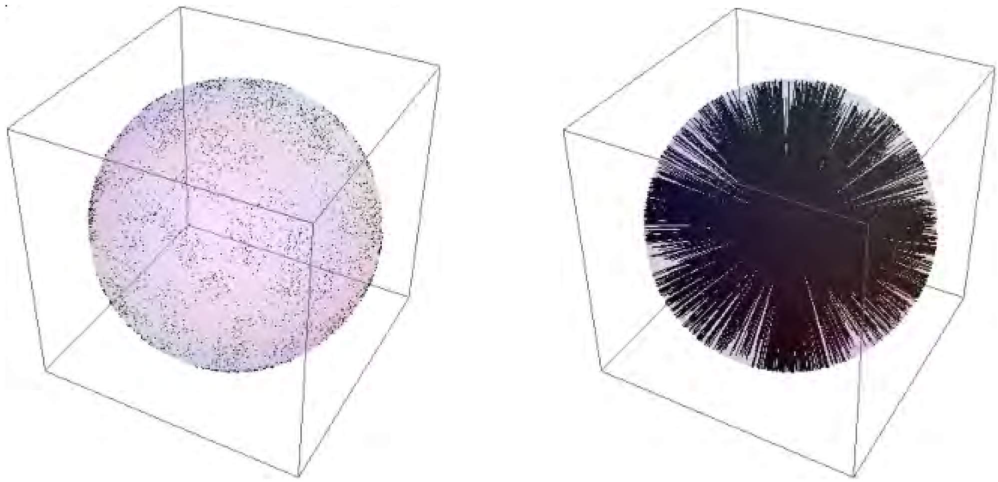
**Stelling 3.7.** *Er bestaan deelverzamelingen $A, B$ van $S^2$ zodat $S^2 \sim A \sim B$ met $A \sqcup B = S^2$.*

*Bewijs.* Neem de aftelbare $D$ en stukken $A', B'$ die volgen uit Stelling 3.5 en herinner $S^2 \setminus D \sim A' \sim B'$. Definieer $A = A' \sqcup D$ en $B = B'$ en zie $A = A' \sqcup D \sim (S^2 \setminus D) \sqcup D = S^2$ en verder met Lemma 3.6 dat $B = B' \sim (S^2 \setminus D) \sim S^2$. □

Het doel is nu om de verdubbeling van het boloppervlak uit te breiden naar de volledige eenheidsbol $B^3$. Dit is vrij eenvoudig gedaan door in plaats van de punten op het oppervlak de stralen van de punten tot het centrum $O$ van de bol te nemen zoals in Figuur 21. Er is dan wel een probleem: het centrum van de bol wordt niet meegenomen in de verdubbeling. Een oplettende lezer ziet wellicht dat dit probleem eigenlijk allang is opgelost. In Stelling 3.1 bewezen we namelijk dat een cirkel met een ‘missend’ punt gelijkverdeelbaar is met een cirkel die dat punt wel heeft. Gezien het centrum slechts een punt is, kunnen we de bollen verdubbelen en het centrum negeren. Vervolgens kan men een cirkel voorstellen die door het centrum loopt, en dus door het missende punt loopt. Dan draaien we bepaalde punten in die cirkel weer zodat we het centrum krijgen, en de bolverdubbeling is voltooid [14] [21, hfdst. 3, p. 30]:

**Lemma 3.8.** $B^3 \sim B^3 \setminus \{O\}$

*Bewijs.* Neem $\rho$ een rotatie van 1 radiaal om een punt $P = (0, 0, \frac{1}{2})$ met als as de lijn die evenwijdig is aan het $xz$-vlak en door $P$ gaat. Neem $D = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(O)$, zie dat $\rho(D) = D \setminus \{O\}$ en daarmee $B^3 = (B^3 \setminus D) \sqcup D \sim (B^3 \setminus D) \sqcup \rho(D) = B^3 \setminus \{O\}$. □



(a) Deelverzameling van de punten bij de verdubbeling van $S^2$

(b) Straalsgewijse uitbreiding van de punten

Figuur 21: Constructie van de Banach-Tarskiparadox

**Stelling 3.9** (Banach-Tarskiparadox)**.** *Er bestaan deelverzamelingen* $A, B$ *van* $B^3$ *zodat* $B^3 \sim A \sim B$ *met* $A \sqcup B = B^3$*.*

*Bewijs.* Neem deelverzamelingen $A', B'$ van $S^2$ met $A' \sqcup B' = S^2$ en $S^2 \sim A' \sim B'$ die volgen uit Stelling 3.7. Neem nu $A = \{\, ax \mid 0 < a \leq 1 \wedge x \in A' \,\} \sqcup \{O\}$ en $B = \{\, bx \mid 0 < b \leq 1 \wedge x \in B' \,\}$. Merk op dat $B^3 = A \sqcup B$. Zie dat $A \sim B^3$ want $A' \sim S^2$. Stel met Lemma 3.8 ten slotte vast dat $B \sim B^3 \setminus O \sim B^3$. □

Oftewel: de eenheidsbol is in stukken te hakken die vervolgens weer in elkaar te zetten zijn tot *twee* eenheidsbollen, quod erat demonstrandum. Het aantal stukken dat in totaal nodig was voor dit bewijs is overigens niet het kleinst mogelijke aantal. Het aantal benodigde stukken is na het originele artikel van Banach en Tarski een aantal maal verkleind. Wiskundige Von Neumann vond een verdubbeling met negen stukken [27], Sierpinski later een met acht [28]. Uiteindelijk werd in 1947 door Raphael M. Robinson bewezen dat het bewijs mogelijk is met niet meer dan vijf stukken, waarbij drie stukken samen een kopie van de bol opleveren, en de overgebleven twee stukken een tweede kopie [29]. Hij bewees direct dat dit het kleinst mogelijke aantal stukken is. Het bewijs voor dat resultaat vereist meer werk, dus dit zal niet besproken worden.

Voor wie de Banach-Tarskiparadox nog niet indrukwekkend genoeg is, bestaat er een gevolg van de paradox dat zo absurd is dat het ieders verbeelding ontstijgt. Met de toch wel beperkte Banach-Tarskiparadox, die slechts spreekt over de eenheidsbol, is het namelijk mogelijk om het sterkere resultaat te bewijzen dat *elk* willekeurig begrensd object met niet-leeg inwendige gelijkverdeelbaar is met elk willekeurig ander begrensd object met niet-leeg inwendige. Dit resultaat gaan we bekijken in het laatste gedeelte van dit hoofdstuk.

## 3.6 Stelling van Banach, Cantor, Schröder en Bernstein

Om de sterke vorm van de Banach-Tarskiparadox te kunnen bewijzen is, naast de zwakke vorm, nog wat extra theorie nodig. Van de benodigde stellingen is de stelling van Banach, Cantor, Schröder en Bernstein het belangrijkst. Om deze te kunnen bewijzen definiëren we eerst de volgende relatie [21, hfdst. 3, p. 26]:

**Definitie 3.2.** Als voor twee verzamelingen $A \subset \mathbb{R}^n$ en $B \subset \mathbb{R}^n$ geldt dat $A \sim C$ met $C \subseteq B$ dan schrijven we dit als $A \preccurlyeq B$.

Deze relatie is niets gecompliceerds, maar maakt wel een aantal handige constructies mogelijk die later duidelijker zullen worden. De volgende twee lemma's zijn vrij eenvoudig, en zijn alleen nodig om de stelling die erna volgt te bewijzen [14] [21, hfdst. 3, p. 27] [23]:

**Lemma 3.10.** *Als $A \sim B$ dan bestaat er voor elke $C \subseteq A$ een bijectie $f : A \to B$ zodat $C \sim f(C)$.*

*Bewijs.* Uit Definitie 2.4 volgt dat er isometriën en dus afbeeldingen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ bestaan die aantonen dat $(\forall i)(A_i \cong B_i)$. Definieer de afbeelding $f : A \to B$ met $f(a) = \phi_i(a)$ als $a \in A_i$. Omdat $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ volgt direct dat $f$ nu voor elke $a \in A$ gedefinieerd is. Merk op dat $f$ bijectief is; de isometriën $\phi_i$ zijn immers alle per definitie bijecties, en bovendien zijn alle stukken $A_i$ onderling disjunct zodat elke $a$ slechts een element is van één stuk $A_i$. Definieer nu $C_i = C \cap A_i$, en merk op dat $C = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$ want $C \subseteq A$. Voorts geldt dat $\bigsqcup_{i=1}^{n} f(C_i) = f(\bigsqcup_{i=1}^{n} C_i) = f(C)$ en $f(C_i) \cap f(C_j) = \varnothing \iff i \neq j$. Met $f(C_i) = \phi_i(C_i)$ vinden we $C_i \cong f(C_i)$ want $\phi_i$ is immers een isometrie genomen uit de definitie van gelijkverdeelbaarheid. We zien dat $C \sim f(C)$. □

**Lemma 3.11.** *Als $A_1 \cap A_2 = \varnothing = B_1 \cap B_2$, $A_1 \sim B_1$ en $A_2 \sim B_2$ dan ook $A_1 \sqcup A_2 \sim B_1 \sqcup B_2$.*

*Bewijs.* Omdat $A_1 \sim B_1$ hebben we alvast de volgende verdelingen: $A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_{1i}$ en $B_1 = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_{1i}$. Uiteraard geldt ook $A_2 = \bigsqcup_{j=1}^{m} A_{2j}$ en $B_2 = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_{2j}$. Het is duidelijk dat $A_1 \sqcup A_2 = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_{1i} \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{m} A_{2j}$. Deze stukjes vormen tezamen dus weer een verdeling van $A_1 \sqcup A_2$, en zijn bovendien per definitie onderling disjunct. Uiteraard geldt dit net zo goed voor de volgende verdeling: $B_1 \sqcup B_2$: $B_1 \sqcup B_2 = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_{1i} \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{m} B_{2j}$. Deze twee verdelingen tonen de te bewijzen gelijkverdeelbaarheid $A_1 \sqcup A_2 \sim B_1 \sqcup B_2$ aan. □

Het is nu mogelijk om de stelling te bewijzen die de sterke vorm mogelijk maakt. We tonen aan dat twee verzamelingen gelijkverdeelbaar zijn als beide verzamelingen gelijkverdeelbaar zijn met een deelverzameling van de ander [23]:

**Stelling 3.12** (Banach-Cantor-Schröder-Bernsteinstelling)**.** *Zijn $A \subset \mathbb{R}^n$ en $B \subset \mathbb{R}^n$ met $A \preccurlyeq B$ en $B \preccurlyeq A$. Dan $A \sim B$.*

*Bewijs.* Omdat $A \preccurlyeq B$ is er een $B_1 \subseteq B$ zodat $A \sim B_1$. Desgelijks is er een $A_1 \subseteq A$ met $A_1 \sim B$. Neem nu de volgende afbeeldingen: $f : A \to B_1$ en $g : A_1 \to B$, wiens bestaan aangetoond wordt door Lemma 3.10. Definieer nu $C_0 = A \setminus A_1$. Recursief definiëren we $C_{n+1} = g^{-1}(f(C_n))$. Neem $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Merk op dat voor $n \geq 1$ geldt dat $C_n$ bevat wordt door $A_1$, $f$ beeldt $C_n$ immers een-op-een af op $B_1$ en $g^{-1}$ beeldt $f(C_n)$ vervolgens weer een-op-een af op $A_1$. We willen nu vinden dat $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$.

Stel $x \in A \setminus C$. $A \setminus C$ wordt bevat door $A_1$, dus $g(x) \in B$. Stel nu voor die $x$ dat $g(x) \in f(C)$. Dan moet er een $i \in \mathbb{N}$ zijn waarvoor $g(x) \in f(C_i)$. Dan zou echter ook moeten gelden dat $g^{-1}(g(x)) \in g^{-1}(f(C_i)) = C_{i+1}$ ofwel $x \in C_{i+1}$. Dat is een contradictie, want $x \in A \setminus C$. We zien nu dat $g(x) \notin f(C)$ maar wel $g(x) \in B$, en daarmee dat $g(A \setminus C) \subset B \setminus f(C)$.

Stel nu $x \in B \setminus f(C)$. Dan moet er een $y \in A_1$ zijn waarvoor $g(y) = x$ omdat $g$ een bijectie is. Die $y$ kan niet in $C$ zitten. Immers, stel $y \in C$. Vanzelfsprekend geldt $A_1 = A \setminus C_0$, en gezien $y \in A_1$ geldt meteen $y \notin C_0$ ofwel $y \in C \setminus C_0$. Zie nu in dat $C \setminus C_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup_{i=0} g^{-1}(f(C_i)) = g^{-1}(f(\bigcup_{i=0}^{\infty} C_i)) = g^{-1}(f(C))$. Als $y \in C$ moet voor $g(y)$ dus wel gelden dat $g(y) = x \in g(C \setminus C_0) = g(g^{-1}(f(C))) = f(C)$. Dit is een contradictie, want $x \in B \setminus f(C)$. Hieruit volgt dat $y \notin C$. We zien nu $y \in A_1 \setminus C$ en dus $y \in A \setminus C$. Het volgt dat $B \setminus f(C) \subset g(A \setminus C)$. We zien dat $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$.

Gezien $A_1 \sim B$ en $A \setminus C \subseteq A_1$ met $g : A_1 \to B$ volgt uit Lemma 3.10 dat $A \setminus C \sim g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$. Daarnaast is $A \sim B_1$ en $C \subseteq A$ met $f : A \to B_1$ dus $C \sim f(C)$. Het is duidelijk dat $(A \setminus C) \cap C = \varnothing = (B \setminus f(C)) \cap f(C)$, dus vinden we met Lemma 3.11 dat $(A \setminus C) \sqcup C \sim (B \setminus f(C)) \sqcup f(C)$, ofwel $A \sim B$. $\square$

## 3.7 De sterke vorm

Met Stelling 3.12 is de sterke vorm van de Banach-Tarskiparadox ook te bewijzen. Intuïtief doen we het volgende. Neem $A$ en $B$ twee begrensde objecten in $\mathbb{R}^3$ met niet-leeg inwendige. We bewijzen dan dat $A \preccurlyeq B$ door om $A$ een bol heen te leggen, en in $B$ een bol te plaatsen. De bol in $B$ kunnen we vervolgens $n$ maal verdubbelen tot de kopiën de bol om $A$ geheel kunnen overdekken. We zien dan dat de bol om $A$ en dus ook $A$ zelf gelijkverdeelbaar is met een deelverzameling van de bol in $B$, wat weer een deelverzameling is van $B$. We doen precies het omgekeerde om aan te tonen dat $B \preccurlyeq A$, waarmee we vinden dat $A \sim B$. Hoe dit precies werkt wordt duidelijk in de stelling [21, hfdst. 3, p. 31] [30]:

**Stelling 3.13** (Banach-Tarskiparadox, sterke vorm). *Zijn $A$ en $B$ begrensde deel-*

*verzamelingen van* $\mathbb{R}^3$ *met niet-leeg inwendige. Dan* $A \sim B$.

*Bewijs.* Het is voldoende om aan te tonen dat $A \preccurlyeq B$, omdat het bewijs voor $B \preccurlyeq A$ precies hetzelfde werkt. Neem een bol $K$ zodat $A \subseteq K$ en een bol $L$ waarvoor $L \subseteq B$. Als we een $n$ groot genoeg nemen, is $K$ volledig te overdekken met $n$ (overlappende) kopiën van $L$. Dat wil zeggen dat er translaties $\phi_1, \ldots, \phi_n$ bestaan zodat $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \phi_i(L)$.

Neem nu translaties $\phi'_1, \ldots \phi'_n$ zó dat alle kopiën van $L$ onderling disjunct zijn,[3] dus zodat $\phi'_i(L) \cap \phi'_j(L) = \varnothing \iff i \neq j$. We nemen nu $S = \bigsqcup_{i=1}^{n} \phi'_i(L)$. Met de Banach-Tarskiparadox is $L$ $n$ maal te dupliceren omdat het bewijs niet afhangt van de straal van de bol, waarmee we direct hebben dat $L \sim S$ en dus ook $S \preccurlyeq L$. Zie nu in dat $A \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \phi_i(L) \preccurlyeq S \preccurlyeq L \subseteq B$. We zien samen met $B \preccurlyeq A$ en Stelling 3.12 dat $A \sim B$. $\square$

Oftewel: van een erwt is de zon te maken!

## 3.8 Conclusie

Na veel werk is het resultaat daar. We kwamen tot de eerste stap van het bewijs door aan te tonen dat een cirkel gelijkverdeelbaar is met een cirkel met gelijke straal maar met een missend punt. Bij de volgende stap toonden we aan dat de vrije groep te verdubbelen is. Om die verdubbeling een ruimtelijke betekenis te geven, stelden we weer een vrije groep van orde twee op waarbij de woorden matrixproducten ofwel rotaties voorstelden. Daarna konden we de bolschil verdubbelen door op een slimme manier gebruik te maken van de eigenschappen van de vrije groep. De Banach-Tarskiparadox volgt dan door de verdubbeling van de bolschil straalsgewijs uit te breiden, en met behulp van de eerste stelling ook het middelpunt te verdubbelen. Ten slotte werd duidelijk dat niet alleen bollen, maar *alle* begrensde objecten met niet-leeg inwendige te verdubbelen zijn, een resultaat dat zo bizar is dat het de vraag doet rijzen: is dit allemaal mogelijk in de werkelijkheid?

Dit is waar we het volgende hoofdstuk naar gaan kijken: in hoeverre zijn deze stellingen van toepassing op de echte wereld?

[3]Daarbij hoeven de kopiën van $L$ $K$ uiteraard niet te overdekken.

# Hoofdstuk 4

# De paradox in de werkelijkheid?

Het is op zichzelf al bovenmenselijk dat een bol volgens de wiskunde oneindig te verdubbelen is. Dat dit zelfs voor elk solide object geldt, kan de fascinatie alleen maar verder vergroten. Toch zet het resultaat ook aan tot enig denken: zou een verdubbeling als bij de Banach-Tarskiparadox ook mogelijk zijn in de werkelijkheid? Het antwoord lijkt voor zich te spreken: nee; we zien tenslotte geen objecten die zichzelf spontaan verdubbelen. Toch zou dit een overhaaste conclusie zijn: er bestaan wel degelijk gelijkenissen tussen fysische processen en de stellingen die bekeken zijn. De belangrijkste gelijkenissen zullen de kern van deze deelvraag vormen. Daarnaast zullen natuurkundige voorspellingen worden beproeft die gedaan kunnen worden aan de hand van de behandelde theorie, om zo uiteindelijk een beeld te geven van de mogelijkheid van de paradox in de werkelijkheid.

## 4.1 Bouwstenen van de materie

Nu we willen onderzoeken of de paradox mogelijk is in de werkelijkheid, is het wel belangrijk om te weten wat precies met 'de werkelijkheid' bedoeld wordt. In de wiskunde worden objecten gezien als een verzameling punten, zoals duidelijk werd in deelvraag twee. Die definitie laat zich echter niet direct afbeelden op het universum zoals we het kennen. De natuurkunde heeft het mogelijk gemaakt om tot in groot detail uit te zoeken waaruit materie precies bestaat. Het is in ieder geval ontegenzeglijk zo dat materie niet bestaat uit een oneindige collectie 'punten'. Uit de fysica komt een duidelijk ander beeld naar voren: materie bestaat uit een eindig aantal atomen [31, hfdst. 2, p. 8].

Dit levert een directe barrière op voor de paradox. In theorie is het prima mogelijk om de verzameling van een aantal atomen te bekijken en deze te manipuleren. De objecten waarop de stellingen die de verdubbeling mogelijk maken toe te passen zijn, zijn daarentegen overaftelbaar oneindige verzamelingen van punten zonder enig volume. Uit die kennis volgt direct dat objecten van alledaagse grootte in ieder geval niet te verdubbelen zijn: de verdubbeling van eindige verzamelingen is eenvoudigweg niet mogelijk. Hiermee lijkt een dood spoor bereikt te zijn. Toch is deze conclusie in wezen analoog aan het voorbarige eindoordeel dat in de introductie besproken is. Niet verrassend is er dus meer, en hiervoor moet gekeken worden op een veel kleinere schaal: het subatomaire.

## 4.2 De subatomaire wereld


Figuur 22: Het proton en de quarks

Zoals de naam al doet vermoeden is de subatomaire wereld de wereld van alles wat kleiner is dan het atoom. Hier voltrekken zich processen die loodrecht staan op het relatief eenvoudige beeld dat we hebben van de alledaagse werkelijkheid. Deze processen bestaan uit interacties tussen *subatomaire deeltjes* [31, hfdst. 2, p. 8] [32, hfdst. 1, p. 1-10]. Atomen bestaan zelf uit subatomaire deeltjes: protonen, neutronen en elektronen. Protonen en neutronen vormen de kern van een atoom en zijn voorbeelden van *hadronen*. Hadronen zijn deeltjes die bestaan uit twee of meer quarks, en zijn dus niet elementair (ze bestaan uit andere deeltjes). Quarks zijn zelf wel elementaire deeltjes, maar komen alleen in hadronen voor en dus niet los. Er bestaan twee soorten hadronen: mesonen en baryonen. Neutronen en protonen zijn baryonen, deeltjes die uit drie quarks bestaan. Deeltjes die uit twee quarks bestaan heten mesonen. Het zijn de hadronen en de reacties die tussen deze deeltjes plaatsvinden samen met de onderliggende quark-mechanismen die een mogelijkheid bieden voor een

'Banach-Tarski' verdubbeling.

Quarks verschillen van elkaar in hun *kleur* of *kleurlading* [32, hfdst. 1, p. 2]. Dit is een volledig abtract concept, dat compleet losstaat van het normale idee van kleur. In totaal bestaan er zes soorten kleuren: blauw, rood en groen samen met hun 'antikleuren'. Kleurlading lijkt op de lading waarvan sprake is bij de elektromagnetische kracht, en ook bij quarks is er sprake van een kracht. Tussen quarks met verschillende kleuren heerst een kracht die de sterke kernkracht heet. Protonen en neutronen bestaan uit quarks van de kleuren blauw rood en groen en worden door de sterke kernkracht bij elkaar gehouden. Deze deeltjes worden dan ook 'kleurloos' genoemd, waardoor direct de analogie met kleuren duidelijk wordt: blauw, rood en groen geven samen wit.

Met subatomaire deeltjes kunnen reacties plaatsvinden. Een voorbeeld hiervan is het proces bèta-verval, dat zorgt voor de bekende bèta-straling [33, hfdst. 16, p. 494-495]. Hierbij valt een neutron uiteen in een proton en een elektron. Deze reactie wordt als volgt symbolisch weergegeven: $\mathrm{n}^0 \to \mathrm{p}^+ + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$. De symbolen $\mathrm{n}^0$, $\mathrm{p}^+$, $\mathrm{e}^-$ en $\bar{\nu}_\mathrm{e}$ staan voor het neutron, het proton, het elektron en het elektron-antineutrino respectievelijk. Omdat we een verdubbeling van materie zoeken, en niet kunnen kijken naar collecties atomen is het alleen maar logisch om verder te zoeken naar een verdubbeling van hadronen. Deze zal er dan uiteindelijk uit moeten zien als een reactie zoals die van het bèta-verval.

## 4.3 Deeltjesvergelijkingen

Wat we uiteindelijk zoeken is een mogelijke reactie waarbij een deeltje als het ware 'gedupliceerd' wordt. Bij de Banach-Tarskiparadox is uitgelegd dat een bol verdubbeld kan worden met vijf stukken, waarbij drie stukken samen een kopie vormen, en de twee overige stukken een tweede kopie. Omdat quarks zelf te onderscheiden zijn, zouden we de stukken van de Banach-Tarskiparadox kunnen zien als quarks. De kopie die bestaat uit drie stukken wordt zo een collectie van drie quarks, die van twee stukken een van twee quarks. Beide kopiën zijn in principe hetzelfde, dus zouden we verwachten dat de collecties van quarks beide kleurloos zijn. We zoeken dus kleurloze deeltjes die bestaan uit twee of drie quarks. Daarmee komen we inderdaad uit op mesonen en baryonen, ofwel hadronen. Dit zijn precies de deeltjes die we willen verdubbelen.

Als we de kopie met drie stukken noteren als $B_3^3$ en de kopie met twee stukken als $B_2^3$ dan weten we dat $B^3 \sim B_3^3 \sqcup B_2^3$. Een baryon bestaat zoals is verteld uit drie quarks, dus we zouden $B_3^3$ kunnen beschouwen als een baryon. Bol $B_2^3$ zouden we in dezelfde geest kunnen zien als een meson. Uiteraard geldt voor de twee bollen die zo ontstaan weer dat $B_3^3 \sim B_3^3 \sqcup B_2^3$ en $B_2^3 \sim B_3^3 \sqcup B_2^3$. Als we nu de verdubbeling van de bol $B^3$ interpreteren als een reactie met mesonen en baryonen, en de mesonen en baryonen respectievelijk noteren met 2 en 3, dan hebben we via $B_3^3 \sim B_3^3 \sqcup B_2^3$ dat $3 \to 3+2$. Bovendien volgt uit de symmetrie van gelijkverdeelbaarheid dat $B_3^3 \sqcup B_2^3 \sim B_3^3$ en dus $3 + 2 \to 3$. We komen zo dus uit op reacties waarbij een deeltje dat bestaat uit drie quarks wordt omgezet in een deeltje met drie quarks en een deeltje met twee quarks (en andersom), oftewel: uit een hadron worden twee hadronen geproduceerd [34].

Het blijkt dat dit soort reacties inderdaad in de natuur voorkomen. Ze zijn zelfs essentieel voor het ontstaan van de materie waaruit wij gemaakt zijn. Onder andere zijn er de interacties tussen protonen en neutronen waarbij mesonen worden uitgewisseld, die zorgen voor de kracht die neutronen en protonen aan elkaar bindt in een atoomkern en dus het bestaan van materie mogelijk maken, waaronder [34] [35]: $\mathrm{p}^+ \to \pi^+ + \mathrm{n}^0 \to \mathrm{p}^+$ en $\mathrm{n}^0 \to \pi^- + \mathrm{p}^+ \to \mathrm{n}^0$, waarbij $\pi$ staat voor een pion (een soort meson). De pionen zijn hier virtuele deeltjes, deeltjes die door quantumeffecten korte tijd kunnen bestaan mits ze na korte tijd weer geannihileerd worden. Het uitwisselen van de virtuele pionen tussen neutronen en protonen geeft de genoemde kracht.

Op deze manier zijn er allerlei parabelen te vinden tussen de theorie over gelijkverdeelbaarheid en deeltjesvergelijkingen. Er is echter wel terugkerend beletsel. De deeltjes die ontstaan zijn alle virtuele deeltjes, en kunnen per gevolg maar voor zeer korte tijd bestaan. Er is dus geen sprake van een steeds toenemende massa, de massa neemt maar tijdelijk toe. Dit wordt toegestaan door het onzekerheidsprincipe [34], maar het creëren van een deeltje dat wel voor lange tijd bestaat wordt helaas belemmerd door het vereiste behoud van energie. Hoe dit precies zit wordt duidelijker in het vervolg van dit hoofdstuk. Eerst doen we nog een tweede poging om de paradox toe te passen op de werkelijkheid.

## 4.4 Ontstaan van de materie

Figuur 23: Banach-Tarski in de werkelijkheid?

Een van de grootste onopgeloste problemen van de natuurkunde is de materie-antimaterie-asymmetrie [36] [37]: waarom is er meer materie dan antimaterie? De verwachting is dat bij de oerknal gelijke hoeveelheden materie en antimaterie zouden moeten zijn ontstaan, maar er is om een onbekende reden meer materie ontstaan. We zouden dit fenomeen kunnen zien als een gevolg van de Banach-Tarskiparadox. Als voorbeeld kunnen we $B_3^3 \sim B_3^3 \sqcup B_2^3$ nemen. Omdat gelijkverdeelbaarheid transitief is volgt dat $B_3^3 \sim B_2^3 \sqcup B_2^3 \sqcup \cdots \sqcup B_3^3 \sqcup B_3^3 \sqcup \ldots$. We kunnen deze bollen wederom zien als uit quark bestaande deeltjes, waarmee we $3 \to 2+2+\cdots+3+3+\ldots$ krijgen. Hierbij gaan we er dus vanuit dat de deeltjes die ontstaan allemaal de hadronen zijn waaruit materie is opgebouwd (dus geen antideeltjes). Als we aannemen dat de paradox mogelijk is in de werkelijkheid, dan zou deze als verklaring kunnen dienen voor het overschot aan materie.

Dit is natuurlijk louter speculatie; het enige wat als bewijs voor deze hypothese kan dienen is het feit dat materie überhaupt bestaat. Bovendien komen we weer in aanraking met de wet van behoud van energie, een natuurwet die al eerder ter sprake is gekomen. We kunnen slechts niet-tijdelijke hadronen produceren met de paradox als de wet van behoud van energie niet opgaat, omdat we geen virtuele deeltjes toestaan die na een tijd kunnen annihileren. We kunnen natuurlijk stellen dat deze wet niet gold vlak na de oerknal, maar dit brengt ons niet erg ver. We krijgen dan immers weer nieuwe vragen: waarom gold de wet toen niet, en nu wel? Deze wet vormt dan ook een van de beste argumenten tegen de paradox in de werkelijkheid, en we zullen haar verder bespreken in de volgende sectie.

## 4.5 Behoud van energie

Op grote schaal vormt de wet van behoud al een belemmering voor de Banach-Tarskiparadox in de werkelijkheid. De wet stelt dat energie, en dus ook massa, niet kan ontstaan of verdwijnen, maar slechts kan overgaan in een andere vorm [38]. Een verdubbeling van een willekeurig object zou een twee maal zo grote massa, en dus ook een twee maal zo grote energie (via de bekende formule $E = mc^2$) opleveren, die uit het niets ontstaan is. Volgens deze wet is dat onmogelijk. Maar ook op het subatomaire niveau vormt deze natuurwet een theoretische muur, zoals in de vorige paragraven naar voren kwam. Er kunnen weliswaar deeltjes ontstaan op een manier die lijkt op de verdubbeling bij de Banach-Tarskiparadox, maar dit is slechts tijdelijk. De reden dat dit kan is dat de deeltjes slechts voor korte tijd bestaan, waarbij de spontane massa die ontstaat wordt toegelaten door het onzekerheidsprincipe. Een 'verdubbeling' van een deeltje met een lange duur is de verdubbeling die we zoeken, maar het onzekerheidsprincipe maakt zo een verdubbeling niet mogelijk. Het is volgens de wet van energiebehoud altijd nodig dat het overschot aan energie dat ontstaat na een tijd weer wordt teruggegeven.

We kunnen dus wel *aannemen* dat de paradox van toepassing is op subatomaire deeltjes, maar ook dan zijn er wetmatigheden die de wiskundige stellingen in de werkelijkheid vrijwel onmogelijk maken. We komen uit op contradicties met andere (natuurkundige) theoriën, die zelf ook hun grondslag vinden in de wiskunde.

## 4.6 Aannames

De wet van behoud van energie is niet het enige obstakel. Bij het doorlichten van de mogelijkheid van de Banach-Tarskiparadox hebben we een aantal aannames stilzwijgend geaccepteerd. Alleen het keuzeaxioma is expliciet benoemd, maar deze is niet de enige. De belangrijkste aannames worden in deze sectie behandeld.

### 4.6.1 Bewegingen

Het is duidelijk dat bepaalde natuurkundige verschijnselen te zien zijn als verdubbelingen met Banach-Tarski, maar daarbij nemen we wel iets aan: de stukken van de bol kunnen op realistische wijze uit elkaar worden geschoven en weer in elkaar worden gezet om twee bollen te vormen. Dit is niet zeker: bij de Banach-Tarskiparadox is immers niet bewezen dat de stukken op realistische wijze uit elkaar kunnen schuiven. Het zou dus best zo kunnen zijn dat de stukken door de ruimte moeten 'springen' wil de paradox mogelijk zijn. Ook weten we niets over de tijd waarin de duplicatie moet plaatsvinden, terwijl we in een natuurkundig proces juist zoeken naar een tijds*interval* en geen tijds*punt* waarin de verdubbeling moet plaatsvinden. Gelukkig is dit probleem relatief recent opgelost. In 2005 werd namelijk de volgende stelling bewezen: het is mogelijk de verdubbeling van de bol op een manier uit te voeren waarbij de stukken met continue functies (dus zonder 'sprongen') verplaatst worden en de stukken gedurende het hele proces disjunct blijven [39]. Deze verdubbeling vindt plaats in een tijdsinterval, en niet op een tijdspunt. Hiermee is de beweging van de stukken in ieder geval uitgesloten als belemmering voor de paradox in de werkelijkheid. Toch bestaat niet voor elke aanname een (eenvoudige) oplossing.

### 4.6.2 Het probleem van continuïteit

De paradox is bewezen in de driedimensionale ruimte. Dit is weliswaar ook de ruimte die we gebruiken om de werkelijkheid wiskundig te modelleren, maar toch is het belangrijk om dit beter te onderzoeken, zoals ook K.P. Hart duidelijk maakte in het gesprek met hem (Bijlage B). De wiskundige ruimte $\mathbb{R}^n$ is namelijk een continue ruimte. Dit is cruciaal voor de paradox, een bol is zelf immers continu. Het is dus van groot belang dat de werkelijke ruimte ook continu is. Als voorbeeld wordt in veel gevallen de Plancklengte opgeworpen als een 'kleinst mogelijke afstand'. Een kleinst mogelijke afstand zou aangeven dat de werkelijkheid niet continu is, en dus ook dat de Banach-Tarskparadox onmogelijk is. Toch is dit een misvatting: de Plancklengte is geen 'kleinste afstand' van het universum: het is nog onbekend of de ruimte (of specifieker de ruimtetijd) discreet of continu is [40]. De mogelijkheid van de paradadox is onlosmakelijk verbonden met deze onzekerheid, dus kunnen we (voor nu) slechts aannemen dat de ruimte continu is. Bovendien is het maar de vraag of we er ooit achter kunnen komen (op een empirische wijze), omdat de 'kleinste afstand' wel zeer klein zou moeten zijn mocht deze bestaan.

### 4.6.3 De rol van het keuzeaxioma

De continuïteit van de ruimte is slechts een van de aannames die over het algemeen gedaan worden. De aanname die duidelijk naar voren komt in relatie tot de paradox is het keuzeaxioma. Het keuzeaxioma is per definitie een aanname, zowel wiskundig als over de werkelijkheid. Het bestaan van de stukken die gebruikt werden bij de Hausdorff-paradox werd mogelijk doordat we het keuzeaxioma accepteerden. Wiskundig zijn we hierin volledig vrij, zolang nieuwe axioma's maar niet in contradictie zijn met de axioma's die we al geaccepteerd hebben. Als we over de werkelijkheid spreken is het lastiger. Als we wiskundige kennis willen projecteren op de werkelijkheid is het immers nodig dat de wiskundige axioma's ook in de werkelijkheid gelden.

## 4.7 Voorspellingen en analogiën

Al deze aannames brengen een dieper idee aan het licht, dat eerder filosofisch van aard is en ook werd opgemerkt door professor Hart (zie Bijlage B). Alles hangt samen met de aannames die we willen doen over de relatie tussen wiskunde en de werkelijkheid. We trachten de werkelijkheid te beschrijven met wiskundige formules, en met deze formules doen we vervolgens verdere voorspellingen om te zien of de theorie een beter beeld van de werkelijkheid oplevert. De Banach-Tarskiparadox volgt uit diezelfde wiskunde die we gebruiken om de werkelijkheid te modelleren. Nooit kunnen we echter zeker zijn of onze theoriën over de werkelijkheid, hoe mooi ze binnen de wiskunde ook uitkomen, kloppen. Doet een theorie waanzinnige voorspellingen? Dan verwerpen we haar. Is een theorie in contradictie met eerdere theoriën, dan is dat reden voor verder onderzoek, of we verwerpen haar weer. Maar zekerheid kan dit proces niet bieden. We accepteren een theorie slechts omdat er *analogiën* bestaan tussen de theorie en de werkelijkheid.

Einstein formuleerde dit probleem zeer treffend, in een uitspraak die niet voor niets het motto van dit werkstuk geworden is [41]: 'Voorzover de stellingen van de wiskunde betrekking hebben op de werkelijkheid zijn ze niet zeker, en voorzover ze zeker zijn betrekken ze zich niet tot de werkelijkheid.' De enige mogelijke gevolgtrekking is er dan ook een van onzekerheid. De werkelijkheid is, in tegenstelling tot de wiskunde, geen perfect systeem dat absolute zekerheden kan bieden. Zelfs al zou de Banach-Tarskiparadox mogelijk toe te passen zijn op deeltjesvergelijkingen, en verdubbelingen worden ook daadwerkelijk geobserveerd, hoe weten we dan zeker dat de paradox ook daadwerkelijk het onderliggende mechanisme is? We weten slechts dat de Banach-Tarskiparadox zeer onwaarschijnlijk is, omdat het een contradictie op zou leveren met principes uit de natuurkunde die door de jaren heen steeds zekerder zijn geworden.

Waar we binnen de wiskunde kunnen bewijzen of iets waar of onwaar is, komen we in de werkelijkheid niet veel verder dan het opstellen van een goed omschrijvend model. Het model *is* niet de werkelijkheid, maar *omschrijft* haar slechts. En deze vaststelling wordt het best ondersteund met extreme gevallen, zoals de Banach-Tarskiparadox. Zelfs al beschrijft de Banach-Tarskiparadox subatomaire processen, dan weten we dus alsnog niets over wat daadwerkelijk gaande is.

## 4.8 Conclusie

We hebben gezien dat er bijzondere gelijkenissen bestaan tussen gelijkverdeelbaarheid en de Banach-Tarskiparadox en subatomaire processen. Deeltjesvergelijkingen lijken op de bolverdubbeling, en het ontstaan van het overschot aan materie zou gezien kunnen worden als gevolg van de Banach-Tarskiparadox. Er bestaan echter een aantal beperkingen die de kans dat de Banach-Tarskiparadox mogelijk is in de werkelijkheid klein maken. Zo is er de wet van gehoud van energie, die door de jaren heen altijd waar is gebleken. Verder zijn er meerdere aannames nodig om de Banach-Tarskiparadox mogelijk te maken. Zo is het onzeker of de werkelijke ruimte, het universum, continu is, wat een vereiste is voor de Banach-Tarskiparadox. Daarnaast namen we voor het bewijs het keuzeaxioma uit Hoofdstuk 1 aan, en het is een louter filosofische overweging of we dit axioma ook voor de werkelijkheid willen accepteren. Pure zekerheid met betrekking tot deze deelvraag is niet te verkrijgen, omdat alles verbandhoudt met de aannames die we willen doen over de werkelijkheid en haar relatie tot de wiskunde.

Deze aannames duiden dan ook op het uiteindelijke probleem dat dit werkstuk presenteert. Hoe weten we welke (wiskundige) aannames we kunnen doen over de werkelijkheid? *Wat is de relatie tussen wiskunde en de werkelijkheid?*

# Conclusie

De Banach-Tarskiparadox is ongetwijfeld een van de fascinerendste wiskundige stellingen. In deze lange tocht door allerlei gebieden van de wiskunde zijn veel bijzondere stellingen naar voren gekomen. We hebben de verzamelingenleer bekeken, gezien wat groepen zijn en hoe de vrije groep verdubbeld wordt, en hoe bolschillen en uiteindelijk met de Banach-Tarskiparadox gehele bollen verdubbeld kunnen worden. De stellingen die de verschillende verdubbelingen mogelijk maken zijn, zelfs na het bewijzen, zeer contra-intuïtief, en daarmee rest alleen nog de vraag: welke gevolgen heeft de Banach-Tarskiparadox voor de werkelijkheid?

Figuur 24: De werkelijkheid: voor altijd een mysterie

We hebben gekeken naar verklaringen voor fysische processen met behulp van de Banach-Tarskiparadox. Er bestaan verrassende analogiën tussen de theorie van gelijkverdeelbaarheid en Banach-Tarski en de processen die plaatsvinden tussen subatomaire deeltjes. Toch is er genoeg reden om te geloven dat de paradox niet mogelijk is in de werkelijkheid. Het voornaamste fysische beletsel is de wet van behoud van energie: die een verdubbeling van massa via de Banach-Tarskiparadox onmogelijk maakt. Er zijn dus natuurkundige argumenten te geven waarom de paradox onmogelijk is in de werkelijkheid. Deze argumenten hebben wel een ding gemeen: het zijn met wiskunde geformuleerde principes.

De paradox brengt daarmee een dieper probleem aan het licht, dat filosofisch van aard is. We doen binnen de wetenschap, en met name de natuurkunde, maar al te graag veel aannames over de aard van de werkelijkheid. Dit brengt het uiteindelijke vraagstuk naar voren. Binnen de wiskunde zijn we vrij om een geheel axioma-stelsel te creëren, zolang de aannames die we doen maar consequent, logisch (volgens de wetten van de logica) en samenhangend zijn. Er is geen werkelijkheid waaraan de axioma's moeten voldoen: we scheppen ons eigen universum.

De natuurkunde staat dit echter niet toe. We kunnen slechts *aannemen* dat de aannames die we doen over de werkelijkheid kloppen, en vervolgens met experimenten testen of de theoriën die worden voortgebracht door die aannames goede voorspellingen doen. We komen niets te weten over de onderliggende mechaniek van de werkelijkheid.

Is God de virtuoze wiskundige die de axioma's van onze werkelijkheid geschapen heeft? Wellicht. Maar achter zijn ideeën zullen we niet kunnen komen. Bijgevolg is ook de hoofdvraag onzeker. We kunnen slechts een beredeneerde schatting doen over de mogelijkheid van de paradox, op basis van de aannames waarvan we denken dat ze overeenkomen met de werkelijkheid. De aannames zelf blijven ondoordringbaar, ze zijn niet te ontdekken, ongeacht hoeveel wiskunde we correct toepassen op het universum.

Voor sommigen is dit allicht té sceptisch. Toch is het zinvol om zo nu en dan stil te staan bij de aannames die we doen in de natuurkunde en de wetenschap in het algemeen. Sommige resultaten kunnen wiskundig verantwoord zijn, maar fysisch betekenisloos. Andersom geldt ook dat een wiskundige beschrijving van een proces *niet* de werkelijke mechaniek hoeft te zijn. Zij dit dan de conclusie waartoe de paradox ons brengt. De relatie tussen ons wiskundige universum en de werkelijkheid, of deze van God is, gewoon bestaat, of wat we ook mogen geloven, is onzeker. We moeten daarom oppassen theoriën niet te verwarren met de werkelijkheid. Laten we ons vooral verwonderen over de prachtige, verbazende en verwonderende resultaten die de wiskunde ons gegeven heeft en gaat geven, ook voor de wetenschap. En laten we doorgaan met onze oneindige wiskundige zoektocht naar de waarheid over de werkelijkheid, ook al zijn we niet zeker of wat we doen juist is. Wie weet waar we nog uitkomen.

— *Einde* —

# Bijlage A

# Evaluatie

Toen ik ruim twee jaar geleden op de HAVO aan mijn eerste profielwerkstuk begon, had ik na lang zoeken een aantal onderwerpen in gedachte, waaronder de oneindigheid en de Banach-Tarskiparadox. Ik koos voor de oneindigheid; de Banach-Tarskiparadox leek nog iets te ver gegrepen. Ik maakte kennis met de verzamelingenleer, een tak van de wiskunde die me bleef interesseren. Twee jaar later, op het VWO, stond ik opnieuw voor de keuze van een onderwerp, en dacht direct terug aan de Banach-Tarskiparadox.

Aan de Banach-Tarskiparadox ligt de verzamelingenleer ten grondslag, en het lag voor de hand om op deze manier voort te bouwen op mijn vorige werk. Bij het herlezen van mijn vorige werkstuk zag ik veel verbeterpunten. Ik wist dat de Banach-Tarskiparadox geen eenvoudig onderwerp zou zijn, maar koos er alsnog voor. De stelling was té interessant om te laten liggen.

En daar ligt het nu, een pak papier dat vier maal zo dik is als mijn vorige werkstuk. Toen ik aan het schrijven begon had ik maar een vaag idee van de opbouw van de stelling, en wist niet precies wat ik kon verwachten. Het onderzoek begon dan ook met het lezen van veel wiskundige literatuur. Soms voelde dit als het leren van een nieuwe taal: het bekendworden met notatie, het opdoen van nieuwe woordenschat, enzovoorts. Toch wordt, net als bij een taal, na een tijd duidelijk wat er staat. Je maakt kennis met verschillende bewijsmethoden, allerlei symbolen, en meer.

Het werk bestond vooral, zoals blijkt uit het logboek (Bijlage C), uit een herhalend patroon: lezen van literatuur, het bewijs op papier uitwerken en vervolgens alles duidelijk opschrijven. Nieuwe inzichten stapelen op en vormen bewijzen. Meestal ging dit goed, al kostte het zo nu en dan wat meer tijd dan verwacht. Wat vooral lastig bleek was het opstellen van één samenhangend netwerk van bewijzen. Niet alle literatuur maakt gebruik van dezelfde bewijsmethoden, en het was daarom nodig om soms keuzes te maken. Dat is niet altijd even gemakkelijk. Verder moet literatuur verbonden worden. Het is belangrijk de connecties te vinden tussen de bewijzen. Het was dan ook erg prettig om veel feedback te ontvangen van een echte wiskundige (K.P. Hart), vooral omdat wiskundigen goed zijn in het zien van details die worden overgeslagen. Dankzij de feedback zijn veel bewijzen helderder geworden, een aantal wiskundige fouten voorkomen en vage formuleringen verduidelijkt.

Het bewijzen van de stellingen was (zoals verwacht) toch wel het lastigste, en dit kostte daarom meer tijd dan voorzien was. Bovendien kwam later de sterke vorm van de paradox erbij, die extra tijd vergde. In het logboek is dan ook te zien dat voor Hoofdstuk 3, waarin vrijwel alle stellingen staan, de uitwerking veel langer heeft geduurd dan in het plan van aanpak (Bijlage D) het idee was. Hoofdstuk 3 is daarmee de voornaamste reden dat het werkstuk meer tijd heeft ingenomen dan verwacht. Ik vraag me af of dit wel te voorkomen was; het is immers bijna altijd zo dat de duur van een proces korter wordt geschat dan deze daadwerkelijk blijkt te zijn.

De samenwerking met mijn begeleider verliep zeer soepel. Als ik om raad vroeg kreeg ik dat direct, en alle feedback was helder en bruikbaar. Ik had niet het gevoel op de hielen gezeten te worden, en werd vrij gelaten in het gehele proces. We hebben regelmatig gesproken over de voortgang van het werkstuk, en dit maakte dat veel van de adviezen direct konden worden verwerkt in het werkstuk. Voor de begeleiding heb ik dan ook geen verbeterpunten, wat zeker als groot compliment mag worden beschouwd.

Bij het schrijven van het werkstuk heb ik ontzettend veel kennis opgedaan, overigens niet alleen over de verzamelingenleer. Ook andere deelgebieden van de wiskunde die ik totaal niet had verwacht kwamen aan bod, zoals groepentheorie. Verder ben ik bekend geworden met LaTeX, waarin dit werkstuk geschreven is (wat later een zeer goede keuze bleek gezien de grote hoeveelheid symbolen die moest worden ingevoerd).

Gelukkig waren er niet echt momenten van totale vastloping, waardoor het werk redelijk even verspreidt is over de aantal maanden waarin het werkstuk geschreven is. Qua voorbereiding zou ik dan ook niets anders hebben gedaan. Het was duidelijk wat gebeuren moest: stellingen bewijzen. Hoe de samenhang tussen de stellingen eruit ziet is daarbij niet iets wat van tevoren te zien is. Ervaring leert dat het voorbereiden niet tot in de details gedaan hoeft te worden: het daadwerkelijke proces loopt vrijwel altijd anders. Het schrijven was dan ook een ontdekkingstocht zonder duidelijke kaart. Maar het is juist de tocht door het onbekende die je nieuwe dingen leert.

De vrijheid die je daarin krijgt is wat het profielwerkstuk onderscheidt van andere schoolvakken. Het staat niet vast wat je moet leren, uitleggen of begrijpen. Dat bepaal je zelf. Ik raadt een ander dan ook aan om het profielwerkstuk op vergelijkbare wijze te maken. Je weet niet alles van tevoren, en dat hoeft ook (juist) niet. Als je weet *wat* je wilt weten - en dat is wel belangrijk om helder te hebben -, dan maakt het niet uit hoe je aan de kennis komt.

Het belangrijkste is dat het werkstuk voltooid is, en dat ik met zekerheid kan zeggen dat ik een van de wonderbaarlijkste stellingen van de wiskunde begrijp (voor zover dat mogelijk is voor de Banach-Tarski*paradox* uiteraard). Het is een stuk geworden dat een mooi slot voor mijn VWO-loopbaan vormt.

Laat ik het daar dan bij houden. Ik hoop dat de lezer het lezen van het stuk net zo interessant vond als ik het schrijven ervan. Het werkstuk zit erop, maar wat erna komt is nog onzeker. De ontdekkingstocht voor de rest van het leven gaat door. Maar ook hier maakt het niet uit hoe we tot onze doelen komen. Met hard werk kom je er, dat heb ik in ieder geval gezien met dit werkstuk.

# Bijlage B

# Gesprek met K.P. Hart

Het gesprek met professor Hart ging hoofdzakelijk over de stof die in deelvraag 4 thuishoort. We hebben kort gesproken over de inhoud van het bewijs van de Banach-Tarskiparadox. Hart wees vooral op het belang van de paradoxale eigenschappen van de rotatiegroep die gebruikt wordt bij de Hausdorff-paradox. Het belangrijkste gedeelte van het bewijs ligt daar, wat rest zijn vooral details die uitgewerkt moeten worden. De rotaties kunnen op een handige manier worden opgeschreven, waarna het gemakkelijk is om te laten zien dat er 'paradoxale' resultaten ontstaan. Verder vertelde hij dat de sterke versie van de paradox niet erg lastig te bewijzen is als je eenmaal de zwakke vorm bewezen hebt. Eerst bestond er bij mij redelijk wat aarzeling om dit resultaat in het werkstuk te verwerken, maar nu lijkt het toch een goede toevoeging die niet te veel tijd zal innemen.

Zoals gezegd is voornamelijk gesproken over de relatie tussen wiskunde en de werkelijkheid. Ik stelde Hart op de hoogte van mijn verwachtingen (dat de Banach-Tarskiparadox naar alle waarschijnlijkheid niet mogelijk is in de echte wereld). Hij deelde duidelijk deze mening. Een van de problemen die hij benoemde was dat de ruimte continu moet zijn (in verband met de oneindige preciesheid van de stukken), terwijl het maar de vraag is of dit ook werkelijk zo is. Over het artikel van Augenstein - dat op enkele gelijkenissen tussen gelijkverdeelbaarheid en processen binnen de deeltjesfysica wijst - zei hij vooral dat het zien van analogiën op zichzelf niet zo veelzeggend is, maar dat juist het doen van voorspellingen waarde heeft. Daaruit heb ik besloten enkele mogelijke voorspellingen te laten zien, en te kijken of deze rijmen met de werkelijkheid (naar alle waarschijnlijkheid dus niet). Zouden die voorspellingen wel kloppen, dan is er reden voor verder onderzoek.

Verder bemerkte Hart tot mijn blijdschap iets wat ik zelf ook voor ogen had, namelijk het filosofische karakter van de hoofdvraag. Om *werkelijk* te kunnen bepalen of de Banach-Tarski enige toepassing in de werkelijkheid kent kom je al snel bij een filosofisch vraagstuk: hoever kun je gaan in het toepassen van wiskunde binnen de natuurkunde? Dit is precies wat ik in de hypothese probeerde te vatten.

Ook heeft Hart nog een boek te leen gegeven, dat wel beschouwd kan worden als het belangrijkste naslagwerk op het gebied van Banach-Tarski: *The Banach-Tarskiparadox* van Stan Wagon. Dit zal uiteraard goed van pas komen bij het uitwerken van de bewijzen in deelvraag 3. Samenvattend heeft het gesprek de hypothese dus onderstreept, en richting gegeven aan het onderzoek dat nog gedaan kan worden.

Geschreven: 3 December 2018; enige tijd na het gesprek.

# Bijlage C

# Logboek

| Datum | Duur | Plaats | Verrichte werkzaamheden | Opmerkingen | Afspraken |
|---|---|---|---|---|---|
| Juni 2018 | 1/2 uur | School | Gesprek met begeleider over mogelijke onderwerpen en de eisen voor het werkstuk. | Nog geen onderwerp definitief gekozen, in de vakantie verder oriënteren. | n.v.t. |
| 26 Augustus 2018 | 2 uur | Thuis | Literatuur verzamelen, lezen over het potentiële onderwerp (de Banach-Tarskiparadox). | Er is meer dan genoeg literatuur te vinden over het onderwerp en mogelijke toepassingen ervan. | n.v.t. |
| 29 Augustus 2018 | 1/2 uur | School | Gesprek met begeleider over de keuze van het onderwerp, mogelijke deelvragen, het vinden van externe contacten en de gevonden literatuur. | Het onderwerp is duidelijk geworden en lijkt voldoende materiaal te bieden voor een werkstuk. | Gevonden literatuur doorsturen samen met het logboek. |
| 31 Augustus 2018 | 20 min. | Thuis | Logboek digitaliseren en doorsturen samen met artikelen | | n.v.t. |
| 2 September 2018 | 1 uur | Thuis | Nieuwe literatuur verzamelen en zoeken naar dingen die gerelateerd zijn aan het onderwerp en misschien van belang kunnen zijn. | Veel nieuwe literatuur gevonden. Er zijn een aantal simpelere paradoxen die lijken op de Banach-Tarskiparadox. Deze kunnen allicht assisteren bij het uitleggen van de paradox. | n.v.t. |
| 4 September 2018 | 40 min. | Thuis | Literatuur zoeken over het keuzeaxioma. | Ook over het keuzeaxioma is meer dan genoeg te vinden. Voor nu is alle benodigde literatuur verzameld. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 September 2018 | $2^1/_2$ uur | Thuis | Globaal lezen over de elementaire verzamelingenleer en over (onderwerpen gerelateerd aan) de Banach-Tarskiparadox, en werken aan de opzet van het document en de werkomgeving. | De rode draad van de paradox wordt duidelijker, en daarmee ook het beeld van de deelvragen. De Hausdorff-paradox komt veel terug in de literatuur, en wordt gebruikt bij het bewijs. Het lijkt daarom verstandig deze in het werkstuk te verwerken. | n.v.t. |
| 9 September 2018 | 40 min. | Thuis | Opzetten van de bibliografie in het document, zodat de bronvermelding goed kan verlopen. | Bronvermelding werkt nu soepel, dus dit moet verder geen problemen meer opleveren. | n.v.t. |
| 11 September 2018 | 2 uur en 45 min. | Thuis | Sorteren van de gevonden literatuur, werken aan de opzet van het document en van het voorblad, en een schets maken van de deelvragen. | De globale opzet van het document is vrijwel klaar, en de inhoud van drie deelvragen is al redelijk zeker. Over deelvraag 2 bestaat nog twijfel. | Morgen deelvragen bespreken met begeleider zodat het plan van aanpak ingevuld kan worden. |
| 12 September 2018 | $^1/_2$ uur | School | Gesprek met begeleider over mogelijke contactpersonen en over de geschetste deelvragen (m.n deelvraag 2). Daarnaast gesproken over de verdeling van de deelonderwerpen over de verschillende deelvragen. | Zowel op de TUE als op de RU zijn contactpersonen te vinden. Eindhoven heeft momenteel de voorkeur, omdat daar zeker iemand is met kennis over het onderwerp. Aangaande deelvraag 2 is n.a.v. het gesprek de Hausdorff-paradox wellicht een goede invulling gebleken. | Contact leggen met de potentiële contactpersonen, en beginnen aan de uitwerking van het plan van aanpak. |
| 16 September 2018 | 15 min. | Thuis | Beginnen aan het plan van aanpak. | Alle tot dusver bekende gegevens zijn verwerkt in het plan van aanpak. De invulling van deelvraag 2 is nog steeds onzeker, maar wordt mogelijk toch de Hausdorff-paradox. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 September 2018 | 1 uur | Thuis | Het zoeken naar, en uiteindelijk formuleren van een adequate deelvraag 2. | Een goede invulling voor deelvraag 2 is uiteindelijk gevonden, t.w. gelijkverdeelbaarheid. Het blijkt niet alleen een belangrijk begrip te zijn bij het bewijs van de Banach-Tarskiparadox, maar ook bij het vinden van een relatie tussen de paradox en de werkelijkheid, en draagt daarmee goed bij aan de beantwoording van de hoofdvraag. | n.v.t. |
| 23 September 2018 | 1 uur en 20 min. | Thuis | Afronden van het plan van aanpak. | Het plan van aanpak is nu gereed. Morgen kort met begeleider bespreken en daarna inleveren. | n.v.t. |
| 2 Oktober 2018 | 45 min. | Thuis | Contact opnemen met de twee contactpersonen, en verwerken van de feedback op het plan van aanpak. | Beide contactpersonen zijn per e-mail gecontacteerd. Van een van hen is direct al een reactie ontvangen: een persoonlijke afspraak is mogelijk rond de beoogde tijden in het PVA. Er rest nu alleen nog het maken van de afspraken. | n.v.t. |
| 3 Oktober 2018 | 30 min. | Thuis | Reageren op de reacties op de op 2 oktober verstuurde e-mails, en zoeken naar een geschikte datum voor een afspraak. | Aan prof. K.P Hart van de TU Delft zijn twee mogelijke data verstuurd waarop over het werkstuk gesproken kan worden. De tweede contactpersoon heeft inmiddels ook gereageerd, er moet echter nog wel gezocht worden naar een datum voor een gesprek. | De voorgestelde afspraak is op de TU Delft, rond 13:00 uur op 20 of 21 november met prof. K.P. Hart. |
| 4 Oktober 2018 | 40 min. | Thuis | Opbouw van het document in grote lijnen uitwerken door de tussenkopjes te schetsen. | Dankzij de geschetste tussenkopjes kan nu op een gestructureerde wijze gewerkt worden aan het antwoord op de hoofdvraag. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 Oktober 2018 | 3 uur | Thuis | Werken aan deelvraag 1. | Deelvraag 1 is nu voor ongeveer de helft voltooid. Verder zijn er geen problemen ondervonden bij de uitwerking. | n.v.t. |
| 10 Oktober 2018 | 20 min. | School | Gesprek met begeleider over de voortgang van deelvraag 1, de contactpersonen en de indeling van het werkstuk. | De opzet van deelvraag 1 is goed. Van contactpersoon prof. Hart is nog geen reactie ontvangen op de doorgestuurde data, dus zal naar hem binnenkort waarschijnlijk een nieuwe e-mail gestuurd moeten worden. | Prof. Hart opnieuw een e-mail sturen om een afspraak te maken. |
| 10 Oktober 2018 | 2 uur | Thuis | Werken aan deelvraag 1 en literatuur over de verzamelingenleer doorlezen. | Deelvraag 1 is nu voor ongeveer 3/5 deel uitgewerkt. De uitwerking verloopt nog steeds zonder problemen. Als materie voor deelvraag 1 zijn afbeeldingen nog toegevoegd, deze kunnen later nodig zijn. | n.v.t. |
| 12 Oktober 2018 | 10 min. | School | Contactpersoon K.P. Hart opnieuw e-mailen. | Ditmaal direct een reactie ontvangen, de afspraak is nu zo goed als definitief. Alleen 20 november bleek mogelijk, maar dit is verder geen probleem. | 20 november, 13:00 op TU Delft met K.P. Hart. |
| 13 Oktober 2018 | 2 uur, 30 min. | Thuis | Werken aan deelvraag 1. | Deelvraag 1 is vrijwel voltooid. | n.v.t. |
| 14 Oktober 2018 | 3 uur | Thuis | Verder werken aan deelvraag 1. | Alleen een aantal kleine dingen hoeven nog gedaan te worden aan deelvraag 1. | n.v.t. |
| 15 Oktober 2018 | 4 uur | Thuis | Deelvraag 1 voltooien en beginnen aan deelvraag 2. | Het is verstandig gebleken gelijkverdeelbaarheid in een deelvraag te bespreken; er schijnt nog veel te zijn wat moet worden uitgediept. | n.v.t. |
| 16 Oktober 2018 | 3 uur, 30 min. | Thuis | Verder werken aan deelvraag 2. | Deelvraag 2 is ongeveer voor de helft voltooid. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 Oktober 2018 | 1 uur, 40 min. | Thuis | Verder werken aan deelvraag 2 en aan het laatste bewijs ervan beginnen. | Voornamelijk literatuur bestudeerd over gelijkverdeelbaarheid voor het laatste bewijs. | n.v.t. |
| 18 Oktober 2018 | 3 uur | Thuis | Werken aan het laatste bewijs van deelvraag 2. | Dit bewijs blijkt vrij lastig, het heeft dan ook redelijk wat tijd in beslag genomen. | n.v.t. |
| 19 Oktober 2018 | 1 uur, 20 min. | Thuis | Laatste bewijs van deelvraag 2 voltooien. | Het bewijs is redelijk duidelijk, op een aantal kleine punten na, deze kunnen worden voorgelegd aan prof. Hart. | n.v.t. |
| 20 Oktober 2018 | 35 min. | Thuis | Beginnen aan deelvraag 3. | Deelvraag 2 is ruim op tijd klaar. Het is de bedoeling dat deelvraag 3 vóór de afspraak op 20 november af is, dus dit komt goed uit. | n.v.t. |
| 20 November 2018 | 2 uur | TU Delft | Gesprek met K.P. Hart. | Lang gesprek gehad met K.P. Hart op de TU Delft. Hoofdzakelijk gesproken over de inhoud van deelvraag 4 en de mogelijkheid van de paradox in de werkelijkheid, en kort over het bewijs zelf. Hart wees op de belangrijke stukken van het bewijs en heeft tevens een boek uitgeleend dat zeer van pas zal komen bij de uitwerking van het bewijs. Verder zal hij, als hij daarvoor tijd heeft, het werkstuk in de eindfase nog eens controleren op fouten. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 November 2018 | 30 min. | School | Gesprek met begeleider over het gesprek met K.P. Hart en over de zaken die nog resten voor conceptversie. | Voor de conceptversie moet de inhoud van het gesprek met Hart worden verwerkt in het werkstuk. Buiten dat om hoeft niet veel meer gedaan te worden. De focus ligt nu dan ook op het verbeteren van de opzet en het opstellen van het bewijs. | n.v.t. |
| 25 November 2018 | 1 uur, 15 min. | Thuis | Voorblad bewerken zodat deze voldoet aan de eisen en verder werken aan deelvraag 3. | Het voorblad miste wat informatie, dit is nu opgelost. | n.v.t. |
| 2 December 2018 | 1 uur, 45 min. | Thuis | Verder werken aan deelvraag 3 en missende bronvermeldingen aanbrengen t.b.v. de conceptversie. | Deelvraag 3 is helaas nog niet voltooid, o.a. door een tussenkomende toetsweek heeft het wat meer tijd nodig. Het werkstuk zal nog wel ruim op tijd worden afgerond, o.a. omdat deelvraag 4 niet heel veel tijd zal innemen. | n.v.t. |
| 3 December 2018 | 3 uur | Thuis | Conceptversie afronden. | Er was niet veel werk meer over voor de afronding van de conceptversie, slechts enkele details ontbraken nog. Het concept is nu dan ook compleet afgerond. Voor alle duidelijkheid is nog een verslag van het gesprek met K.P. Hart bijgevoegd, zodat de vruchten van het gesprek ook duidelijk zijn. | n.v.t. |
| 6 December 2018 | 4 uur | Thuis | Werken aan het stuk over (vrije) groepen en het leeswerk dat daarbij hoort. | Het stukje over groepen is min of meer voltooid. Daarna kan worden begonnen aan de Hausdorff-paradox. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 December 2018 | 3 uur | Thuis | Het stukje over groepen voltooien en beginnen aan het bewijs van de Hausdorff-paradox. | Voor de Hausdorff-paradox zijn veel extra resultaten benodigd, en niet alle zijn interessant om uitvoerig te bespreken/bewijzen. De belangrijke stukken zullen dus moeten worden uitgezocht (of zijn dit al). | n.v.t. |
| 8 December 2018 | 3 uur | Thuis | Werken aan het stuk over banen en de rest van deelvraag 3. | Er bleken steeds extra bewijsjes nodig te zijn om tot het uiteindelijke resultaat te komen. Deze zijn nu naar verwachting bijna voltooid. | n.v.t. |
| 9 December 2018 | 3 uur, 20 min. | Thuis | Werken aan deelvraag 3. | Het bewijs voor de Hausdorff-paradox wordt in verschillende vormen gepresenteerd, en dit maakt het soms lastiger om de literatuur te kunnen volgen. | n.v.t. |
| 10 December 2018 | 5 uur | Thuis | Werken aan het bewijs van de Hausdorff-paradox. | Op een kleine hinderpaal gestuit tijdens het uitwerken van het bewijs dat eigenlijk bijna klaar was. Bij de gegeven decompositie van de vrije groep blijft een stuk over, wat bij het probleem vormt bij de Hausdorff-paradox. Dit zou gemakkelijk op te lossen moeten zijn. | n.v.t. |
| 11 December 2018 | 5 uur, 30 min. | Thuis | De Banach-Tarskiparadox en enkele andere stellingen bewijzen. | De Banach-Tarskiparadox is in principe bewezen, alleen moet het bewijs van de Hausdorff-paradox nog iets verfijnd worden. Dit zal niet veel tijd kosten. Daarna kan eventueel de sterke vorm nog bewezen/behandeld worden. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 December 2018 | 50 min. | School | Gesprek met begeleider over de conceptversie. | De conceptversie is beoordeeld en voldoende, maar er zijn nog wel genoeg verbeterpunten. De belangrijkste daarvan zijn het toevoegen van verklarende afbeeldingen, het vloeiender laten lopen van de tekst, het toevoegen van samenvattingen aan elk hoofdstuk, en het toevoegen van uitleg die niet afhankelijk is van de pure wiskunde. Verder moeten het logboek en het PVA nog worden toegevoegd aan de hoofdtekst, en moeten de evaluatie, inleiding en deelvraag 4 nog geschreven worden. | n.v.t. |
| 17 December 2018 | 3 uur, 45 min. | Thuis | Werken aan het stuk over de sterke vorm van de paradox en beginnen aan de Banach-Cantor-Schröder-Bernsteinstelling | Alleen de laatste twee stellingen van deelvraag 3 moeten nog bewezen worden, slechts een hiervan zal wat tijd innemen. Deelvraag 3 zal deze week dan ook naar alle waarschijnlijkheid worden afgerond. | n.v.t. |
| 20 December 2018 | 4 uur | Thuis | Stelling van Banach, Cantor, Schroöder en Bernstein op papier globaal uitwerken. | Dit bewijs vereist redelijk wat werk, maar is nu redelijk ver klaar. | n.v.t. |
| 21 December 2018 | 2 uur, 30 min. | Thuis | Stelling van Banach, Cantor, Schröder en Bernstein bewijzen. | Deze stelling kostte aardig wat tijd, maar de sterke vorm is nu een vrij eenvoudig gevolg. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 December 2018 | 1 uur, 10 min. | Thuis | De sterke vorm van de Banach-Tarskiparadox bewijzen. | Deelvraag 3 is qua wiskunde nu vrijwel geheel uitgewerkt, alleen moeten nog wat dingen veranderd worden aan het bewijs van de Hausdorff-paradox en moeten enkele bronnen worden toegevoegd. | n.v.t. |
| 29 December 2018 | 3 uur, 20 min. | Thuis | Beginnen aan deelvraag 4 | Veel vooruitgang geboekt op deelvraag 4, o.a. omdat dit qua inhoud de eenvoudigste deelvraag is. | n.v.t. |
| 30 December 2018 | 2 uur | Thuis | Verder werken aan deelvraag 4 | Deelvraag 4 is nu voor een groot deel uitgewerkt, en zal vrij snel klaar zijn. Vooral het stuk over quarks behoeft nog wat meer uitwerking. | n.v.t |
| 31 December 2018 | 3 uur, 10 min. | Thuis | Het bewijs van de Hausdorff-paradox en enkele andere bewijzen duidelijker/kloppend maken en werken aan deelvraag 4. Verder het logboek en het plan van aanpak nu ook aan het werkstuk toegevoegd. | Het wiskundige gedeeltje van het werkstuk is vrijwel klaar, alleen de feedback op de conceptversie moet nog verwerkt worden. Het werkstuk kan dus binnenkort worden verzonden naar prof. Hart voor controle. | n.v.t. |
| 13 Januari 2019 | 10 min. | Thuis | K.P. Hart mailen t.a.v. de voltooiing van het werkstuk. | Hart zal het werkstuk doorlezen. Verder is geïnformeerd wanneer het boek moet worden teruggegeven; dat kon nog even wachten. | n.v.t. |
| 30 Januari 2019 | 15 min. | School | Gesprek met begeleider over de afronding en eindversie van het werkstuk. | K.P. Hart zal opnieuw gemaild moeten worden, omdat nog geen reactie ontvangen is en de deadline nadert. Verder zal de begeleider enkele stukken van het werkstuk lezen voor tussendoorse feedback. | K.P. Hart opnieuw mailen. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 Januari 2019 | 10 min. | School | K.P. Hart mailen over de presentatie van het werkstuk en de nog te ontvangen feedback. | Prof. Hart is uitgenodigd om te komen kijken bij de presentatie, hoewel de reistijd waarschijnlijk te groot zal zijn. Het is onzeker of de feedback optijd aankomt, gezien de naderende deadline. | n.v.t. |
| 1 Februari 2019 | 4 uur, 30 min. | Thuis | Introductie schrijven en esthetische verbetingen aanbrengen. | Deelvraag 4 moet nog worden afgerond, en de conclusie moet nog geschreven worden. Verder is het wachten op feedback van prof. Hart. | n.v.t. |
| 2 Februari 2019 | 7 uur | Thuis | Afbeeldingen toevoegen, bronnen toevoegen, voorblad aanpassen en verklarende teksten toevoegen. | Met de afbeeldingen is de strekking van het werkstuk beter te volgen en zijn de bewijzen ook intuïtief te begrijpen. | n.v.t. |
| 3 Februari 2019 | 6 uur | Thuis | Meer afbeeldingen en verklarende tekst toevoegen en het verbeteren van de lay-out. | Vrijwel alle afbeeldingen zijn toegevoegd, alleen bij deelvraag vier ontbreken er nog enkele. | n.v.t. |
| 4 Februari 2019 | 3 uur | Thuis | Samenvattingen toevoegen aan alle hoofdstukken en wat feedback van de conceptversie verwerken. Daarnaast nog wat nieuwe theorie bekeken die allicht nog in het werkstuk komt. | Prof. Hart heeft gereageerd, en zal morgen het werkstuk sturen met commentaar over o.a. de wiskunde. Dit zal zeer goed van pas komen bij het afronden van het werkstuk. | n.v.t. |
| 5 Februari 2019 | 8 uur | Thuis, School | Afbeeldingen en wat tekst verbeteren, lezen van feedback van K.P. Hart, deelvraag 4 uitbreiden en het schrijven van de conclusie. | Prof. Hart heeft een grote hoeveelheid aan zeer behulpzaam commentaar toegestuurd. Dit is ongetwijfeld van grote waarde voor het werkstuk. Een groot deel van de feedback moet nog verwerkt worden in het werkstuk. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 Februari 2019 | 50 min | School | Met begeleider de feedback van K.P. Hart doornemen en zaken omtrent de voltooiing van de eindversie bespreken. | Het werkstuk hoeft niet meer voor vrijdag ingeleverd te worden, wat extra tijd biedt voor het verwerken van alle feedback en het verbeteren van bepaalde stukken. | Volgende week woensdag opnieuw overleggen, o.a. over dingen die nog verbeterd kunnen worden en het bewijs van de Hausdorff-paradox. |
| 7 Februari 2019 | 7 uur | Thuis, School | Afbeeldingen vervangen met zelfgemaakte versies, voorblad verbeteren, bewijs Hausdorff-paradox opnieuw doornemen, K.P. Hart mailen m.b.t. het commentaar. | K.P. Hart is nog eenmaal ge-e-mailed n.a.v. zijn commentaar op de Hausdorff-paradox. | n.v.t. |
| 8 Februari 2019 | 4 uur | Thuis | Feedback van K.P. Hart verwerken en algemene verbeteringen doorvoeren. | Nog geen reactie ontvangen op de vraag over de Hausdorff-paradox. | n.v.t. |
| 9 Februari 2019 | 5 uur | Thuis | Verbeteringen doen aan het uiterlijk en de structuering van het document en wat feedback verwerken. | Het document is beter en duidelijker gestructureerd, o.a. de hoofdstukken zijn nu duidelijk aangegeven. | n.v.t. |
| 10 Februari 2019 | 11 uur | Thuis | Feedback van K.P. Hart verwerken, laatste feedback conceptversie verwerken, bewijs Hausdorff-paradox verbeteren, bronnen toevoegen, algemene verbeteringen doorvoeren. | Alle feedback is nu verwerkt. De Hausdorff-paradox is nog eens goed bestudeerd en in veel meer detail uitgewerkt. Het lijkt erop dat deze nu wel klopt. | n.v.t. |
| 11 Februari 2019 | 5 uur | Thuis | Bronnen van Hoofdstuk 3 toevoegen en het schrijven van de evaluatie. | De evaluatie is voltooid. K.P. Hart heeft nog gereageerd op de e-mail. Met zijn commentaar bedoelde hij geen fout in de wiskunde, dus de opmerking hoeft niet verder bekeken te worden. | n.v.t. |
| 12 Februari 2019 | 4 uur | Thuis | Laatste bronnen toevoegen aan Hoofdstuk 4, een stuk herschrijven van Hoofdstuk 4 en het stuk over banen verduidelijken. | Morgen laatste bespreking met begeleider voor de eindversie, daarna kan de eindversie binnen korte tijd worden ingeleverd. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 Februari 2019 | 1 uur, 30 min. | School | Gesprek met begeleider over het gedeelte over banen en hun relatie met de Hausdorff-paradox en over eventuele deelname aan prijsvragen. | Een laatste stukje van het bewijs van de Hausdorff-paradox was nog niet helemaal duidelijk. Dankzij het gesprek is nu duidelijk hoe het precies zit met de verdeling van het boloppervlak. Verder moet het werkstuk binnenkort af zijn, vooral omdat deadlines voor prijsvragen eraan komen. Deze deadlines moeten makkelijk te halen zijn gezien het werkstuk vrijwel af is. | n.v.t. |
| 13 Februari 2019 | 2 uur, 30 min. | Thuis | Laatste bronnen toevoegen aan het werkstuk, deelvraag 4 afsluiten, kleine verbeteringen aanbrengen, dankwoord toevoegen. | Vrijwel alles is nu klaar. Het enige wat nog gedaan hoeft te worden is het controleren van het werkstuk a.d.h.v. de handleiding en het corrigeren van taalfouten. | n.v.t. |
| 15 Februari 2019 | 4 uur, 30 min. | Thuis | Algemene verbeteringen doorvoeren a.d.h.v. de handleiding voor het PWS. | De deelvragen en de hoofdvraag zijn, naast ander werk, aangescherpt en verduidelijkt, evenzo de conclusies op de deelvragen. | n.v.t. |
| 16 Februari 2019 | 4 uur, 45 min. | Thuis | Eindversie afronden. | De eindversie is klaar. Het enige wat nog gedaan moet worden is een laatste controle van de taal en de wiskunde. | n.v.t. |
| 19 Februari 2019 | 11 uur | Thuis | Werkstuk doorlezen en fouten verbeteren. | Het hele werkstuk is aandachtig doorgelezen. Er is nog een significant aantal fouten verbeterd, dus het was niet voor niets. Het werkstuk is nu in principe voltooid en kan worden ingeleverd. | n.v.t. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 Februari 2019 | 20 min. | School | Gesprek met begeleider over eventuele deelname aan prijsvragen. | Kort gesproken over de dingen die nog gedaan moeten worden voor deelname aan prijsvragen. | n.v.t. |
| 21 Februari 2019 | 40 min. | Thuis | Werkstuk klaar maken voor inleveren en uiteindelijk het inleveren van het werkstuk. | Nog enkele zinnen zijn aangepast, waarmee het werkstuk nu officieel klaar en ingeleverd is. | n.v.t. |

# Bijlage D

# Plan van aanpak

## Algemene gegevens

**Naam:** Joris de Man
**Begeleider:** Helle Hendriks
**Niveau:** VWO
**Onderwerp:** De Banach-Tarskiparadox
**Vakken:** Wiskunde, Natuurkunde
**Contactpersonen en bijbehorende instanties:** J.W. Portegies (TU Eindhoven), K.P. Hart (TU Delft), Steunpunt SciencePWS (Radboud Universiteit Nijmegen)

## Onderzoeksplan

**Hoofdvraag:** *Is de Banach-Tarskiparadox mogelijk in de werkelijkheid?*
**Deelvragen:**

1. *Welke onderdelen uit de verzamelingenleer zijn nodig, en wat houden ze in?*
2. *Wat zijn de eigenschappen van gelijkverdeelbaarheid?*
3. *Hoe is de Banach-Tarskipardox te bewijzen?*
4. *Is de Banach-Tarskiparadox toe te passen op subatomaire deeltjes?*

**Hypothese:** Het is onmogelijk te bepalen of de Banach-Tarskiparadox wel of niet

mogelijk is in de werkelijkheid.
**Werkwijze:** Het grootste deel van de tijd zal besteed worden aan onderzoek van vakliteratuur. Aan de hand van dat onderzoek kunnen de deelvragen beantwoord worden. Verder zal de wiskundige kennis en de mening van mensen uit het vakgebied geraadpleegd worden. Het moment waarop de contactpersonen geraadpleegd worden zal samenvallen met de voltooiing van de conceptversie van deelvraag 3 en 4 (zie tijdsplan), omdat dan het duidelijkst is welke vragen precies gesteld kunnen worden, en welke informatie nog ontbreekt. Alle informatie zal tezamen dan het antwoord op de hoofdvraag geven.
**Informatiebronnen en hulpmiddelen:** De meeste informatie zal moeten komen uit vakliteratuur, omdat het onderwerp hoofdzakelijk over wiskunde gaat. In wetenschappelijke artikelen en in boeken is de meest betrouwbare en best georganiseerde informatie te vinden. Daarnaast zullen mensen uit het vakgebied als goede informatiebron dienen. Ook kunnen zij helpen bij de theoretische stukken van het werkstuk, bijvoorbeeld bij het bewijs van de paradox.
**Presentatievorm verslag:** Het verslag zal de vorm van een schriftelijk verslag krijgen.
**Presentatievorm presentatieavond:** Het algemene verhaal zal gepresenteerd worden aan de hand van een diavoorstelling. Daarnaast zal gebruik gemaakt worden van een digitale demonstratie om het bewijs visueel en inzichtelijk te maken voor het publiek.

## Tijdsplan

| Tijdsperiode | Activiteit | Duur |
|---|---|---|
| Week 39, 40, 41 | Artikelen lezen over de verzamelingenleer en globaal lezen over de Banach-Tarskiparadox, daarna deelvraag 1 uitwerken. | 6 uur |
| Week 42, 43 | Lezen over gelijkverdeelbaarheid, vervolgens deelvraag 2 uitwerken. | 7 uur |
| Week 45, 46 | Grondig lezen over de Hausdorff- en Banach-Tarskiparadox, daarna de bewijzen (deelvraag 3) in grote lijnen uitwerken. | 10 uur |
| Week 47, 48 | Lezen voor deelvraag 4, daarna deelvraag 4 globaal uitwerken en contactpersonen raadplegen. | 8 uur |

| | | |
|---|---|---|
| 3 December | Conceptversie inleveren. | n.v.t. |
| Week 50, 51, 52, 1 | Verder werken aan deelvraag 3 en 4, en verwerken van alle feedback. | 8 uur |
| Week 2 | Deelvraag 3 en 4 voltooien, en beginnen aan de conclusie. | 6 uur |
| Week 4, 5 | Conclusie afronden, daarna eindversie naast het beoordelingsformulier leggen en laatste controles uitvoeren. | 4 uur |
| 8 Februari | Eindversie inleveren. | n.v.t. |
| Week 7, 8, 9 | Werken aan de presentatie en de demonstratie. | 5 uur |
| Week 10 (carnavalsvakantie) | Presentatie afronden, daarna voorbereiden en oefenen. | 4 uur |
| 13 Maart | Presentatie geven. | 20 min. |
| Week 12, 13 | Schrijven en inleveren van de evaluatie. | 2 uur |

# Bijlage E

# Overige bronvermeldingen

Op een aantal plaatsen is het helaas niet mogelijk geweest om de bronnen direct te vermelden. Hieronder worden deze bronnen vermeld.

### Afbeeldingen

- Afbeelding voorblad: Bewerkt a.d.h.v. [42]
- Figuur 1: [43]
- Figuur 2: [44]
- Figuur 3: Zelf gemaakt met LaTeX
- Figuur 4: Zelf gemaakt met LaTeX
- Figuur 5: Zelf gemaakt met LaTeX
- Figuur 6: Zelf gemaakt met LaTeX
- Figuur 7: Zelf gemaakt met LaTeX
- Figuur 8a: Zelf gemaakt met LaTeX
- Figuur 8b: Zelf gemaakt met LaTeX
- Figuur 8c: Zelf gemaakt met LaTeX
- Figuur 9: [45]
- Figuur 10: [46]
- Figuur 11: Bewerkt a.d.h.v. [47]
- Figuur 12: [48]
- Figuur 13a: [49]
- Figuur 13b: [50]

- Figuur 14a: Bewerkt a.d.h.v. [51]
- Figuur 14b: Bewerkt a.d.h.v. [51]
- Figuur 15: [52]
- Figuur 16: [53]
- Figuur 17: Bewerkt a.d.h.v. [54]
- Figuur 18: [21]
- Figuur 19a: Zelf gemaakt met `https://www.wolframalpha.com`
- Figuur 19b: Zelf gemaakt met `https://www.wolframalpha.com`
- Figuur 20: [55]
- Figuur 21a: [55]
- Figuur 21b: [55]
- Figuur 22: [56]
- Figuur 23: [57]
- Figuur 24: [58]

## Overige

- Quote Einstein (epigraaf): [41]

# Bibliografie


[1] S. Banach en A. Tarski, "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 6, pp. 244–277, 1924. http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm6/fm6127.pdf.

[2] G. Cantor, "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre," *Mathematische Annalen*, vol. 46, no. 4, pp. 481–512, 1895. http://link.springer.com/article/10.1007/BF02124929.

[3] S. A. Terwijn, "Inleiding in de Wiskunde." Radboud Universiteit Nijmegen, 2014. http://www.math.ru.nl/~terwijn/teaching/inlwisk.pdf.

[4] K. Devlin, *The Joy of Sets*. Springer New York, 2 ed., 1993.

[5] P. Halmos, *Naive Set Theory: Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer New York, 1960.

[6] C. C. Pinter, *A Book of Set Theory*. Dover Publications, 2014.

[7] A. Vijn, "Het Keuzeaxioma." Technische Universiteit Delft, 2012. https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:f7641d50-4c21-4aae-a879-154093427007.

[8] E. Zermelo, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I," *Mathematische Annalen*, vol. 65, pp. 261–281, 1908. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_0065.

[9] A. Fraenkel, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 22, pp. 254–273, 1925. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN266833020_0022.

[10] E. Zermelo, "Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann," *Mathematische Annalen*, vol. 59, pp. 514–516, 1904. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_0059.

[11] R. André, "Axioms and Set Theory: A first course in Set Theory." University of Waterloo, 2014. http://www.math.uwaterloo.ca/~randre/1aaset_theory_140613.pdf.

[12] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, 4 ed., 1997.

[13] K. Barnum, "The Axiom of Choice and its implications." University of Chicago, 2013. http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Barnum.pdf.

[14] I. Mulder, "De Banach-Tarski paradox en het keuzeaxioma." Technische Universiteit Delft, 2017. https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3A6cd2640c-51ed-4a3f-8531-5196e0e2d3c6.

[15] A. McFarland, J. McFarland, en J. T. Smith, *On Decomposition of Point Sets into Respectively Congruent Parts (1924)*, pp. 93–123. New York, NY: Springer New York, 2014. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1474-6_6.

[16] R. M. French, "The Banach-Tarski Theorem," *Mathematical Conversations: Selections from The Mathematical Intelligencer*, pp. 166–174, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0195-0_15.

[17] H. Kragh, "The true (?) story of Hilbert's infinite hotel." Aarhus University. https://arxiv.org/abs/1403.0059.

[18] D. Raman, "The Banach Tarski Paradox." University of Cambridge. http://www-control.eng.cam.ac.uk/foswiki/pub/Main/DhruvaRaman/BTEssay.pdf.

[19] A. Wu, "The Banach-Tarski paradox." University of Chicago, 2008. http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Wu.pdf.

[20] J. Milne, "Group Theory," 2013. https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/GT.pdf.

[21] G. Tomkowicz en S. Wagon, *The Banach–Tarski Paradox.* Cambridge University Press, 2 ed., 2016.

[22] T. Tao, "The Banach-Tarski Paradox," 1991. https://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/Expository/banach-tarski.pdf.

[23] T. de Koning, "De Banach-Tarski-Paradox." Universiteit Leiden, 2010. https://www.math.leidenuniv.nl/~streng/bachteus.pdf.

[24] K. Schwede, "Groups Acting On A Set." University of Utah, 2012. https://www.math.utah.edu/~schwede/math435/GroupSetNotes.pdf.

[25] F. E. Su, "The Banach-Tarski Paradox." Harvard University, 1990. https://www.math.hmc.edu/~su/papers.dir/banachtarski.pdf.

[26] T. Weston, "The Banach-Tarski Paradox." University of Massachusetts. https://people.math.umass.edu/~weston/oldpapers/banach.pdf.

[27] J. Neumann, "Zur allgemeinen Theorie des Masses," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 13, no. 1, pp. 73–116, 1929. http://eudml.org/doc/211921.

[28] W. Sierpinski, "Sur le paradoxe de MM. Banach et Tarski," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 33, no. 1, pp. 229–234, 1945. http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm33/fm33124.pdf.

[29] R. Robinson, "On the decomposition of spheres," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 34, no. 1, pp. 246–260, 1947. http://eudml.org/doc/213130.

[30] F. Meyer, "The Banach-Tarski Paradox." University of Oslo, 2010. https://folk.uio.no/fredrme/BanachTarski.pdf.

[31] M. de Podesta, *Understanding the Properties of Matter.* Taylor & Francis, 2002.

[32] S. Braibant, G. Giacomelli, en M. Spurio, *Particles and Fundamental Interactions: An Introduction to Particle Physics.* Undergraduate Lecture Notes in Physics, Springer Netherlands, 2011.

[33] R. Tilley, *Understanding Solids: The Science of Materials.* Wiley, 2005.

[34] B. W. Augenstein, "Hadron Physics and Transfinite Set Theory," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 23, no. 12, pp. 1197–1205, 1984. https://doi.org/10.1007/BF02213427.

[35] R. Machleidt en I. Slaus, "The nucleon-nucleon interaction," *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 27, no. 5, pp. R69–R108, 2001. https://doi.org/10.1088%2F0954-3899%2F27%2F5%2F201.

[36] L. Canetti, M. Drewes, en M. Shaposhnikov, "Matter and antimatter in the universe," *New Journal of Physics*, vol. 14, no. 9, p. 095012, 2012. https://doi.org/10.1088%2F1367-2630%2F14%2F9%2F095012.

[37] CERN, "The matter-antimatter asymmetry problem." Geraadpleegd op 12 Februari 2019, van https://home.cern/science/physics/matter-antimatter-asymmetry-problem.

[38] R. Feynman, "The Feynman Lectures on Physics Vol I," 1970. Geraadpleegd op 12 Februari 2019, van http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_04.html.

[39] K. P. Hart, "De kwadratuur van de cirkel en de Banach-Tarskiparadox," *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vol. 19, no. 4, pp. 291–294, 2018. http://www.nieuwarchief.nl/serie5/toonnummer.php?deel=19&nummer=4.

[40] P. Forrest, "Is Space-Time Discrete or Continuous? An Empirical Question," *Synthese*, vol. 103, no. 3, pp. 327–354, 1995. http://www.jstor.org/stable/20117405.

[41] A. Einstein, "Geometrie und Erfahrung," 1921. https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ABR1192.0001.001/1.

[42] M. C. Escher, "Bolspiralen," 1958. Geraadpleegd op 7 Februari 2019, van https://www.mcescher.nl/galerij/erkenning-succes/bolspiralen/.

[43] Brilliant, "ZFC." Geraadpleegd op 2 Februari 2019, van https://brilliant.org/wiki/zfc/.

[44] G. Lanfranco, "Miracle of the Bread and Fish," tussen 1620 en 1623. Geraadpleegd op 1 Februari 2019, van

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giovanni_Lanfranco_-_Miracle_of_the_Bread_and_Fish_-_WGA12454.jpg.

[45] M. C. Escher, “Tekenenen,” 1948. Geraadpleegd op 3 Februari 2019, van https://www.mcescher.nl/galerij/terug-in-nederland/tekenen/.

[46] XKCD, “Pumpkin Carving.” Geraadpleegd op 2 Februari 2019, van https://xkcd.com/804/.

[47] Wikipedia, “Congruence (geometry),” 2018. Geraadpleegd op 2 Februari 2019, van https://en.wikipedia.org/wiki/Congruence_(geometry).

[48] G. Pellegrini, “Cranberry relish,” 2011. Geraadpleegd op 3 Februari 2019, van http://georgiapellegrini.com/2011/11/07/food-drink/cranberry-relish/.

[49] D. Perrin, “Aires et volumes : d’ecoupage et recollement.” https://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf.

[50] “Di-ssé-quer,” 2008. Geraadpleegd op 5 Februari 2019, van http://eljjdx.canalblog.com/archives/2008/01/05/7444292.html.

[51] A. Kaseorg, “The Banach-Tarski Paradox.” Massachusetts Institute of Technology. http://web.mit.edu/andersk/Public/banach-tarski.pdf.

[52] A. Pires, “Hospitality at the Hilbert Hotel: How Big is infinity?,” 2016. Geraadpleegd op 2 Februari 2019, van https://www.ias.edu/ideas/2016/pires-hilbert-hotel.

[53] A. O. F. Hendrickson, “The Banach-Tarski Paradox.” Concordia College. http://faculty.cord.edu/ahendric/HendricksonBanachTarski.pdf.

[54] Wikimedia, “Cayley,” 2013. Geraadpleegd op 5 Februari 2019, van https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cayley.gif.

[55] R. Levanger, “Imagining the Banach-Tarski Paradox,” 2011. http://rachellevanger.com/math/docs/BT_Paper_Levanger.pdf.

[56] Wikipedia, “Quark,” 2019. Geraadpleegd op 3 Februari 2019, van https://en.wikipedia.org/wiki/Quark.

[57] NASA, “The Crab Nebula,” 2010. Geraadpleegd op 12 Februari 2019, van https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1604.html.

[58] M. C. Escher, “Relativiteit,” 1953. Geraadpleegd op 16 Februari 2019, van https://www.mcescher.nl/galerij/terug-in-nederland/relativiteit/.