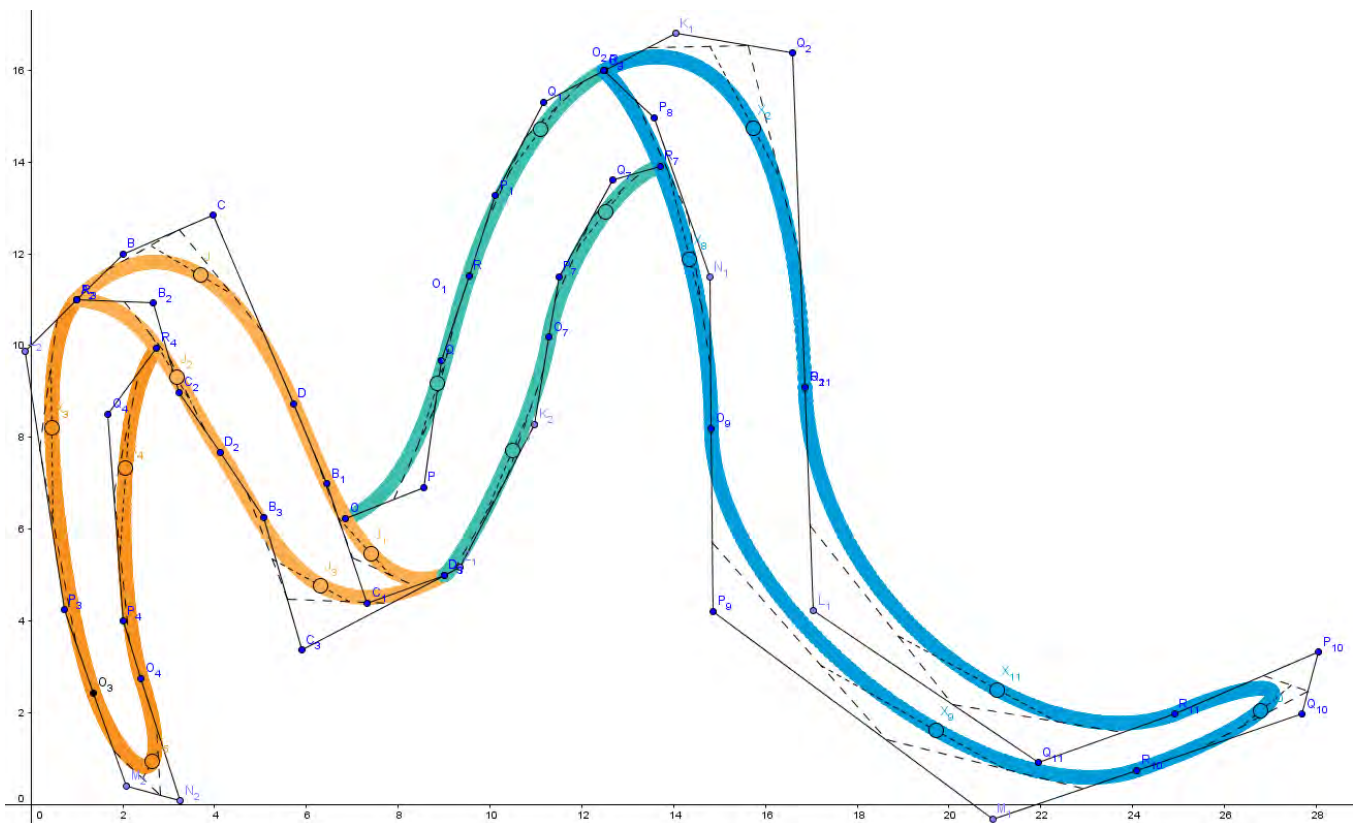


Curves vloeiend aansluiten



3 februari 2019

Sièna van Schaick en Eline Tiemens

6 gymnasium, Minkema College

Begeleider: R. R. M. van den Berg (wiskunde docent)

Inhoudsopgave

1 Inleiding	4
Hoofdvraag	4
2 Theoretisch kader	6
2.1 Wat zijn polynomen?	6
2.1.1 Definitie polynoom	6
2.1.2 Bewerkingen van polynomen	7
2.1.3 Eigenschappen van polynomen	9
2.1.4 Nulpunten	11
2.1.5 Polynomen differentiëren	13
2.1.6 Conclusie deelvraag	17
2.2 Wat is een parameterkromme?	18
2.2.1 Vectoren	18
2.2.2 Parametervoorstelling	21
2.2.3 Snelheidsvector	22
2.2.4 Conclusie deelvraag	22
2.3 Wat is een Béziercurve?	23
2.3.1 Definitie van een Béziercurve	23
2.3.2 De helling van een Béziercurve	30
2.3.3 Soorten Béziercurve	31
2.3.4 Waarvoor worden Béziercurves gebruikt in de praktijk?	33
2.3.5 Conclusie deelvraag	34
2.4 Wanneer sluiten twee curves vloeiend op elkaar aan?	35
2.4.1 Maten van vloeiendheid	35
2.4.2 Twee Béziercurves vloeiend aansluiten	37
2.4.3 Conclusie deelvraag	38
3 Praktisch deel	39
3.1 Minkema logo met het Casteljau algoritme	39
Eén derdegraads Béziercurve maken	40
Gehele logo maken	41
3.2 Bewijs voor het vloeiend aansluiten van twee Béziercurves	44
Formules Béziercurve 1	45
Formules Béziercurve 2	46
Aansluiting Béziercurve 1 en 2	46

4 Conclusie	47
5 Discussie	48
Betrouwbaarheid.....	48
Voor- en nadelen van de onderzoeksmethode	48
Mogelijk vervolgonderzoek	49
6 Bronnenlijst	50
Afbeeldingen	53
Tabellen	54
7 Logboek	55
Reflectie.....	60



1 Inleiding

Wiskunde... niet iedereen zijn lievelingsvak op school. Sommige leerlingen vinden het maar saai en onbegrijpelijk. Echter ongemerkt wordt het overal om je heen gebruikt voor de meest gewone dingen. Heb jij wel eens een animatiefilm gekeken op Netflix? De ontwerp software waarmee deze film is gemaakt zit vol met wiskunde. Zo wil je dat de verschillende lijnen mooi op elkaar aansluiten en de bewegingen vloeiend verlopen. Een veel gebruikt wiskundig object is de Béziercurve. Hiermee worden de mooiste figuren en animaties gemaakt, maar er zijn nog vele andere toepassingen. In dit profielwerkstuk gaan wij in op de wiskunde van de Béziercurve en het vloeiend aansluiten hiervan. Wij hopen dat we met dit profielwerkstuk kunnen laten zien wat voor een gave dingen met wiskunde gemaakt kunnen worden!

Voor ons onderzoek hebben we een aantal hoofd- en deelvragen opgesteld. We zijn begonnen met het bedenken van een onderwerp, en zijn uiteindelijk uitgekomen bij Béziercurves. Hierbij hebben wij vervolgens een passende hoofdvraag bedacht. De deelvragen hebben we opgesteld met als doel op te bouwen naar het beantwoorden van de hoofdvraag. Onze hoofdvraag is: 'Hoe kunnen we een vloeiend aansluitende lijn door punten trekken?' Voor deze vloeiende lijnen gebruiken we Béziercurves, vandaar de deelvraag 'Wat is een Béziercurve?' Om meer over Béziercurves te kunnen weten moeten we eerst kijken wat polynomen en parameterkrommen zijn, aangezien Béziercurves parameterkrommen zijn die bestaan uit polynomen, vandaar de eerste twee deelvragen: 'Wat zijn polynomen?' en 'Wat is een parameterkromme?' Tot slot bekijken we wanneer twee curves vloeiend op elkaar aansluiten, wat we vanzelfsprekend nodig hebben om de hoofdvraag te kunnen beantwoorden. Hieruit volgt de deelvraag 'Wanneer sluiten twee curves vloeiend op elkaar aan?' Onze hoofd en deelvragen zijn dus:

Hoofdvraag

Hoe kunnen we een vloeiend aansluitende lijn door punten trekken?

Deelvragen

1. Wat zijn polynomen?
2. Wat is een parameterkromme?
3. Wat is een Béziercurve?
4. Wanneer sluiten twee curves vloeiend op elkaar aan?

Het antwoord op onze hoofdvraag is niet iets waar nog nooit onderzoek naar is gedaan. Hoe we vloeiende lijnen door punten kunnen trekken is op zich al bekend en wordt ook al toegepast. Het doel van ons onderzoek is vooral om uit te zoeken hoe het in elkaar zit en dit overzichtelijk te presenteren voor mensen van het niveau van ongeveer 6 vwo wiskunde B.

Om onze hoofdvraag te beantwoorden zullen we vooral bronnenonderzoek doen. Daarnaast zullen we proberen ook zelf een aantal dingen af te leiden met onze wiskundige kennis. Op deze manier kunnen we zelf een goed inzicht krijgen van hoe het werkt. Daardoor kunnen we het beter uitleggen aan de lezer aangezien we het zelf beter begrijpen. Bij zoveel mogelijk dingen zullen wij ook een bewijs leveren, zodat het duidelijk is hoe alles precies in elkaar zit.

Naast het bronnenonderzoek gaan wij ook nog een praktisch deel uitvoeren. Hierin zullen wij de uitgezochte theorie toepassen. Wij zullen het logo van onze school gaan maken met Béziercurves en dan deze Béziercurves vloeiend laten aansluiten.

2 Theoretisch kader

2.1 Wat zijn polynomen?

2.1.1 Definitie polynoom

Algemene vorm

Een polynoom, ook wel een veelterm genoemd, is een type functie binnen de wiskunde. In deze functie komen alleen gehele positieve machten van de variabele(n) voor. Vaak slaat een polynoom op een functie die afhankelijk is van slechts één variabele, meestal x . Dit is dan ook wat wij zullen bespreken in deze deelvraag omdat polynomen met meerdere variabelen niet relevant zijn voor onze hoofdvraag. Een polynoom met één variabele kan altijd teruggebracht worden naar de volgende vorm:¹

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Als de polynoom op deze manier geschreven is heet de polynoom lexicografisch geordend. De getallen $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ zijn hier de coëfficiënten van de polynoom. Als een coëfficiënt 0 is bij een bepaalde macht van x , komt deze macht van x gewoon niet voor in de polynoom. De coëfficiënt die voor de hoogste macht van x staat heet de kopcoëfficiënt en mag niet gelijk zijn aan 0. De hoogste macht van x die voorkomt in de polynoom is de zogeheten graad van de polynoom. In het voorbeeld hierboven is de graad van de polynoom dus gelijk aan n . Wanneer een polynoom bestaat uit een alleen een constante en deze dus van de vorm $f(x) = c$ is, is de graad gelijk aan nul. Echter als deze constante zelf gelijk is aan nul, heeft de polynoom geen graad. In Tabel 1 hieronder staan een aantal voorbeelden van polynomen, in de hierboven genoemde vorm met daarbij hun graad, om een beter beeld te schetsen van wat een polynoom precies is.¹

Polynoom	Graad
$5x^2 + 8$	2
$8x^8 - 3x^5 + 3,4x + 105$	8
5,4	0
0	Geen graad
$ax^2 + bx + c$	2 mits $a \neq 0$

Tabel 1 Voorbeelden van polynomen met hun graad

De algemene formule die eerder gegeven was, is niet een handige notatie. Een polynoom is dus een som van machten van x en voor sommaties zoals deze bestaat er een efficiëntere manier om deze te noteren. Dit wordt gedaan met de hoofdletter sigma (Σ), een letter uit het Griekse alfabet. Een sommatie ziet er dan als volgt uit:

$$\sum_{i=m}^n x_i = x_m + x_{m+1} + \dots + x_{n-1} + x_n$$

¹ Markushevich, A. I. (2015, 27 juni). Polynomial. Geraadpleegd op 30 oktober 2018, van <https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Polynomial>

Het getal i is de index. Deze letter kan ook vervangen worden door een andere letter, maar een i of k is gebruikelijk. Het getal m is de ondergrens en n de bovengrens. De getallen m en n zijn gehele getallen. De eerste term is de term waarbij de index de waarde m heeft. Daarna wordt de index voor elke term precies één hoger tot de laatste term waarbij de index gelijk is aan n . Hieronder staan een aantal voorbeelden om aan te geven hoe een sommatie die zo genoteerd is precies werkt.²

$$\sum_{i=3}^8 i = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$$

$$\sum_{i=5}^7 i^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2 = 110$$

$$\sum_{i=45}^{49} 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 45$$

Bij een polynoom is de eerste term van rechts gelijk aan a_0 , wat we ook zouden kunnen schrijven als $a_0 x^0$, aangezien $x^0 = 1$. We negeren hierbij dat x ook gelijk kan zijn aan 0 en dat $0^0 \neq 1$, we stellen dus dat x^0 altijd gelijk is aan 1. Dit doen wij zodat we het compacter kunnen noteren. Wij zullen dit bij alle uitdrukkingen waarbij dit van toepassing is in dit verslag dit ook aannemen. Op deze manier kan je dus elke term schrijven als $a_i x^i$, waarbij i een getal is tussen 0 en de graad van het polynoom of gelijk hieraan. Nu kunnen we dus een polynoom compact als volgt noteren:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i$$

2.1.2 Bewerkingen van polynomen

Net als alle functies kun je polynomen bij elkaar optellen, van elkaar aftrekken en vermenigvuldigen. Verder kun je een polynoom machtsverheffen met een reëel getal, zodat er nog steeds een polynoom uit komt. Hieronder gaan wij verder toelichten hoe dit werkt bij polynomen.

Optellen en aftrekken

Het optellen en aftrekken van polynomen gaat per term. Op de volgende pagina wordt weergegeven op welke manier twee polynomen opgeteld en afgetrokken kunnen worden. Hierbij wordt aangenomen dat de graad n van de linker polynoom groter is dan de graad m van de rechter polynoom. Als dit andersom zou zijn zou er alleen veranderen dat de polynoom als uitkomst graad m heeft in plaats van n . In de sommatie van het rechterlid van de vergelijking staan nog wel b_i , ook voor waarden van i groter dan m die nog niet in de oorspronkelijke polynoom gedefinieerd waren. Deze moeten dan gelijkgesteld worden aan 0.

² Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Sommatie. Geraadpleegd op 12 december 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/Sommatie>

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^m b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i - \sum_{i=0}^m b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i - b_i) x^i$$

Deze formule is echter wel redelijk abstract, terwijl polynomen optellen en aftrekken eigenlijk iets is wat je in de onderbouw van het vwo bij wiskunde al leert. De voorbeelden hieronder schetsen waarschijnlijk een beter beeld van wat er precies gebeurt wanneer je polynomen bij elkaar optelt of van elkaar aftrekt.

$$\begin{aligned} (7x^3 + 4x^2 + x + 8) + (9x^5 + 4x^2 + 5) \\ = (0 + 9)x^5 + (0 + 0)x^4 + (7 + 0)x^3 + (4 + 4)x^2 + (1 + 0)x + (8 + 5)x^0 \\ = 9x^5 + 7x^3 + 8x^2 + x + 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7x^3 + 4x^2 + x + 8) - (9x^5 + 4x^2 + 5) \\ = (0 - 9)x^5 + (0 - 0)x^4 + (7 - 0)x^3 + (4 - 4)x^2 + (1 - 0)x + (8 - 5)x^0 \\ = -9x^5 + 7x^3 + x + 3 \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen

Het vermenigvuldigen van polynomen is ook iets wat je in de onderbouw van het vwo bij wiskunde al leert onder de naam haakjes wegwerken. Bij polynomen vermenigvuldigen doe je namelijk niks anders dan dat. Hieronder staat een voorbeeld om verder te verduidelijken hoe dit precies werkt.

$$\begin{aligned} (2x + 5)(x^2 + x + 3) \\ = 2x^3 + 2x^2 + 6x + 5x^2 + 5x + 15 \\ = 2x^3 + 7x^2 + 11x + 15 \end{aligned}$$

Machtsverheffen

Met machtsverheffen bedoelen we in dit geval het verheffen van een grondtal in de vorm van een polynoom tot een exponent in de vorm van een geheel getal. Dit is eigenlijk gewoon herhaaldelijk vermenigvuldigen en dus veel haakjes wegwerken. Echter geldt er een algemene formule voor het uitwerken van uitdrukkingen van de vorm $(a + b)^n$. Dit heet het binomium van Newton. Hoewel het niet direct heel belangrijk is bij polynomen noemen we het alsnog, omdat het relevant is bij Béziercurves. Op de volgende pagina staat wat het binomium van Newton precies inhoudt.

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

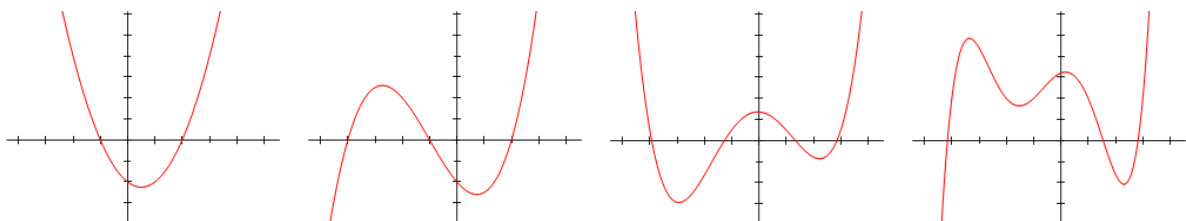
$\binom{n}{i}$ is de notatie van een binomiaalcoëfficiënt en wordt uitgesproken als n boven i . De uitkomst hiervan is hetzelfde als het aantal ongeordende combinaties van i dingen uit n dingen. Zo is $\binom{3}{2}$ gelijk aan 3, omdat als je drie dingen hebt (bijvoorbeeld a , b en c), je hier op 3 manieren 2 dingen uit kan kiezen (a en b , b en c of a en c). In het algemeen geldt dat $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. Daarnaast geldt voor een natuurlijk getal n dat $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. $n!$ wordt uitgesproken als n faculteit. Verder is in de wiskunde afgesproken dat $0! = 1$. Om dit wat concreter inzichtelijk te maken staat hieronder nog een voorbeeld.

$$\begin{aligned} (5 + x)^4 &= \binom{4}{0} 5^0 x^{4-0} + \binom{4}{1} 5^1 x^{4-1} + \binom{4}{2} 5^2 x^{4-2} + \binom{4}{3} 5^3 x^{4-3} + \binom{4}{4} 5^4 x^{4-4} \\ &= x^4 + 20x^3 + 150x^2 + 500x + 625 \end{aligned}$$

2.1.3 Eigenschappen van polynomen

Grafieken bij polynomen

Bij de formules van polynomen kun je grafieken tekenen. De grafieken bij polynomen van een bepaalde graad hebben telkens eigenschappen die horen bij die graad. In Figuur 1 zijn van links naar rechts grafieken van polynomen van graad 2, 3, 4 en 5 afgebeeld. Met betrekking tot onze hoofdvraag zijn vooral de grafische eigenschappen van de grafieken van belang.



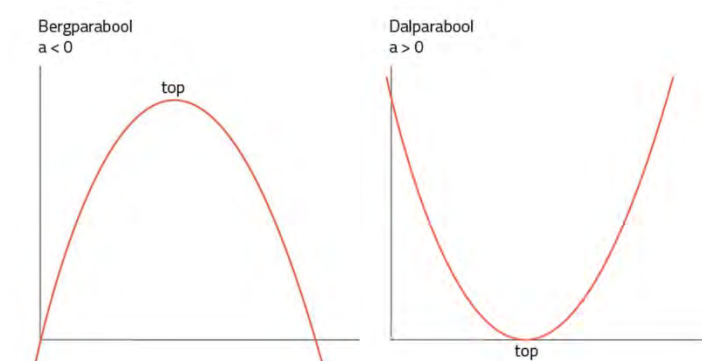
Figuur 1 Functieverloop van polynomen van graad 2 tot en met graad 5 (van links naar rechts)

Grafieken van polynomen van graad 0 en 1

Polynomen van graad 1 hebben als formule $f(x) = ax + b$ en polynomen van graad 0 $f(x) = c$. De grafieken bij deze polynomen zijn rechte lijnen. Bij polynoom van graad 0 is de grafiek een horizontale lijn. De y -waarde is immers gelijk bij elke x -waarde. Bij polynomen van graad 1 is de grafiek een schuine lijn. De helling van deze lijn is gelijk aan a , wat de richtingscoëfficiënt of het hellingsgetal wordt genoemd. De grafiek snijdt de y -as bij $(0, b)$. b heet het startgetal.

Grafieken van polynomen van graad 2

Polynomen van graad 2 hebben als formule $f(x) = ax^2 + bx + c$. De grafiek die hierbij hoort, heet een parabool. Een parabool is lijnsymmetrisch door de verticale lijn die door de top van de grafiek gaat. Bij parabolen zijn twee typen te onderscheiden, bergparabolen en dalparabolen. Bij bergparabolen is de top een maximum en is a negatief. Bij dalparabolen is de top een minimum en is a positief. In Figuur 2 staan voorbeelden van een bergparabool en een dalparabool.



Figuur 2 Grafiek van tweedegraads polynoom (berg- en dalparabool)

Grafieken van polynomen van een hogere graad

Grafieken van polynomen van een hogere graad zijn vaak complexer en hebben meer toppen, zoals ook goed te zien was bij de voorbeelden die in Figuur 1 staan. Een polynoom van graad n kan dan ook altijd maximaal $n - 1$ toppen hebben. Bij een top geldt namelijk dat de afgeleide 0 is en de afgeleide van een polynoom is een graad lager dan de polynoom zelf. Verder heeft een polynoom met graad n maximaal n nulpunten (zie ook 2.1.4). De grafiek van een polynoom met een hogere graad ziet er echter niet altijd complexer uit. Polynomen met de vorm $f(x) = x^n$ zien er bijvoorbeeld zelfs voor een hele hoge n vergelijkbaar uit met x^3 of x^2 .

Gladde functies

Een van de eigenschappen van polynomen is dat alle polynomen zogeheten gladde functies zijn. Dit houdt in dat polynomen oneindig vaak differentieerbaar zijn.³ In 2.1.5 zullen we laten zien hoe polynomen gedifferentieerd kunnen worden. Daaruit volgt ook dat de afgeleide van een polynoom opnieuw een polynoom is en aangezien elke polynoom gedifferentieerd kan worden volgt hieruit dat polynomen inderdaad oneindig vaak differentieerbaar zijn. De naam gladde functie slaat op het feit dat deze functies zeer vloeiend zijn, wat ook goed te zien is in Figuur 1.⁴

³ Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Polynoom. Geraadpleegd op 18 december 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/Polynoom>

⁴ Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Gladde functie. Geraadpleegd op 18 december 2018, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Gladde_functie

2.1.4 Nulpunten

De nulpunten van een polynoom zijn de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$, waarbij $f(x)$ de polynoom is. Dit zijn dus de x -coördinaten waarbij de grafiek van de polynoom de x -as snijdt. Een polynoom van graad n heeft maximaal n nulpunten. Nulpunten zijn een belangrijke eigenschap van een polynoom, omdat ze samen met een constante een polynoom vastleggen.⁵ Bovendien zijn de x -coördinaten van de snijpunten van twee polynomen gelijk aan de nulpunten van het verschil van de polynomen, wat ook een polynoom is. Er geldt dan namelijk $f(x) = g(x)$ dus $f(x) - g(x) = 0$. Weten hoe je nulpunten kunt berekenen is dus belangrijk om vergelijkingen met polynomen op te lossen.

Nulpunten berekenen

Voor het berekenen van de nulpunten moet je dus de oplossingen van $f(x) = 0$ vinden. Polynomen van graad 0, die dus bestaan uit enkel een constante ongelijk aan 0, hebben uiteraard geen nulpunten. Verder heeft het nulpolynoom, die altijd 0 is, alle reële getallen als nulpunt. Voor polynomen van graad 1 met als algemene vorm $ax + b$, waarbij a ongelijk is aan 0, zijn de nulpunten ook gemakkelijk te bepalen. Uit de afleiding hieronder blijkt de algemene formule voor de nulpunten van een polynoom van graad 1 met als coëfficiënten a en b .

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 & (a \neq 0) \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

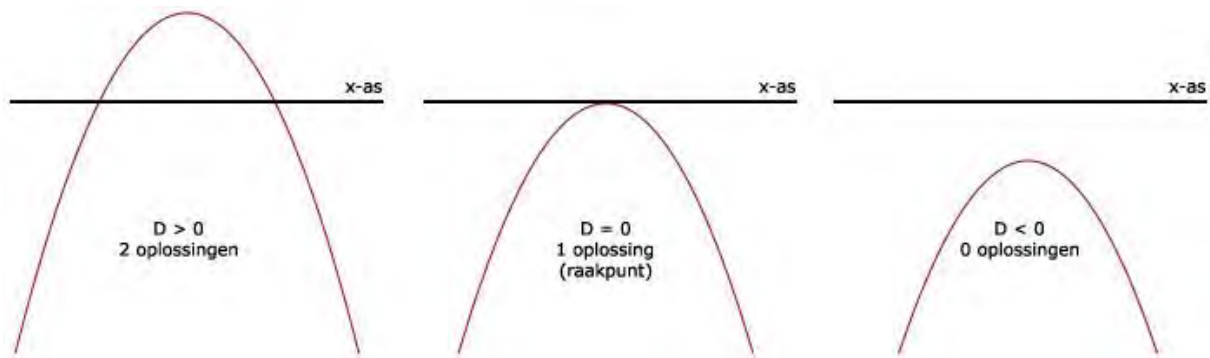
Tweedegraads polynomen

Tweedegraads polynomen kunnen we schrijven als $ax^2 + bx + c$, waarbij a ongelijk is aan 0. De algemene formule voor de nulpunten is bekend als de abc -formule. Deze kunnen we afleiden door kwadraat af te splitsen zoals hieronder te zien is.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 & (a \neq 0) \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

⁵ Nederlandse Wiskunde Olympiade. (z.d.). Polynomen [Handout]. Geraadpleegd op 3 februari 2019.

Het stuk onder de wortel heet hierbij de discriminant en wordt ook wel geschreven als D . Hierbij geldt dus dat $D = b^2 - 4ac$. Uit de formule blijkt dat er twee nulpunten kunnen zijn. Je kunt namelijk de wortel van de discriminant optellen bij de teller of er vanaf trekken. Echter als de wortel uit de discriminant 0 is en de discriminant zelf dus ook, maakt dit geen verschil en is er slechts één oplossing. Als de discriminant negatief is zijn er geen oplossingen, omdat je geen wortel kan trekken uit een negatief getal. Aan de hand van de discriminant kun je dus bepalen hoeveel nulpunten een tweedegraads polynoom heeft, als je de coëfficiënten hiervan weet.



Figuur 3 Parabolen met verschillende discriminanten

Aan de grafiek behorende bij een tweedegraads polynoom kun je ook snel zien hoeveel nulpunten deze heeft, zoals je ook in Figuur 3 hierboven kunt zien. Als deze geheel boven of juist geheel onder de x -as ligt, heeft deze geen nulpunten. Als de grafiek raakt aan de x -as heeft de polynoom 1 nulpunt en als de grafiek twee snijpunten heeft met de x -as, heeft de polynoom 2 nulpunten.

Polynomen van een hogere graad

Een algemene formule voor de nulpunten van een derdegraads polynoom is gelijk een stuk ingewikkelder dan die van een tweedegraads polynoom. Zo was de abc -formule al eerder bekend dan de stelling van Pythagoras, maar is een algemene formule voor de nulpunten van een derdegraads polynoom pas gevonden in de Renaissance en dit werd gezien als een enorme doorbraak. De formule zelf is behoorlijk ingewikkeld en zullen we hier ook niet afleiden.⁶ Ook een algemene formule voor de nulpunten van een vierdegraadsvergelijking bestaat en deze is gevonden kort na die voor de nulpunten van een derdegraads polynoom. Ook deze bestaat uit een hele hoop bewerkingen. Hierna kwam natuurlijk de vraag of er algemene formules bestonden voor polynomen van een nog hogere graad. Echter later is bewezen dat dergelijke formules niet bestaan.⁷

⁶ Knaust, H. (z.d.). The "Cubic Formula". Geraadpleegd op 19 december 2018, van <http://www.sosmath.com/algebra/factor/fac11/fac11.html>

⁷ Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Vierdegraadsvergelijking. Geraadpleegd op 19 december 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/Vierdegraadsvergelijking>

2.1.5 Polynomen differentiëren

De gemiddelde helling tussen twee punten kun je berekenen met $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Hierbij bereken je in feite gewoon de richtingscoëfficiënt van de lijn door de twee punten waartussen je de gemiddelde helling wilt berekenen. Als je in de formule hierboven Δx naar 0 laat naderen kan je de exacte helling in het punt x berekenen. Oftewel $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \right)$. Met deze formule kunnen we de differentieerregels voor het differentiëren van polynomen afleiden.

Er zijn een aantal simpele algemene regels die we even snel zullen aantonen met deze formule.⁸

Als $g(x) = c \cdot f(x)$ dan $g'(x) = c \cdot f'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{c(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} \right) \\ &= c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \\ &= c \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Als $g(x) = f(x) + h(x)$ dan $g'(x) = f'(x) + h'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) + h(x + \Delta x) - f(x) - h(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right) \\ &= f'(x) + h'(x) \end{aligned}$$

Als $g(x) = f(x) + c$ dan $g'(x) = f'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) + c - f(x) - c}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

⁸ [minicursus] differentiëren. (2005, 21 februari). Geraadpleegd op 17 december 2018, van <https://www.wetenschapsforum.nl/index.php/topic/6783-minicursus-differentieren/>

x^n -differentiëren

Aangezien we nu weten dat

- als $g(x) = c \cdot f(x)$ dan $g'(x) = c \cdot f'(x)$
- als $g(x) = f(x) + h(x)$ dan $g'(x) = f'(x) + h'(x)$
- als $g(x) = f(x) + c$ dan $g'(x) = f'(x)$

hoeven we alleen nog te bepalen hoe we x^n kunnen differentiëren, waarbij n een natuurlijk getal is (1,2,3,...) (de afleiding hieronder werkt overigens voor alle reële getallen ongelijk aan 0, maar bij polynomen komen we alleen natuurlijke getallen tegen). Dan kunnen we namelijk alle polynomen in hun standaard vorm te kunnen differentiëren, want we kunnen de polynoom per term differentiëren volgens de tweede regel en als we weten hoe we x^n kunnen differentiëren weten we ook hoe we cx^n kunnen differentiëren met behulp van de eerste regel die we net hadden gevonden. Verder weten we met de derde regel dat we de constante aan het eind kunnen weglaten. Om van x^n de afgeleide te vinden vullen we $f(x) = x^n$ in in $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$, zoals je ziet bij (3) in de afleiding hieronder. Vervolgens gebruiken we het binomium van Newton om $(x + \Delta x)^n$ uit te schrijven en halen we $\frac{1}{\Delta x}$ buiten haakjes, zoals te zien is bij (4). De term binnen de sommatie waarbij $k = 0$ is gelijk aan x^n . Aangezien er later x^n vanaf wordt gehaald, kunnen we dus de sommatie laten beginnen bij $k = 1$ en $-x^n$ weghalen, zodat we (5) krijgen. Vervolgens schrijven we de term voor $k = 1$ buiten de sommatie en vermenigvuldigen we alles met $\frac{1}{\Delta x}$. Bij de term die we net uit de sommatie hebben gehaald houden we $\binom{n}{1} \cdot x^{n-1}$ over. Voor alle termen binnen de sommatie vermindert de macht van Δx met 1. Echter voor elke term binnen de sommatie heeft Δx nog steeds minstens een macht van 1. Als Δx naar 0 nadert wordt deze hele sommatie dus 0. Nu zien we dat $f'(x) = \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} = nx^{n-1}$.⁹

$$f(x) = x^n \quad (1)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \quad (2)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \right) \quad (3)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \left(\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k \right) - x^n \right) \right) \quad (4)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \left(\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k \right) \right) \right) \quad (5)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \sum_{k=2}^n \left(\binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^{k-1} \right) \right) \quad (6)$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} \quad (7)$$

$$= nx^{n-1} \quad (8)$$

⁹ [minicursus] differentiëren. (2005, 21 februari). Geraadpleegd op 17 december 2018, van <https://www.wetenschapsforum.nl/index.php/topic/6783-minicursus-differentieren/>

Polynomen kom je niet altijd tegen in hun standaard vorm. Daarom kunnen ook de productregel en kettingregel handig zijn bij het differentiëren van polynomen. Wat deze inhouden en de afleiding hiervan wordt in de volgende twee subparagrafen besproken.

Productregel

De productregel gebruik je bij functies die geschreven zijn als product van twee functies. Dus functies van de vorm $g(x) = f(x) \cdot h(x)$. In het geval van polynomen zouden ook vaak gewoon haakjes weggewerkt kunnen worden, zodat het gedifferentieerd kan worden zonder de productregel. Het is echter vaak efficiënter om wel de productregel te gebruiken. Bij functies die te schrijven zijn als het product van drie of meer functies is de productregel ook toe te passen. Deze pas je dan gewoon meerdere malen toe.

Om de productregel af te leiden, nemen we weer de algemene formule voor het bepalen van de afgeleide en substitueren er $g(x) = f(x) \cdot h(x)$ in, zoals in de afleiding hieronder bij (2) is gedaan. Vervolgens voegen we bij (3) aan de teller $-f(x + \Delta x) \cdot h(x) + f(x + \Delta x) \cdot h(x)$ toe. Dit is namelijk gelijk aan 0 dus dat mag. Op deze manier kunnen we straks de formule goed afleiden. We splitsen hiervoor de breuk in twee termen zoals bij (4). Vervolgens halen we in de eerste term $f(x + \Delta x)$ buiten haakjes en in de tweede term $h(x)$. Als Δx nu naar 0 nadert, nadert in de eerste term $f(x + \Delta x)$ naar $f(x)$ en $\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$ naar $h'(x)$. In de tweede term nadert $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ naar $f'(x)$. Er geldt dus dat $g'(x) = f(x)h'(x) + h(x)f'(x)$.¹⁰

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \quad (1)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)h(x + \Delta x) - f(x)h(x)}{\Delta x} \right) \quad (2)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)h(x + \Delta x) - f(x)h(x) - f(x + \Delta x)h(x) + f(x + \Delta x)h(x)}{\Delta x} \right) \quad (3)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)h(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)h(x)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x)h(x) - f(x)h(x)}{\Delta x} \right) \quad (4)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f(x + \Delta x) \cdot \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} + h(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \quad (5)$$

$$= f(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot f'(x) \quad (6)$$

¹⁰ [minicursus] differentiëren. (2005, 21 februari). Geraadpleegd op 17 december 2018, van <https://www.wetenschapsforum.nl/index.php/topic/6783-minicursus-differentieren/>

Kettingregel

Naast de productregel is de kettingregel een belangrijke algemene differentieerregel. Hiermee kun je functies van de vorm $g(x) = f(h(x))$ differentiëren. Bij polynomen kan deze vaak gebruikt worden wanneer er een polynoom tot een reële macht staat waarbij de haakjes niet makkelijk uit te werken zijn.

Net zoals bij de productregel nemen we weer de algemene formule voor een afgeleide en vervangen in dit geval $g(x)$ door $f(h(x))$. Voor het bewijzen van de kettingregel maken we gebruik van achtereenvolgens twee substituties. Als eerste

$$\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} - h'(x) = v$$

Het eerste deel hiervan is de algemene formule voor de afgeleide van $h(x)$, wanneer Δx naar 0 nadert. v nadert dus ook naar 0 als Δx naar 0 nadert. We schrijven dit om naar

$$h(x + \Delta x) = h(x) + \Delta x(h'(x) + v)$$

zodat we dit kunnen substitueren in de formule.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(h(x + \Delta x)) - f(h(x))}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(h(x) + \Delta x(h'(x) + v)) - f(h(x))}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

Voor de tweede substitutie stellen we een vergelijkbare vergelijking op aan de vergelijking van de eerste substitutie.

$$\frac{f(y + k) - f(y)}{\Delta x} - f'(y) = w$$

Hierbij kan y alles zijn en kiezen we k straks zo dat k naar 0 nadert als Δx naar 0 nadert, zodat w ook naar 0 nadert. We schrijven dit om naar

$$f(y + k) = f(y) + k(f'(y) + w)$$

We substitueren het stuk $f(h(x) + \Delta x(h'(x) + v))$ dat we hadden verkregen in de vergelijking bij de eerste substitutie door te nemen dat $h(x) = y$ en $\Delta x(h'(x) + v) = k$. $(h'(x) + v)\Delta x$ nadert namelijk ook naar 0 als Δx naar 0 nadert. Dan krijgen we de volgende vergelijking.

$$f(h(x) + \Delta x(h'(x) + v)) = f(h(x)) + \Delta x(h'(x) + v)(f'(h(x)) + w)$$

Dus

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(h(x) + \Delta x(h'(x) + v)) - f(h(x))}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(h(x)) + \Delta x(h'(x) + v)(f'(h(x)) + w) - f(h(x))}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

De $f(h(x))$ en $-f(h(x))$ kunnen tegen elkaar weggestreept worden en bij het deel dat dan overblijft kan Δx weg gedeeld worden. Zo houden we de volgende vergelijking over.

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(h(x)) + w)(h'(x) + v)$$

Als Δx naar 0 nadert, naderen v en w ook naar 0 en door die weg te strepen vinden we de kettingregel:¹¹

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(h(x)) + w)(h'(x) + v) = f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

2.1.6 Conclusie deelvraag

Polynomen zijn een type functie in de wiskunde en zijn van de vorm $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. n heet hierbij de graad van de polynoom. Door polynomen bij elkaar op te tellen, van elkaar af te trekken of te vermenigvuldigen ontstaat er opnieuw een polynoom. Een polynoom tot een gehele macht, kan soms met het binomium van Newton uitgewerkt worden. Polynomen zijn gladde functies, waardoor de grafieken bij polynomen er heel vloeiend uitzien. Verder houdt dat in dat ze oneindig vaak differentieerbaar zijn, wat te verklaren is met het feit dat elke polynoom gedifferentieerd kan worden en de afgeleide van een polynoom altijd weer een polynoom is. Soms kan ook de kettingregel of de productregel gebruikt worden om een polynoom te differentiëren.

¹¹ [minicursus] differentiëren. (2005, 21 februari). Geraadpleegd op 17 december 2018, van <https://www.wetenschapsforum.nl/index.php/topic/6783-minicursus-differentieren/>

2.2 Wat is een parameterkromme?

Voor het beschrijven van een parameterkromme is het interessant om eerst naar het gebruik van vectoren te kijken. Deze kunnen namelijk worden gebruikt bij het beschrijven van een parameterkromme.

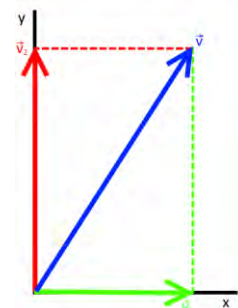
2.2.1 Vectoren

Het begrip vector is oorspronkelijk bedoeld om over grootheden te kunnen spreken die naast een grootte ook een richting hebben. Vectoren worden gebruikt in het platte vlak en in de driedimensionale ruimte.

Onder een vector verstaan we een pijl in het vlak of in de ruimte met een zekere richting en grootte. Een representant van een vector is een vector die is verschoven ten opzichte van de oorspronkelijke vector, maar die wel dezelfde richting en grootte heeft. Doordat je hiermee een vector op verschillende plekken in het vlak kan tekenen kun je ook gaan rekenen met vectoren wat later in deze paragraaf aan bod komt.

Een vector wordt ofwel weergegeven met een vetgedrukte letter, bijvoorbeeld **P** danwel als een letter met een pijltje erboven, zoals $\vec{p}$. Hiertussen is in wiskundige betekenis geen verschil. De lengte van de vector wordt aangegeven met $|\mathbf{P}|$ of $|\vec{p}|$. Een vector kan men tekenen als een pijl. Deze pijl begint bij zijn aangrijpingspunt. Een vector die in de oorsprong begint wordt ook wel een plaatsvector genoemd.¹² Een verplaatsing van A naar B kun je weergeven met de vector $\overrightarrow{AB}$. Wanneer A en B de eindpunten van de plaatsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn, geldt $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.¹³

In een assenstelsel kun je vectoren beschrijven met behulp van kentallen. Bij de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ zijn v_1 en v_2 de kentallen van die vector. Je kunt de vector ontbinden in een component evenwijdig aan de x -as ($\vec{v}_1$) en een component evenwijdig aan de y -as ($\vec{v}_2$). Zoals te zien in Figuur 4. De lengte van vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ is $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ wat volgt uit de stelling van Pythagoras.¹³



Figuur 4 Ontbonden vector

Rekenregels voor vectoren

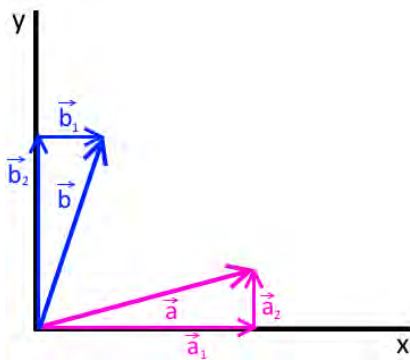
Met vectoren kunnen bewerkingen worden uitgevoerd. Er zijn verschillende rekenregels voor het rekenen met vectoren. Deze gaan we hieronder verder toelichten.

¹² Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Vector (wiskunde). Geraadpleegd op 30 oktober 2018, van [https://nl.wikipedia.org/wiki/Vector_\(wiskunde\)](https://nl.wikipedia.org/wiki/Vector_(wiskunde))

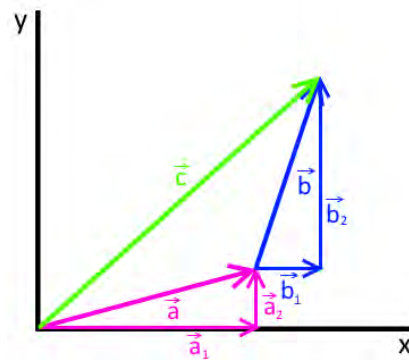
¹³ Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Doekes, W., Van den Reek, K., Reijenga, R., . . . Wallien, C. (2017). Moderne wiskunde (11e ed.). Groningen, Nederland: Noordhoff Uitgevers.

Vectoren optellen

Stel vector $\vec{c}$ is het resultaat van de optelling van vector $\vec{a}$ bij vector $\vec{b}$. Er geldt dus: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Hierbij wordt de vector $\vec{c}$ ook wel de somvector genoemd. De somvector kan worden verkregen door het meetkundig optellen van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Dit doet men door de vector $\vec{b}$ naar het eindpunt van vector $\vec{a}$ te schuiven. Als men het aangrijpingspunt van vector $\vec{a}$ verbindt met het eindpunt van vector $\vec{b}$, krijgt men de somvector van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, zie Figuur 6.¹⁴



Figuur 5 Assenstelsel met de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$



Figuur 6 Assenstelsel waarbij de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ opgeteld zijn tot vector $\vec{c}$

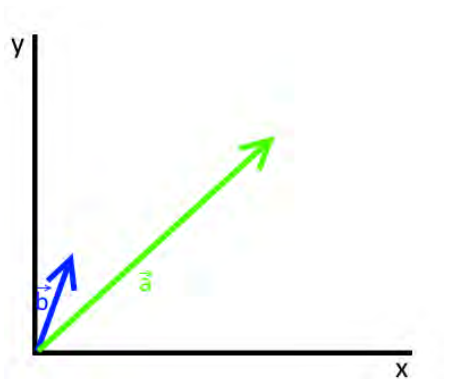
Naast het meetkundig bepalen van de somvector kan dit ook met behulp van de kentallen. Men telt dan de kentallen van de vectoren die men wil optellen bij elkaar op. Bijvoorbeeld wanneer de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ wordt opgeteld bij de vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Het resultaat is de somvector $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$.¹⁵

Het verschil van vectoren

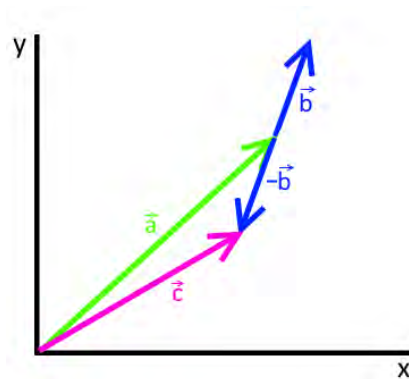
Stel vector $\vec{c}$ is het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Er geldt dan: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. Hierbij wordt de vector $\vec{c}$ ook wel de verschilvector genoemd. Meetkundig kan men de verschilvector bepalen door eerst de vector $\vec{b}$ naar het eindpunt van vector $\vec{a}$ te schuiven. Aangezien het gaat om het aftrekken van vectoren moet men nu de tegenovergestelde van $\vec{b}$ bepalen en daarna het aangrijpingspunt van $\vec{a}$ verbinden met het eindpunt van $-\vec{b}$.¹⁴ De tegenovergestelde van een vector heeft dezelfde lengte als de oorspronkelijke vector en het aangrijpingspunt blijft ook gelijk. Daarnaast zijn de richtingscoëfficiënten van de vector in absolute waarde gelijk, maar is de richting tegengesteld, doordat er bij de tegenovergestelde vector een - teken voor komt. In Figuur 8 is dit te zien.

¹⁴ Boschman, B. (z.d.). Vectoren. Geraadpleegd op 13 november 2018, van <http://www.megawetenschap.nl/vector.html>

¹⁵ Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Doekes, W., Van den Reek, K., Reijenga, R., . . . Wallien, C. (2017). Moderne wiskunde (11e ed.). Groningen, Nederland: Noordhoff Uitgevers.



Figuur 7 Assenstelsel met de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$



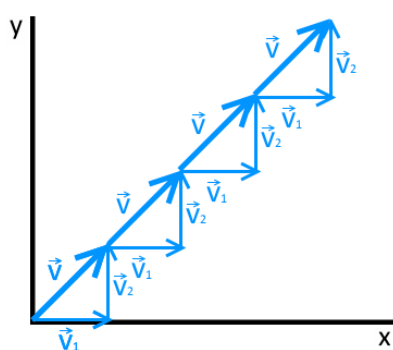
Figuur 8 Assenstelsel waarbij het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is genomen en dit heeft geresulteerd in vector $\vec{c}$

Naast het meetkundig bepalen van de verschilvector kan dit ook met behulp van de kentallen. Men trekt dan de kentallen van de vectoren die men wil aftrekken van elkaar af. Bijvoorbeeld wanneer vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wordt afgetrokken van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Het resultaat is de verschilvector $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$.¹⁶

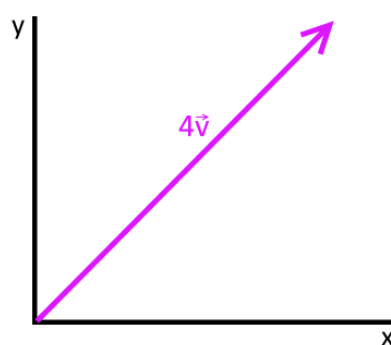
Vermenigvuldigen van een vector met een getal

Als je een vector met een getal vermenigvuldigt schaal je de vector. Daarom worden dit ook wel scalaire vermenigvuldigingen genoemd. Je kunt je dit ook voorstellen als het herhaald optellen van een vector. Een vector $\vec{v}$ vermenigvuldigd met een getal n geeft de vector $n\vec{v}$.

Als men de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ vermenigvuldigt met een getal n dan krijg je: $n \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot v_1 \\ n \cdot v_2 \end{pmatrix}$.¹⁷ Het getal n wordt ook wel de scalar genoemd en wordt gebruikelijk aangegeven met een Griekse letter. De scalar wordt altijd voor de vector gezet. Voor elke vector $\vec{v}$ geldt $0 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en ook $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$.



Figuur 9 Assenstelsel met 4 keer de vector $\vec{v}$ achter elkaar



Figuur 10 Assenstelsel met de vector $4\vec{v}$

¹⁶ Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Doekes, W., Van den Reek, K., Reijenga, R., . . . Wallien, C. (2017). Moderne wiskunde (11e ed.). Groningen, Nederland: Noordhoff Uitgevers.

¹⁷ Boschman, B. (z.d.). Vectoren. Geraadpleegd op 13 november 2018, van <http://www.megawetenschap.nl/vector.html>

Vectoren in 3D

In de bovenstaande uitleg zijn we steeds uitgegaan van een vector met twee kentallen. Een vector met twee kentallen beschrijft altijd een pijl in het platte vlak (2D). Bij een vector met drie kentallen gaat het over een pijl in de driedimensionale ruimte (3D). De rekenregels voor de vectoren veranderen niet, alleen heeft elke vector een extra kental.

2.2.2 Parametervoorstelling

Een parametervoorstelling legt de positie van een punt P vast met behulp van een hulpvariabele of parameter. Als die parameter de tijd is, spreek je ook wel over de bewegingsvergelijking van P . De bijbehorende grafiek is de baan van P en wordt een parameterkromme genoemd.¹⁸

In de parametervoorstelling of vectorvoorstelling van de rechte lijn $l: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}$ wordt $\vec{v}$ de richtingsvector genoemd, $\vec{a}$ de steunvector en λ de parameter. De richtingsvector mag worden vereenvoudigd door beide kentallen te delen door eenzelfde constante tot je de kleinst mogelijke gehele getallen hebt bereikt.¹⁸

Een parameterkromme / bewegingsvergelijking kun je op 3 manieren noteren:¹⁸

- Als vectorvoorstelling: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t^2 \\ 4t \end{pmatrix}$
- Als stelsel vergelijkingen: $\begin{cases} x(t) = 4t^2 \\ y(t) = 4t \end{cases}$
- Met twee losse vergelijkingen: $x(t) = 4t^2$ en $y(t) = 4t$

Snijpunten met assen

Bij een polynoom kun je het snijpunt met de x -as berekenen door y gelijk te stellen aan 0 en het snijpunt met de y -as berekenen door x gelijk te stellen aan 0. Dit kan men ook toepassen bij het berekenen van de snijpunten met de assen van een parametervoorstelling. Men kan de vergelijking van $x(t)$ gelijkstellen aan 0 om het snijpunt van de parameterkromme met de y -as te berekenen en de vergelijking van $y(t)$ gelijkstellen aan 0 om het snijpunt van de parameterkromme met de x -as te berekenen.

Afgeleide van een parametervoorstelling

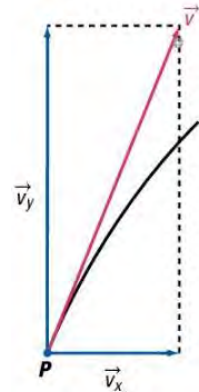
Van een functie $f(x)$ is de afgeleide $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Als we nu de afgeleide van een parametervoorstelling willen berekenen is de vraag wat $\frac{dy}{dx}$ is. Op dezelfde manier als $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ geldt voor $x(t)$ dat $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ en voor $y(t)$ dat $y'(t) = \frac{dy}{dt}$. Hieruit volgt dat $dx = x'(t) \cdot dt$ en $dy = y'(t) \cdot dt$. Daaruit volgt weer

¹⁸ Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Doekes, W., Van den Reek, K., Reijenga, R., . . . Wallien, C. (2017). Moderne wiskunde (11e ed.). Groningen, Nederland: Noordhoff Uitgevers.

dat $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t) \cdot dt}{x'(t) \cdot dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. De afgeleide van de parametervoorstelling $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ is dus $\frac{y'(t)}{x'(t)}$. Als $x'(t) = 0$ dan is $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ niet gedefinieerd. De helling van de parametervoorstelling is dan verticaal.¹⁹

2.2.3 Snelheidsvector

Wanneer een punt P op de parameterkromme $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ligt dan zijn de coördinaten van dit punt $(x(t), y(t))$. Als t de tijd is, dan is de snelheidsvector een vector $\vec{v}$ met beginpunt P . De snelheidsvector ligt op de lijn die in P raakt aan de parameterkromme. De verplaatsingsvector van P is de verplaatsing bij een kleine Δt , deze is dan gelijk aan $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$. De gemiddelde verplaatsing per tijdseenheid is dan de vector $\frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$. Er geldt $\frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix}$ en $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Voor de snelheidsvector geldt dus $\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. De lengte van de snelheidsvector is dus $|\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.²⁰



Figuur 11
Snelheidsvector

2.2.4 Conclusie deelvraag

Een parameterkromme is de baan van een punt P afhankelijk van een bepaalde parameter, bijvoorbeeld de tijd t . Een parametervoorstelling legt de positie van het punt P vast met behulp van een hulpvariabele of parameter. De afgeleide van de parametervoorstelling $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ is $\frac{y'(t)}{x'(t)}$. Je kunt een parametervoorstelling op 3 verschillende manieren noteren, waaronder met behulp van vectoren. Onder een vector verstaan we een pijl in het vlak of in de ruimte met een zekere richting en grootte. In een assenstelsel kun je vectoren beschrijven met behulp van kentallen. Bij de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ zijn v_1 en v_2 de kentallen van die vector. Je kunt de vector ontbinden in een component evenwijdig aan de x -as ($\vec{v}_1$) en een component evenwijdig aan de y -as ($\vec{v}_2$). Er zijn verschillende bewerkingen die met vectoren kunnen worden uitgevoerd zoals vectoren optellen, aftrekken of een vector vermenigvuldigen met een getal.

¹⁹ Hofstede, H. (z.d.). Helling parameterkromme. Geraadpleegd op 27 november 2018, van <https://www.hhofstede.nl/modules/hellingparameter.htm>

²⁰ Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Doekes, W., Van den Reek, K., Reijenga, R., . . . Wallien, C. (2017). Moderne wiskunde (11e ed.). Groningen, Nederland: Noordhoff Uitgevers.

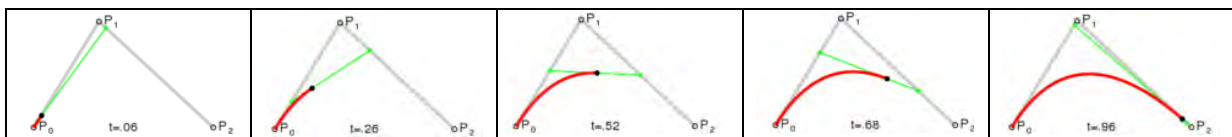
2.3 Wat is een Béziercurve?

2.3.1 Definitie van een Béziercurve

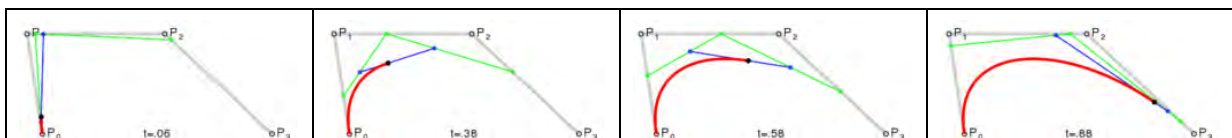
Een Béziercurve is een curve die gebruikt kan worden om een vloeiende lijn tussen twee punten te maken. Vandaar dat we om onze hoofdvraag te beantwoorden deze curves gebruiken.

Het Casteljau algoritme

Een Béziercurve is een curve die wordt vastgelegd door een aantal zogeheten controlepunten. Het is een parameterkromme, waarbij de parameter t loopt van 0 tot 1. Er lopen eenparig met t punten tussen de controlepunten (van de eerste naar de tweede, van de tweede naar de derde, etc.). Tussen deze punten lopen ook weer lijnen, waarover punten lopen op dezelfde manier. Zo kun je telkens lijnen en punten maken, tot je één lijn over hebt, waarover één punt loopt. De baan die dit punt maakt van $t = 0$ tot $t = 1$, is de Béziercurve. Het op deze manier construeren van een Béziercurve heet het Casteljau algoritme.²¹ Wat er precies gebeurt is veel makkelijker weer te geven met een afbeelding. In Tabel 2 en Tabel 3 staan een Béziercurve met 3 controlepunten en een Béziercurve met 4 controlepunten.



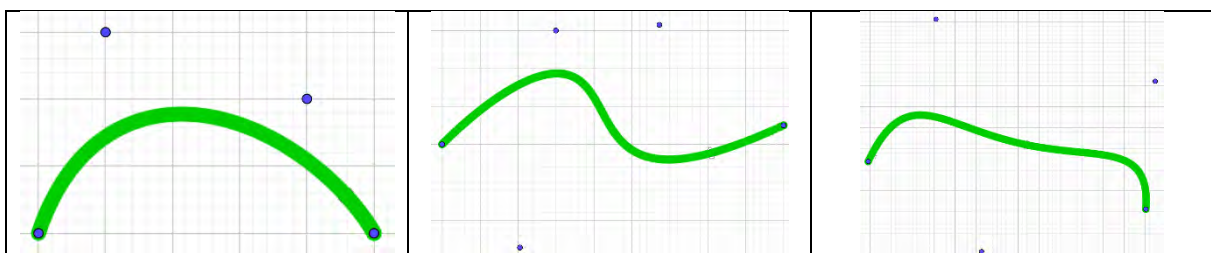
Tabel 2 Animatie van een kwadratische Béziercurve, $0 \leq t \leq 1$



Tabel 3 Animatie van een derdegraads Béziercurve, $0 \leq t \leq 1$

Net als polynomen hebben Béziercurves een graad. Uit de formule van een Béziercurve die straks gegeven wordt blijkt ook dat de graad van een Béziercurve sterk te maken heeft met de graad van een polynoom. De graad van een Béziercurve is het aantal controlepunten min één.

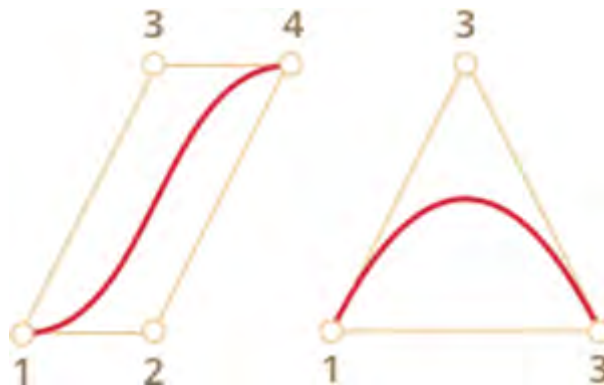
Hieronder staan nog een aantal afbeeldingen van Béziercurves om een beter beeld te geven van hoe Béziercurves eruitzien.



Figuur 12 Voorbeelden van verschillende Béziercurves

²¹ Kantor, I. (z.d.). Bezier curve. Geraadpleegd op 27 januari 2019, van <https://javascript.info/bezier-curve>

Er geldt altijd dat een Béziercurve volledig binnen de veelhoek ligt, waarvan de controlepunten de hoekpunten zijn.²²



Figuur 13 Voorbeeld van Béziercurves met de controlepunten verbonden tot een veelhoek

De afleiding van de formule van een Béziercurve van de eerste en tweede graad

Op basis van hoe wij een Béziercurve kunnen construeren met behulp van het Casteljau algoritme kunnen wij formules opstellen van Béziercurves van de eerste en tweede graad.

De formule van een Béziercurve van de eerste graad

Een Béziercurve van graad 1 heeft twee controlepunten. De controlepunten kunnen we schrijven als de plaatsvectoren P_0 en P_1 . De vector van P_0 naar P_1 is dan:

$$P_1 - P_0$$

Het punt dat van P_0 naar P_1 loopt van $t = 0$ tot $t = 1$ is de Béziercurve. Deze begint bij het eerste controlepunt dus bij P_0 . Daarbij tel je dan vervolgens een deel van $P_1 - P_0$ bij op, afhankelijk van t . Bij $t = 0$ tel je bijvoorbeeld de vector er helemaal niet bij op, bij $t = 0,5$ tel je de helft erbij op en bij $t = 1$ tel je de vector er volledig bij op. Er geldt dus

$$\begin{aligned} B(t) &= P_0 + t(P_1 - P_0) \\ &= P_0 + tP_1 - tP_0 \\ &= (1 - t)P_0 + tP_1 \end{aligned}$$

De formule van een Béziercurve van de tweede graad

Een Béziercurve van graad 2 heeft drie controlepunten. De controlepunten kunnen we weer schrijven als de plaatsvectoren P_0 , P_1 en P_2 . Tussen P_0 en P_1 loopt een punt, zoals een eerstegraads Béziercurve en op dezelfde manier loopt er een punt tussen P_1 en P_2 . De plaatsvectoren behorende bij de punten die tussen P_0 en P_1 en P_1 en P_2 lopen zijn dus $(1 - t)P_0 + tP_1$ en $(1 - t)P_1 + tP_2$.

²² Kantor, I. (z.d.). Bezier curve. Geraadpleegd op 27 januari 2019, van <https://javascript.info/bezier-curve>

De vector die tussen deze punten loopt is $((1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2) - ((1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1)$. Het punt dat van $(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1$ naar $(1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2$ loopt van $t = 0$ tot $t = 1$ is de Béziercurve. Op dezelfde manier als bij de afleiding van de formule van een Béziercurve van graad één geldt dus dat:

$$\begin{aligned}
 B(t) &= (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 + t((1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2 - ((1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1)) \\
 &= (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 + t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2 - t(1-t)\mathbf{P}_0 - t^2\mathbf{P}_1 \\
 &= ((1-t) - t(1-t))\mathbf{P}_0 + (t + t(1-t) - t^2)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2 \\
 &= ((1-t)(1-t))\mathbf{P}_0 + (2t - 2t^2)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2 \\
 &= (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2(1-t)t\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2
 \end{aligned}$$

De algemene formule van een Béziercurve

We hebben nu een formule van een Béziercurve afgeleid voor graad 1 en graad 2. Op dezelfde manier kunnen ook de formules van Béziercurves van een hogere graad afleiden. Dit is echter vanzelfsprekend behoorlijk veel werk, omdat je steeds ingewikkeldere uitdrukkingen krijgt met t , $1-t$ en de controlepunten. Er is echter wel een patroon te vinden in de formules die je krijgt en hieruit is ook een algemene formule af te leiden voor een Béziercurve van graad n . De algemene formule voor een Béziercurve is:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i$$

$B(t)$	B is een functie van t , waarbij $0 \leq t \leq 1$. Aangezien er in de formule zelf telkens de vector $\mathbf{P}_i$ staat, komt er ook een vector uit. Dit is de plaatsvector behorende bij het punt dat op de Béziercurve ligt bij de bijbehorende waarde voor t .
$\sum_{i=0}^n$	Σ representeert de optellingen van de $n + 1$ termen. De Béziercurve bestaat dus uit een aantal termen, elk voor één van de controlepunten. n is gelijk aan de graad van de Béziercurve. De graad is immers gelijk aan het aantal controlepunten min één.
$\binom{n}{i}$	Dit zijn binomiaalcoëfficiënten die we ook terugzagen bij het binomium van Newton. Er geldt: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$
$\mathbf{P}_i$	$\mathbf{P}_i$ is de plaatsvector van de oorsprong naar het i -de controlepunt.
$(1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$	Dit deel bepaalt hoeveel een bepaald controlepunt ‘meeweegt’ bij een bepaalde waarde van t. De term met $\mathbf{P}_0$ is bijvoorbeeld $(1-t)^n \mathbf{P}_0$. Bij $t = 0$ weegt deze dus volledig mee. De Béziercurve is bij $t = 0$ ook gelijk aan $\mathbf{P}_0$. Bij $t = 1$ is $1-t$ gelijk aan 0 dus weegt $\mathbf{P}_0$ helemaal niet meer mee. Er komen alleen gehele machten van t voor waarbij de exponent hoogstens n is. Het is dus een polynoom van graad n. Een Béziercurve heeft dan ook overeenkomende grafische eigenschappen met een polynoom. Net als een polynoom is deze over het algemeen een vloeiende lijn (het is mogelijk om de controlepunten zo te kiezen dat er een hoek zit in de Béziercurve dus dit geldt niet altijd).

Tabel 4 Toelichting onderdelen algemene formule Béziercurve

Om een beter beeld te geven van hoe de formule precies in elkaar zit, zijn hieronder voor een aantal kleine n de bijbehorende formule uitgewerkt. Voor $n = 1$ en $n = 2$ komt er precies de formule uit die we net hadden afgeleid.

$n = 1$

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} (1-t)^{1-i} t^i \mathbf{P}_i \\ &= \binom{1}{0} (1-t)^{1-0} t^0 \mathbf{P}_0 + \binom{1}{1} (1-t)^{1-1} t^1 \mathbf{P}_1 \\ &= (1-t) \mathbf{P}_0 + t \mathbf{P}_1 \end{aligned}$$

$n = 2$

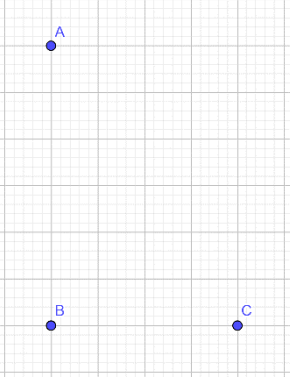
$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} (1-t)^{2-i} t^i \mathbf{P}_i \\ &= \binom{2}{0} (1-t)^{2-0} t^0 \mathbf{P}_0 + \binom{2}{1} (1-t)^{2-1} t^1 \mathbf{P}_1 + \binom{2}{2} (1-t)^{2-2} t^2 \mathbf{P}_2 \\ &= (1-t)^2 \mathbf{P}_0 + 2(1-t)t \mathbf{P}_1 + t^2 \mathbf{P}_2 \end{aligned}$$

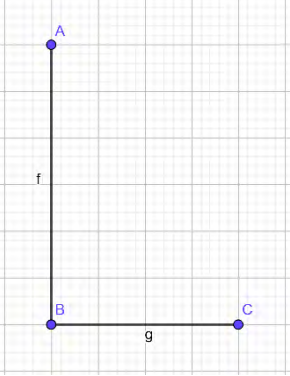
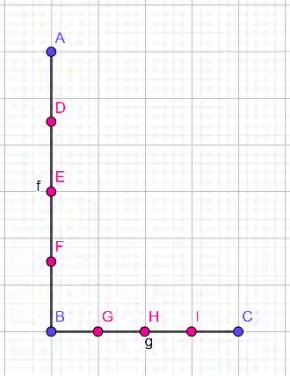
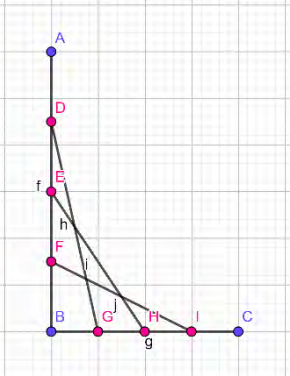
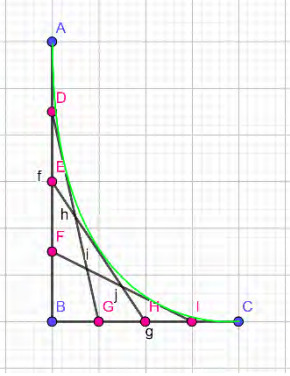
$n = 3$

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i \mathbf{P}_i \\ &= \binom{3}{0} (1-t)^{3-0} t^0 \mathbf{P}_0 + \binom{3}{1} (1-t)^{3-1} t^1 \mathbf{P}_1 + \binom{3}{2} (1-t)^{3-2} t^2 \mathbf{P}_2 + \binom{3}{3} (1-t)^{3-3} t^3 \mathbf{P}_3 \\ &= (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t \mathbf{P}_1 + 3(1-t) t^2 \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3 \end{aligned}$$

Een Béziercurve construeren

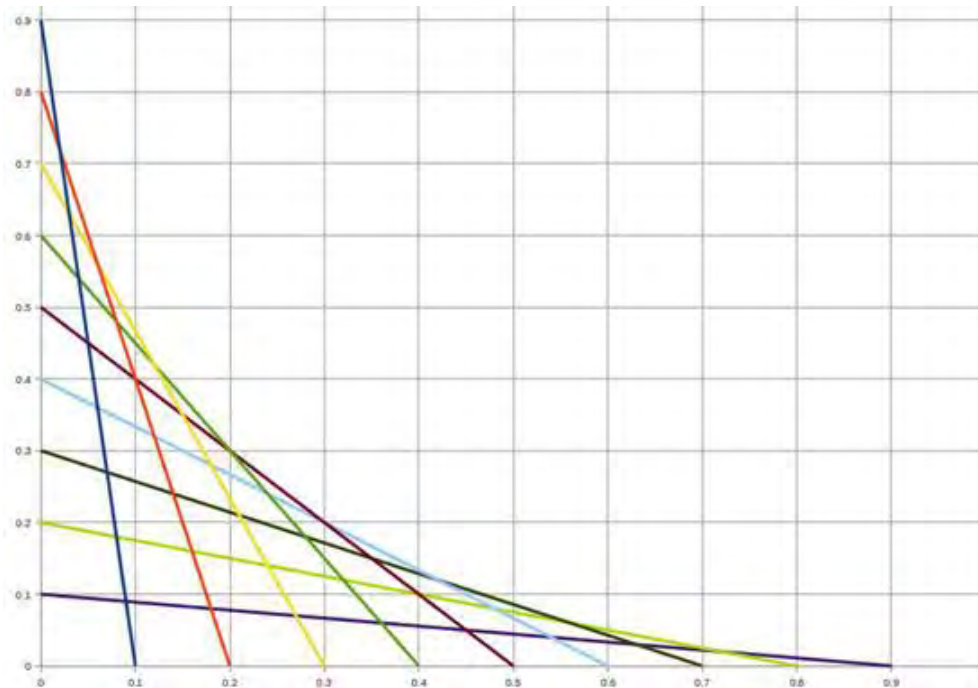
Naast het Casteljau algoritme is er nog een andere manier om Béziercurves met graad twee te construeren. Op deze manier kan een Béziercurve op papier geconstrueerd worden. De werkwijze is als volgt:

1	Kies 3 controlepunten. Zie <i>Figuur 14</i> de blauwe punten A, B en C.	 Figuur 14 Béziercurve construeren stap 1
---	--	---

2	Verbind het eerste met het tweede controlepunt en het tweede controlepunt met het derde. <i>Zie Figuur 15 de lijnen f en g.</i>	 Figuur 15 Béziercurve construeren stap 2
3	Verdeel de twee lijnen die bij stap 2 getekend zijn in een aantal gelijke stukken d.m.v. punten (hoe meer, hoe nauwkeuriger de uiteindelijke Béziercurve wordt). <i>Zie Figuur 16 de roze punten D, E en F op lijn f en de punten G, H en I op lijn g.</i>	 Figuur 16 Béziercurve construeren stap 3
4	Verbind het eerste punt op de lijn tussen het eerste en tweede controlepunt met het eerste punt op de lijn tussen het tweede en derde controlepunt. Verbind vervolgens het tweede punt op de lijn tussen het eerste en tweede controlepunt met het tweede punt op de lijn tussen het tweede en derde controlepunt. Ga zo door totdat je het laatste punt op de lijn tussen het eerste en tweede controlepunt verbindt met het laatste punt op de lijn tussen het tweede en derde controlepunt. <i>Zie Figuur 17 de lijnen i, h en j.</i>	 Figuur 17 Béziercurve construeren stap 4
5	De Béziercurve raakt de lijnstukken tussen het snijpunt van de eerste lijn met de tweede lijn, het snijpunt van de tweede lijn met de derde lijn etc. <i>Zie Figuur 18 de groene lijn.</i>	 Figuur 18 Béziercurve construeren stap 5

Tabel 5 Stappenplan Béziercurve construeren

De getekende vloeiende lijn is een Béziercurve. In Figuur 19 zie je een voorbeeld van een Béziercurve die op deze manier geconstrueerd is. Voor het specifieke geval hieronder zullen we ook bewijzen dat dit echt een Béziercurve is.²³



Figuur 19 Geconstrueerde Béziercurve met controlepunten (0,1), (0,0) en (1,0).

We nemen dat t het punt is waar een van die lijnen de x -as snijdt. Aangezien de lijn tussen het tweede en het derde controlepunt lengte 1 heeft, heeft t hier vergelijkbare functie met t in een Béziercurve. De controlepunten zouden (0,1), (0,0) en (1,0) moeten zijn, dus we nemen $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bekijk een willekeurige lijn. Deze snijdt de y -as bij $1 - t$ en de x -as bij t . De formule voor deze lijn is dus:

$$y = 1 - t - x \frac{1 - t}{t}$$

De volgende lijn is bij een stap verder dus bij $t + \Delta t$.

$$y = 1 - t - \Delta t - x \frac{1 - t - \Delta t}{t + \Delta t}$$

²³ Marianne (2012, 29 maart). Bridges, string art and Bézier curves. Geraadpleegd op 27 januari 2019, van <https://plus.maths.org/content/bridges-string-art-and-bezier-curves>

Voor het snijpunt van de twee lijnen geldt:

$$\begin{aligned}
 1 - t - x \frac{1-t}{t} &= 1 - t - \Delta t - x \frac{1-t-\Delta t}{t+\Delta t} \\
 -x \frac{1-t}{t} &= -\Delta t - x \frac{1-t-\Delta t}{t+\Delta t} \\
 -x(t+\Delta t) \frac{1-t}{t} &= -\Delta t(t+\Delta t) - x(1-t-\Delta t) \\
 -x(t+\Delta t)(1-t) &= -t\Delta t(t+\Delta t) - xt(1-t-\Delta t) \\
 x(-(t+\Delta t)(1-t) + t(1-t-\Delta t)) &= -t^2\Delta t - t\Delta t^2 \\
 x(-t + t^2 - \Delta t + t\Delta t + t - t^2 - t\Delta t) &= -t^2\Delta t - t\Delta t^2 \\
 x \cdot -\Delta t &= -t^2\Delta t - t\Delta t^2 \\
 x &= t^2 + t\Delta t
 \end{aligned}$$

Hoe meer lijnen dus hoe kleiner Δt , hoe beter de snijpunten de curve benaderen. Voor de exacte curve laten we Δt dus naar 0 naderen. Daaruit volgt dat $x = t^2$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
 y &= 1 - t - t^2 \frac{1-t}{t} \\
 &= 1 - t - t(1-t) \\
 &= (1-t)(1-t) \\
 &= (1-t)^2
 \end{aligned}$$

Voor de curve geldt:

$$\begin{aligned}
 B(t) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} t^2 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \\
 &= (1-t)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= (1-t)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t(1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= (1-t)^2 \mathbf{P}_0 + t(1-t) \mathbf{P}_1 + t^2 \mathbf{P}_2
 \end{aligned}$$

Dus het is precies de Béziercurve met als controlepunten $(0,1)$, $(0,0)$ en $(1,0)$.

2.3.2 De helling van een Béziercurve

De formule van een Béziercurve met graad n en controlepunten $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ is $B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$ oftewel als $\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ geldt $x(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i a_i$ en $y(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i b_i$. De helling van $B(t)$ is dan gelijk aan $\frac{y'(t)}{x'(t)}$. Om $x'(t)$ te vinden halen we de termen bij $i = 0$ en $i = n$ uit de sommatie, zodat we voor alle termen binnen de sommatie de productregel zonder problemen kunnen toepassen.

$$x(t) = a_0(1-t)^n + a_n t^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i a_i.$$

De afgeleide hiervan kunnen we per term bepalen. De twee termen die nu vooraan staan kunnen we makkelijk differentiëren met de regels die we bij deelvraag 1 hebben bewezen. Zo is de afgeleide van $a_n t^n$ gelijk aan $a_n n t^{n-1}$ en met de kettingregel vinden we dat de afgeleide van $a_0(1-t)^n$ gelijk is aan $-n a_0(1-t)^{n-1}$. Voor elke term in de sommatie kunnen we ook deze regels samen met de productregel toepassen. Voor elke i geldt dat de afgeleide van $\binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i a_i$ gelijk is aan $\binom{n}{i} a_i \left((-n+i)(1-t)^{n-i-1} t^i + i(1-t)^{n-i} t^{i-1} \right)$. Oftewel:

$$x'(t) = -n a_0(1-t)^{n-1} + n a_n t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i \left((-n+i)(1-t)^{n-i-1} t^i + i(1-t)^{n-i} t^{i-1} \right)$$

Op dezelfde manier geldt:

$$y'(t) = -n b_0(1-t)^{n-1} + n b_n t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} b_i \left((-n+i)(1-t)^{n-i-1} t^i + i(1-t)^{n-i} t^{i-1} \right)$$

Dus voor de helling van de Béziercurve $B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$ geldt:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-n b_0(1-t)^{n-1} + n b_n t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} b_i \left((-n+i)(1-t)^{n-i-1} t^i + i(1-t)^{n-i} t^{i-1} \right)}{-n a_0(1-t)^{n-1} + n a_n t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i \left((-n+i)(1-t)^{n-i-1} t^i + i(1-t)^{n-i} t^{i-1} \right)}$$

Voor het aansluiten van twee Béziercurves hoeven we alleen telkens de afgeleide te weten van de eindpunten en beginpunten van de Béziercurves. We kijken daarvoor alleen naar de waarden van de afgeleide bij $t = 0$ en bij $t = 1$. We bekijken eerst de helling bij $t = 0$. Voor de sommatie in $x'(t)$ geldt dat voor alle waarden van i behalve $i = 1$ de term 0 is, omdat dan t^i en t^{i-1} beide 0 zijn. Voor $i = 1$ valt t^{i-1} echter weg. Er geldt dus:

$$\begin{aligned} x'(0) &= -n a_0(1-0)^{n-1} + n a_n \cdot 0^{n-1} + \binom{n}{1} a_1 \left((-n+1)(1-0)^{n-1-1} \cdot 0^1 + 1(1-0)^{n-1} \right) \\ &= -n a_0 + 0 + n a_1(0+1) = -n a_0 + n a_1 \end{aligned}$$

Analoog geldt $y'(0) = -n b_0 + n b_1$. Nu zien we dat $\frac{y'(0)}{x'(0)} = \frac{-n b_0 + n b_1}{-n a_0 + n a_1} = \frac{-b_0 + b_1}{-a_0 + a_1}$.

Voor $t = 1$ gebeurt er ongeveer hetzelfde, waardoor bijna alle termen in de sommaties in $x'(t)$ en $y'(t)$ 0 zijn, omdat $(1-t)^{n-i-1}$ en $(1-t)^{n-i}$ dan beide 0 zijn. Alleen voor $i = n-1$ valt $(1-t)^{n-i-1}$ weg, dus is niet de hele term 0. Er geldt dus:

$$\begin{aligned} x'(1) &= -na_0(1-1)^{n-1} + na_n \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n-1}a_{n-1}((-n+n-1) \cdot 1^1 + 1(1-1)^{n-(n-1)}) \\ &= 0 + na_n + na_{n-1}(-1+0) \\ &= na_n - na_{n-1} \end{aligned}$$

Analoog geldt $y'(1) = nb_n - nb_{n-1}$. Nu zien we dat $\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{nb_n - nb_{n-1}}{na_n - na_{n-1}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}}$.

2.3.3 Soorten Béziercurve

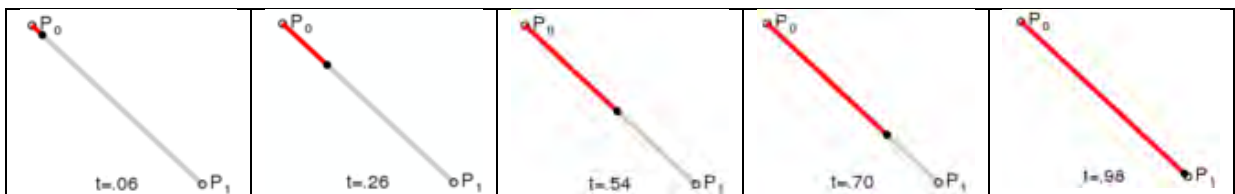
Een Béziercurve is gedefinieerd bij een set van controlepunten P_0 tot P_n , waarbij n de orde bepaalt ($n = 1$ voor lineair, $n = 2$ voor kwadratisch, etc.)²⁴ In deze paragraaf noteren wij nog kort enkele eigenschappen van de meest gebruikte soorten Béziercurves ($n = 1$, $n = 2$ en $n = 3$). Verder bekijken kort we Béziercurves van een hogere graad en driedimensionale Béziercurves.

Lineaire Béziercurve

Een lineaire Béziercurve is een Béziercurve die wordt bepaald door twee controlepunten, P_0 en P_1 . Er ontstaat zo een rechte lijn tussen de controlepunten P_0 en P_1 . De graad van de lineaire Béziercurve is 1. Uit de algemene formule voor een Béziercurve $B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i P_i$ volgt voor een lineaire Béziercurve:

$$B(t) = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i}(1-t)^{1-i}t^i P_i = \binom{1}{0}(1-t)^{1-0}t^0 P_0 + \binom{1}{1}(1-t)^{1-1}t^1 P_1$$

Daaruit volgt dat $B(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ waarbij $0 \leq t \leq 1$.



Tabel 6 Animatie van een lineaire Béziercurve, $0 \leq t \leq 1$

²⁴ Malek, M. (California State University East Bay). (z.d.). Bezier Curves. Geraadpleegd op 14 november 2018, van <http://www.mcs.csueastbay.edu/~malek/Class/Bezier.pdf>

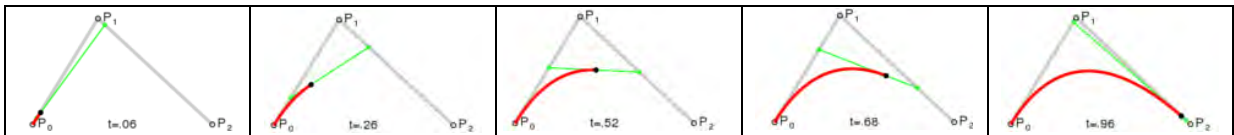
Kwadratische Béziercurve

Een kwadratische Béziercurve is een Béziercurve die wordt bepaald door drie controlepunten, P_0 tot P_2 . De graad van een kwadratische Béziercurve is 2. Uit de algemene formule voor een Béziercurve

$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i$ volgt voor een kwadratische Béziercurve:

$$B(t) = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} (1-t)^{2-i} t^i P_i = \binom{2}{0} (1-t)^{2-0} t^0 P_0 + \binom{2}{1} (1-t)^{2-1} t^1 P_1 + \binom{2}{2} (1-t)^{2-2} t^2 P_2$$

Daaruit volgt dat $B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2$ waarbij $0 \leq t \leq 1$.



Tabel 7 Animatie van een kwadratische Béziercurve, $0 \leq t \leq 1$

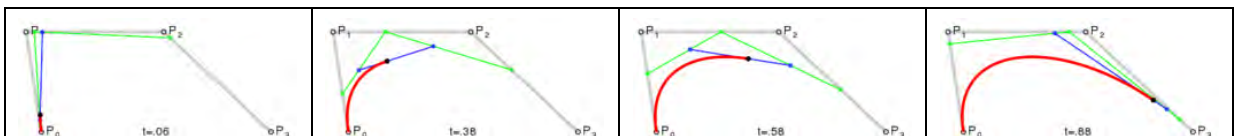
Derdegraads Béziercurve

Een derdegraads Béziercurve is een Béziercurve die wordt bepaald door vier controlepunten, P_0 tot P_3 . De graad van een derdegraads Béziercurve is 3. Uit de algemene formule voor een Béziercurve

$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i$ volgt voor een derdegraads Béziercurve:

$$B(t) = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i P_i = \binom{3}{0} (1-t)^{3-0} t^0 P_0 + \binom{3}{1} (1-t)^{3-1} t^1 P_1 + \binom{3}{2} (1-t)^{3-2} t^2 P_2 + \binom{3}{3} (1-t)^{3-3} t^3 P_3$$

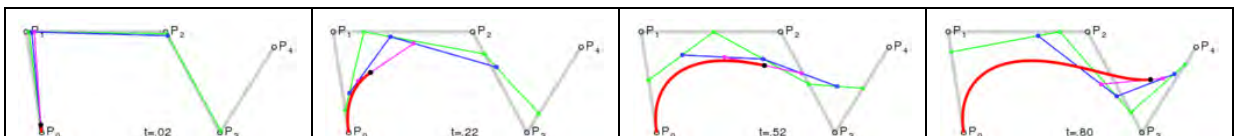
Daaruit volgt dat $B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3$ waarbij $0 \leq t \leq 1$.



Tabel 8 Animatie van een derdegraads Béziercurve, $0 \leq t \leq 1$

Hogere graad Béziercurve

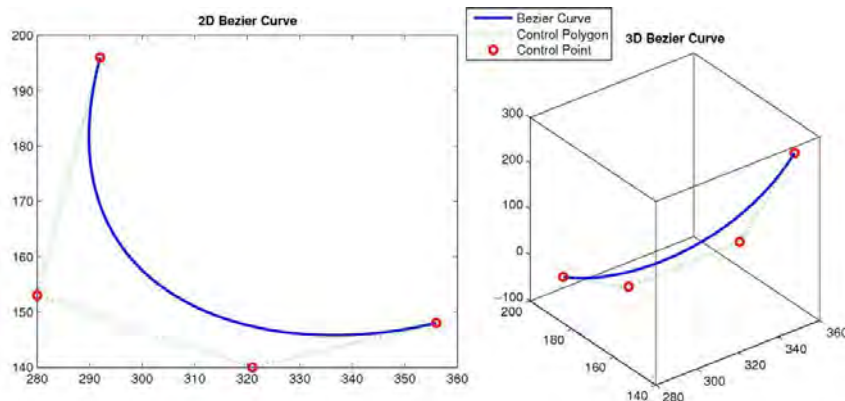
Voor de Béziercurves met graad 1 tot 3 zijn de formules overzichtelijk en makkelijk af te leiden uit de algemene formule. Voor hogere graden is dit ook mogelijk, maar in de praktijk worden deze Béziercurves met hogere graad weinig toegepast dus het overbodig om hiervoor de aparte formules af te leiden. In Tabel 9 staat nog wel een voorbeeld van een vijfdegraads Béziercurve.



Tabel 9 Animatie van een vijfdegraads Béziercurve, $0 \leq t \leq 1$

Driedimensionale Béziercurves

De Béziercurves die hierboven beschreven worden bevinden zich allemaal in het platte vlak en zijn dus 2D. Men kan ook een 3D Béziercurve beschrijven. De controlepunten van de Béziercurve liggen dan niet allemaal in één vlak. De controlepunten worden dus beschreven door 3 coördinaten: x, y en en z.²⁵ In Figuur 22 staat links een 2D Béziercurve in een assenstelsel en rechts een 3D Béziercurve in een assenstelsel getekend.

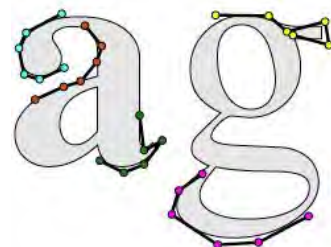


Figuur 20 Voorbeeld 2D en 3D Béziercurve

2.3.4 Waarvoor worden Béziercurves gebruikt in de praktijk?

In de voorafgaande subparagrafen hebben wij beschreven hoe de Béziercurve wiskundig in elkaar zit en welke vormen er bestaan. In het bedrijfsleven wordt op verschillende fronten ook veel gebruik gemaakt van Béziercurves. In deze subparagraaf gaan wij daar verder op in.

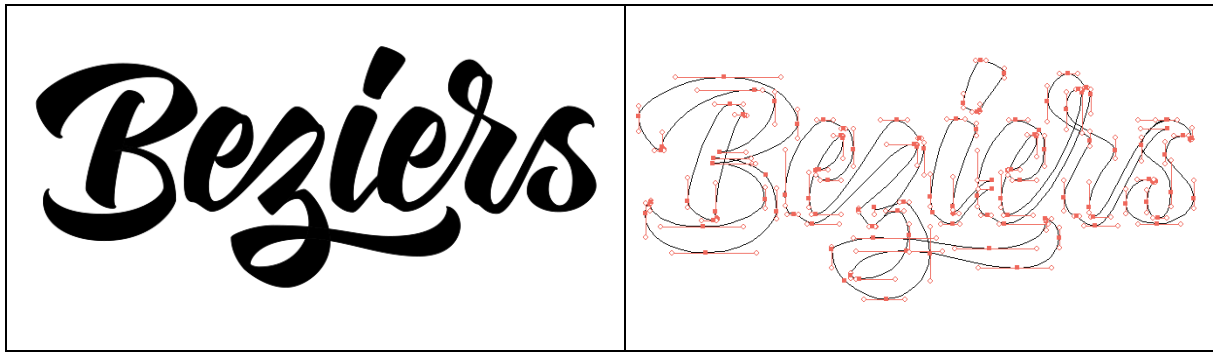
Een eerste toepassing waar de Béziercurve veel voor wordt gebruikt is het ontwerpen van lettertypes. De letters van een lettertype zijn vaak (deels) geconstrueerd met behulp van Béziercurves. De rondingen van de letters kunnen worden geconstrueerd met behulp van Béziercurves. Deze Béziercurves kan men dan vloeiend laten aansluiten om zo een vloeiende letter te ontwerpen. Het gevolg van de letters definiëren met Béziercurves is dat wanneer men inzoomt de letter meeschaalt en de letter scherp blijft.



Figuur 21 font met vereenvoudigde Béziercurves

In Figuur 21 zijn een paar Béziercurves weer gegeven op de letters a en g. In Tabel 10 is het woord 'Béziers' geschreven met Béziercurves. De stippen zijn de controlepunten en de lijnen geven aan waar de verschillende Béziercurves aansluiten. In ons praktische deel gaan wij Béziercurves toepassen op het logo van het Minkema College.

²⁵ Dr. Murtaza Khan (2009, 9 juli). Bezier Interpolation in N-Dimension Space - File Exchange - MATLAB Central. Geraadpleegd op 1 februari 2019, van <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7441-bezier-interpolation-in-n-dimension-space>



Tabel 10 Woord 'Béziers' (links) gemaakt met behulp van Béziercurves (rechts)

Verder worden Béziercurves ook veel bij ontwerpen gebruikt. Béziercurves worden gebruikt om in een afbeelding een mooie gelijkmatige curve te tekenen. Bij animaties worden Béziercurves gebruikt om een zo natuurlijk mogelijke beweging te simuleren.²⁶ Voor het maken van complexere figuren worden meerdere Béziercurves achter elkaar gebruikt.²⁷

Er zijn nog veel meer (grafische) toepassingen van Béziercurves. Zo wordt er in de industrie ook gebruik gemaakt bij het beschrijven van een baan die een voertuig moet maken in bijvoorbeeld een fabriekshal. Voor deze en andere toepassingen, worden ook vaak curves gebruikt die bestaan uit Béziercurves. Hierop gaan wij in de discussie verder in als mogelijkheid voor vervolgonderzoek.

2.3.5 Conclusie deelvraag

Een Béziercurve is een curve waarmee een vloeiende lijn getrokken kan worden tussen twee punten. De curve kan op twee manieren gedefinieerd worden, met een formule of met het Casteljau algoritme. De formule van een Béziercurve is $B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$. Hierbij is $\mathbf{P}_i$ telkens een van de controlepunten en n de graad. Met de controlepunten kan het verloop van de curve bepaald worden. Een Béziercurve is een parameterkromme met polynomen als vergelijkingen voor x en y . De afgeleide kunnen we dus met de differentieerregels uit deelvraag 1 en 2 bepalen. Béziercurves kennen vele toepassingen, bijvoorbeeld bij het ontwerp van lettertypes.

²⁶ Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézierkromme. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkromme>

²⁷ Kantor, I. (z.d.). Bezier curve. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://javascript.info/bezier-curve>

2.4 Wanneer sluiten twee curves vloeiend op elkaar aan?

2.4.1 Maten van vloeiendheid

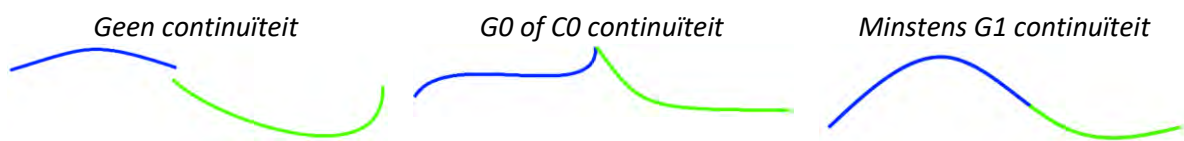
Twee lijnen kunnen niet aansluiten, aansluiten of vloeiend aansluiten. Figuur 1 hieronder geeft dit goed weer.



Figuur 22 Maten van vloeiendheid van de aansluiting van twee lijnen

Echter je kan ook onderscheid maken in de mate van vloeiendheid waarmee twee lijnen aansluiten. Hieronder wordt besproken aan welke voorwaarden twee lijnen moeten voldoen voor een bepaalde mate van vloeiendheid. Hierbij kun je spreken over C en G continuïteit. C staat voor parametrische continuïteit en G voor geometrische continuïteit. Bij parametrische continuïteit zien de lijnen er niet alleen vloeiend uit, maar is de snelheid waarmee het punt over de curve loopt ook vloeiend en verandert dus niet heel plotseling. Daarnaast is C continuïteit vloeiender dan G continuïteit. Voor veel grafische toepassingen van Béziercurves waarbij het alleen om de curve gaat en niet om hoe het punt over de curve beweegt, is C continuïteit dus niet van belang. We behandelen het in deze paragraaf echter toch, omdat er ook toepassingen van Béziercurves zijn, waarbij dit wel van belang is.

De laagste vorm van continuïteit is G0 of C0 (voor 0 zijn G en C hetzelfde), waarbij de lijnen wel aansluiten, maar niet noodzakelijk vloeiend. Hogere mate van continuïteit zijn G1, C1, G2, ... enzovoort. Als twee lijnen een bepaalde level continuïteit hebben, voldoen ze in ieder geval ook aan alle voorwaarden die nodig waren voor de voorgaande levels van continuïteit. Zo moeten lijnen bijvoorbeeld aansluiten, voordat ze vloeiend kunnen aansluiten. In Figuur 23 staan nog een keer de lijnen van Figuur 22, maar nu met daarbij aangegeven welke continuïteit er is.²⁸



Figuur 23 Maten van vloeiendheid van de aansluiting van twee lijnen (officiële benaming)

Bij deze deelvraag gaan we uit van curves met een begin- en eindpunt, aangezien dit beter past bij onze hoofdvraag en het niet veel toevoegt om andere gevallen toe te lichten. Verder nemen we aan dat het overeenkomende punt het eindpunt van de eerste curve en het beginpunt van de tweede curve is. Aansluiten bij de eindpunten van beide of juist de beginpunten zou ongeveer hetzelfde werken dus

²⁸ Asher, J. (2011, 17 februari). Geometric Continuity. Geraadpleegd op 27 november 2018, van https://communities.bentley.com/products/products_generativecomponents/w/generative_components_community_wiki/2023/geometric-continuity

dit lichten we niet apart toe. Verder gaan we er ook vanuit dat de curve zelf vloeiend is, dus midden in de curve zit geen knik. Dit sluit namelijk beter aan bij onze hoofdvraag, want Béziercurves zijn zelf bijna altijd vloeiend en in ieder geval gemakkelijk vloeiend te maken. Daarom kijken we bij het aansluiten van twee curves ook alleen naar het aansluitpunt.

G0

Bij G0 (of C0) spreekt men over puntcontinuïteit. Zoals eerder genoemd sluiten de lijnen hier enkel aan, maar vloeien ze niet per definitie in elkaar over. De enige voorwaarde voor G0 continuïteit is dat het eindpunt van de eerste curve hetzelfde is als het beginpunt van de tweede curve. Als je dus twee curves hebt: $\begin{cases} x_1(t) \\ y_1(t) \end{cases}$ en $\begin{cases} x_2(t) \\ y_2(t) \end{cases}$ en de eerste curve eindigt bij $t = a$ en de tweede curve begint bij $t = b$ moet er gelden dat $x_1(a) = x_2(b)$ en $y_1(a) = y_2(b)$. Bij deze vorm van continuïteit is er nog geen vloeiendheid: ook lijnen waartussen een hoek zit voldoen aan G0 continuïteit.²⁹

G1

Om curves vloeiend te laten aansluiten wil je de curves aanpassen, zodat ze minstens G1 continuïteit hebben. Hierbij heeft de snelheidsvector van het eindpunt van de eerste curve dezelfde richting als de snelheidsvector van het beginpunt van de tweede curve. De twee raaklijnen aan de genoemde punten zijn dus hetzelfde. De richting van een snelheidsvector wordt bepaald door $\frac{y'(t)}{x'(t)}$. Als je dus twee curves hebt: $\begin{cases} x_1(t) \\ y_1(t) \end{cases}$ en $\begin{cases} x_2(t) \\ y_2(t) \end{cases}$ en de eerste curve eindigt bij $t = a$ en de tweede curve begint bij $t = b$ moet er gelden dat $\frac{y_1'(a)}{x_1'(a)} = \frac{y_2'(b)}{x_2'(b)}$. Buiten dat moeten de twee curves ook G0 continuïteit hebben. De raakvectoren hebben bij G1 continuïteit enkel dezelfde richting, ze hoeven niet dezelfde grootte te hebben.²⁹

C1

Wanneer de raakvectoren niet alleen dezelfde richting hebben, maar ook dezelfde grootte, spreek je over C1 continuïteit. De lengte van de snelheidsvector is gelijk aan $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Als je dus twee curves hebt: $\begin{cases} x_1(t) \\ y_1(t) \end{cases}$ en $\begin{cases} x_2(t) \\ y_2(t) \end{cases}$ en de eerste curve eindigt bij $t = a$ en de tweede curve begint bij $t = b$ moet er gelden $\sqrt{((x_1'(a))^2 + (y_1'(a))^2)} = \sqrt{(x_2'(b))^2 + (y_2'(b))^2}$. Daarnaast moeten de twee curves dus voldoen aan G1 en G0 continuïteit.²⁹

Hogere maten van continuïteit

Bij hogere maten van continuïteit geldt dat er hogere afgeleiden gelijk moeten zijn bij het aansluitpunt. Voor de meeste toepassingen zijn G1 en C1 continuïteit echter al voldoende vloeiend. Voor de meeste grafische toepassingen is G1 ook al voldoende. Daarom zullen we hogere maten van continuïteit niet verder toelichten.³⁰

²⁹ Lay, D. C. (2010). Linear Algebra and Its Applications (4e ed.). New York, Amerika: Pearson Education.

³⁰ Wikipedia contributors. (z.d.). Smoothness. Geraadpleegd op 8 december 2018, van <https://en.wikipedia.org/wiki/Smoothness>

2.4.2 Twee Béziercurves vloeiend aansluiten

G0

Twee Béziercurves sluiten aan met G0 continuïteit wanneer het laatste controlepunt van de eerste Béziercurve samenvalt met het eerste controlepunt van de tweede, omdat de curve begint in het eerste controlepunt en eindigt in de laatste.

G1

In subparagraaf 2.4.1 hebben we bepaald dat bij G1 continuïteit moet gelden dat als je twee curves hebt: $B_1 = \begin{cases} x_1(t) \\ y_1(t) \end{cases}$ en $B_2 = \begin{cases} x_2(t) \\ y_2(t) \end{cases}$ en de eerste curve eindigt bij $t = a$ en de tweede curve begint bij $t = b$ dat $\frac{y'_1(a)}{x'_1(a)} = \frac{y'_2(b)}{x'_2(b)}$. Een Béziercurve loopt van $t = 0$ tot $t = 1$, dus bij een Béziercurve moet gelden dat $\frac{y'_1(1)}{x'_1(1)} = \frac{y'_2(0)}{x'_2(0)}$. De waarden hiervan hebben we in deelvraag 3 al uitgedrukt in de x - en y -waarden van de controlepunten. Daar is aangetoond dat $\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}}$ en dat $\frac{y'(0)}{x'(0)} = \frac{-d_0 + d_1}{-c_0 + c_1}$ (er geldt hierbij dat de coördinaten van het n -de controlepunt van de eerste curve (a_n, b_n) zijn en van de curve (c_n, d_n)). $\frac{-d_0 + d_1}{-c_0 + c_1}$ is precies de helling door de punten (c_0, d_0) en (c_1, d_1) , oftewel de eerste twee controlepunten en $\frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}}$ de helling door de punten (a_n, b_n) en (a_{n-1}, b_{n-1}) , oftewel de laatste twee controlepunten. Als je nu twee Béziercurves wilt laten aansluiten, moeten deze hellingen gelijk zijn bij het eindpunt van de eerste curve en het beginpunt van de tweede. Ze moeten aansluiten dus als (a_n, b_n) het laatste punt is van de eerste curve en (c_0, d_0) het beginpunt van de tweede curve, geldt er $(a_n, b_n) = (c_0, d_0)$. De helling tussen de punten (a_n, b_n) en (a_{n-1}, b_{n-1}) moet gelijk zijn aan de helling tussen de punten (c_0, d_0) en (c_1, d_1) , oftewel tussen (a_n, b_n) en (c_1, d_1) . Hieruit volgt dat de drie punten (a_n, b_n) (dit is dus hetzelfde punt als (c_0, d_0)), (a_{n-1}, b_{n-1}) en (c_1, d_1) op één lijn moeten liggen. Hierbij moet het overeenkomende punt tussen de andere twee punten liggen, omdat anders de hellingen precies tegengesteld zijn.

C1

Om te laten zien wanneer twee Béziercurves over C1 continuïteit beschikken, kan ongeveer dezelfde aanpak als bij G1 continuïteit gebruikt worden. We bekijken weer wat we gevonden hebben bij subparagraaf 2.4.1. De lengte van de snelheidsvector is gelijk aan $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Als je dus weer twee curves hebt: $B_1 = \begin{cases} x_1(t) \\ y_1(t) \end{cases}$ en $B_2 = \begin{cases} x_2(t) \\ y_2(t) \end{cases}$ en de eerste curve eindigt bij $t = a$ en de tweede curve begint bij $t = b$ dan moet er dus gelden dat $\sqrt{(x'_1(a))^2 + (y'_1(a))^2} = \sqrt{(x'_2(b))^2 + (y'_2(b))^2}$. Dus als het gaat om twee Béziercurves moet er gelden $\sqrt{(x'_1(1))^2 + (y'_1(1))^2} = \sqrt{(x'_2(0))^2 + (y'_2(0))^2}$. De waarden van $x'(1)$, $y'(1)$, $x'(0)$ en $y'(0)$ van een willekeurige Béziercurve hebben we in deelvraag 3 al uitgedrukt in de x - en y -waarden van de controlepunten.

Er geldt namelijk dat:

$$x'(1) = a_n - a_{n-1}$$

$$y'(1) = b_n - b_{n-1}$$

$$x'(0) = -c_0 + c_1$$

$$y'(0) = -d_0 + d_1$$

Als we dit invullen in de voorwaarde waaraan twee Béziercurves moesten voldoen voor C1 continuïteit krijg je $\sqrt{(a_n - a_{n-1})^2 + (b_n - b_{n-1})^2} = \sqrt{(-c_0 + c_1)^2 + (-d_0 + d_1)^2}$. Het linker stuk hiervan is precies de afstand tussen de punten (a_n, b_n) en (a_{n-1}, b_{n-1}) en het rechterstuk de afstand tussen de punten (c_0, d_0) en (c_1, d_1) . Aangezien (a_n, b_n) en (c_0, d_0) nog steeds hetzelfde punt moeten zijn en ze ook nog op één lijn moeten liggen, geldt er dat er C1 continuïteit is precies als het overeenkomende punt van de twee Béziercurves het midden is van het lijnstuk van het op een na laatste controlepunt van de eerste curve naar het tweede controlepunt van de tweede curve.

2.4.3 Conclusie deelvraag

Voor het aansluiten van twee curves kan er sprake zijn van verschillende mate van vloeiendheid. Hierbij wordt onderscheid gemaakt in parametrische continuïteit (C) en geometrische continuïteit (G). Bij G0 of C0 sluiten twee curves enkel aan, maar niet noodzakelijk vloeiend. Bij Béziercurves betekent dit dat de twee curves een overeenkomend eerste of laatste controlepunt moeten hebben. Bij G1 continuïteit lopen de curves al behoorlijk vloeiend in elkaar over. Hierbij moeten de richtingen van de snelheidsvectoren van beide curves bij het aansluitpunt gelijk zijn. Bij Béziercurves betekent dit dat de twee controlepunten van de twee curves naast het overeenkomende controlepunt op één lijn moeten liggen met het overeenkomende controlepunt. Voor C1 continuïteit moet het overeenkomende controlepunt daarnaast ook nog in het midden van deze lijn liggen. Bij C1 continuïteit gaan de curves nog iets vloeiender in elkaar over en gaan ook de baansnelheden van de twee curves vloeiend in elkaar over. Hierbij moet over het algemeen voor curves gelden dat naast de richting ook de groottes van de snelheidsvectoren gelijk zijn.

3 Praktisch deel

Het grootste deel van ons onderzoek is gebaseerd op bronnen die wij hebben gecombineerd en uitgewerkt. Met behulp van alle verzamelde bronnen kunnen wij dan ook de hoofdvraag gaan beantwoorden. In dit hoofdstuk laten wij zien dat we de theorie die wij hebben gevonden ook toe kunnen passen in een praktijkvoorbeeld. Wij gaan het logo van onze school, het Minkema College, namaken in het programma GeoGebra met behulp van Béziercurves. Een belangrijk onderdeel hierbij is het vloeiend laten aansluiten van de verschillende Béziercurves in het logo, want dat is natuurlijk het onderwerp waar ons hele onderzoek over gaat.

GeoGebra is een computeralgebrasysteem³¹, dit is een computerprogramma waarmee berekeningen in verschillende deelgebieden van de wiskunde mogelijk zijn.³² Het wordt veel gebruikt op scholen en is voor elk onderwijsniveau te gebruiken en combineert veel verschillende deelgebieden van de wiskunde in één pakket. Het is open source software en gratis beschikbaar voor niet-commercieel gebruik. Dit is een groot voordeel, want zo kunnen wij er thuis gebruik van maken. Daarnaast heeft onze school een GeoGebra licentie waardoor wij ook op school met dit programma kunnen werken.³³

3.1 Minkema logo met het Casteljau algoritme

Voor het maken van het logo van het Minkema College maken wij alleen gebruik van derdegraads Béziercurves. Dit doen wij omdat de derdegraads Béziercurve het meest gebruikte type Béziercurve in ontwerpprogramma's is. Daarnaast is hij al complex genoeg om er veel vormen mee te kunnen, maar niet te complex om er met de hand mee te kunnen rekenen.

In GeoGebra kan men goed een Béziercurve definiëren met behulp van het Casteljau algoritme (uitgelegd in 2.3.1). Op de komende pagina's wordt kort uitgelegd hoe een Béziercurve kan worden geconstrueerd in GeoGebra.

Hieronder staat het logo van het Minkema College. We gaan van dit logo het gekleurde deel namaken in GeoGebra. We zullen exact dezelfde kleuren gebruiken als in onderstaand logo.



Figuur 24 Logo van het Minkema College

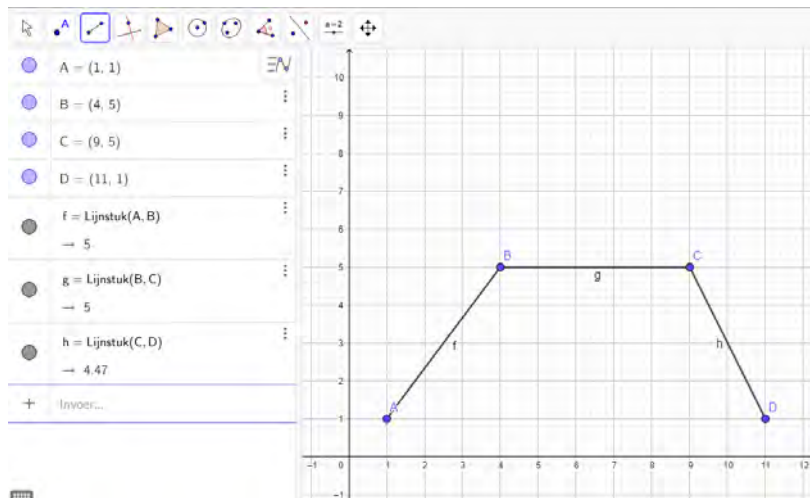
³¹ Wikipedia-bijdragers. (z.d.). GeoGebra. Geraadpleegd op 26 januari 2019, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>

³² Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Computeralgebrasysteem. Geraadpleegd op 26 januari 2019, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/Computeralgebrasysteem>

³³ GeoGebra. (z.d.). About GeoGebra. Geraadpleegd op 26 januari 2019, van <https://www.geogebra.org/about>

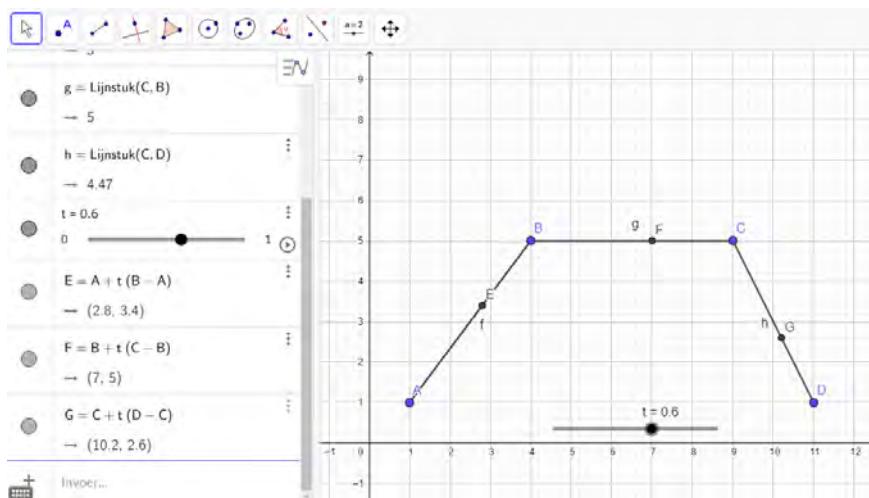
Eén derdegraads Béziercurve maken

1. Definieer de 4 controle punten A, B, C en D.
2. Verbind punt A met B, B met C en C met D.



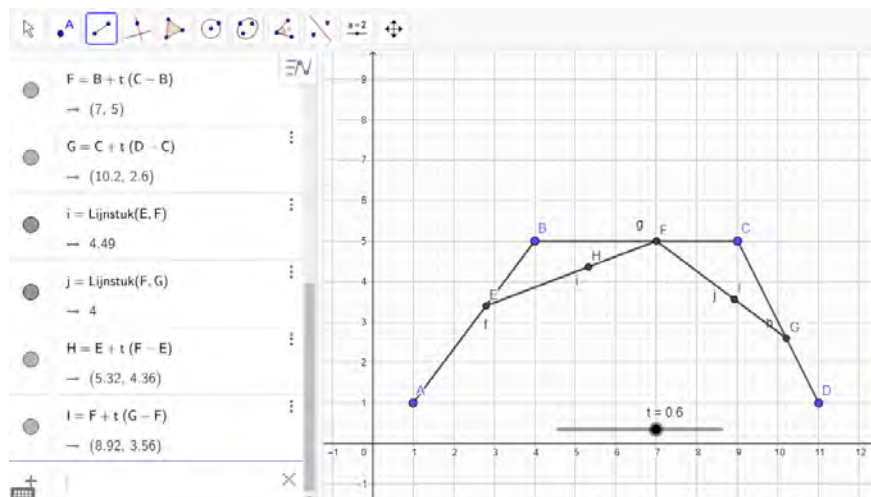
Figuur 25 Derdegraads Béziercurve maken; stap 1 en 2

3. Voeg een schuifknop in met de variabele t , waarbij $0 \leq t \leq 1$.
4. Definieer de punten E, F en G. Deze punten liggen op de lijnstukken AB, CB en CD, ze zijn echter afhankelijk van de waarde van t . Punt E wordt gedefinieerd met $E = A + t(B - A)$ en op dezelfde manier worden ook de punten F en G gedefinieerd.



Figuur 26 Derdegraads Béziercurve maken; stap 3 en 4

5. Verbind punt E met punt F en punt F met punt G.
6. Definieer de punten H en I. Deze punten liggen op de lijnstukken EF en FG, ze zijn echter afhankelijk van de waarde van t . Punt H wordt gedefinieerd met $H = E + t(F - E)$ en op dezelfde manier wordt ook het punt I gedefinieerd.

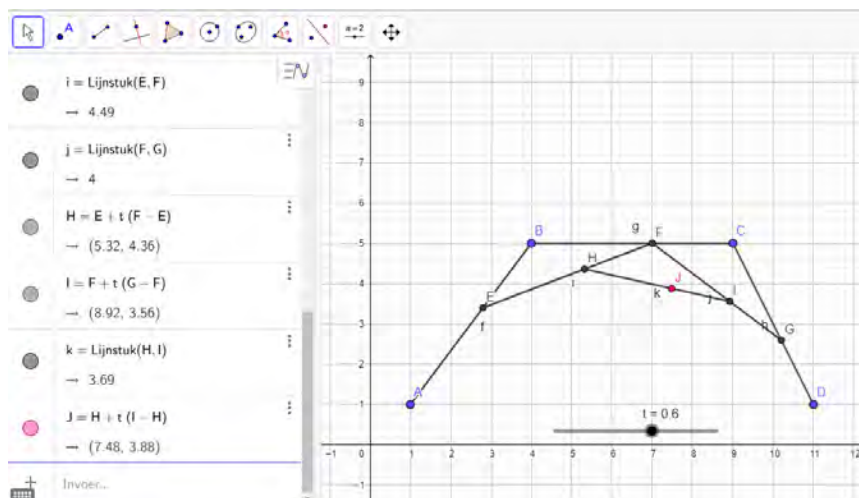


Figuur 27 Derdegraads Béziercurve maken; stap 5 en 6

7. Verbind de punten H en I.

8. Definieer het punt J. Dit punt ligt op het lijnstuk HI en is echter afhankelijk van de waarde van t . Punt J wordt gedefinieerd met $J = H + t(I - H)$.

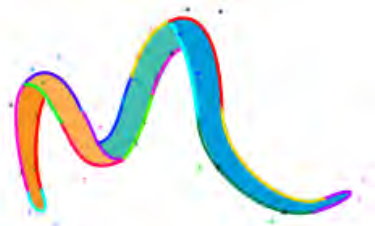
9. Zet van punt J het spoor aan zodat je de baan van dit punt kan zien op het scherm. Deze baan is de Béziercurve.



Figuur 28 Derdegraads Béziercurve maken stap 6, 7 en 8

Gehele logo maken

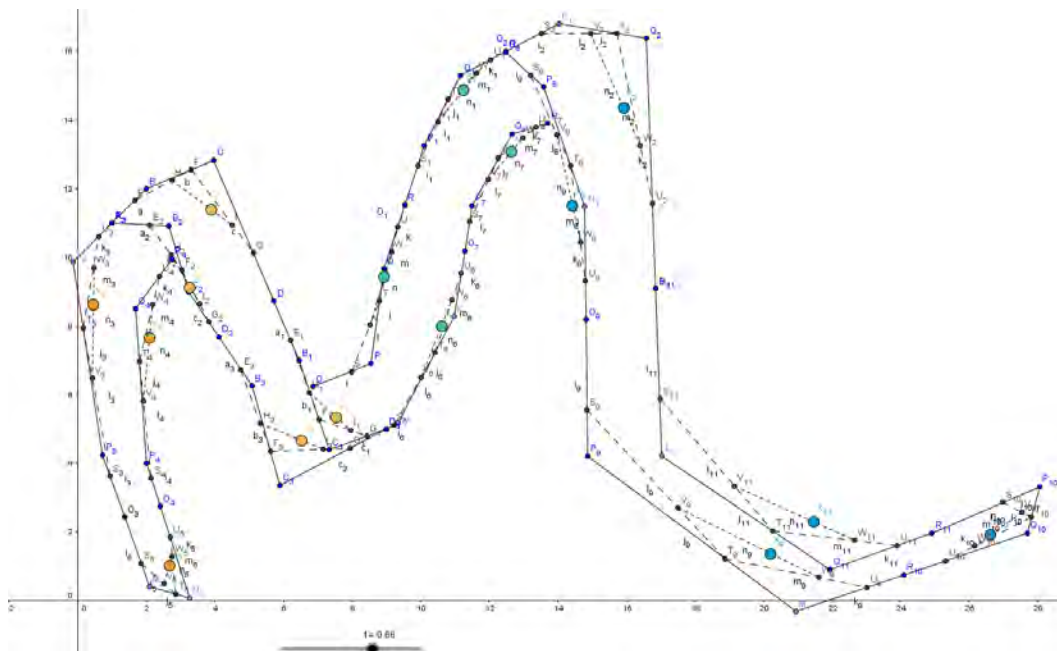
De standaard Béziercurve zoals hierboven is geconstrueerd kan worden gekopieerd. Voor het logo van het Minkema College gebruiken wij 16 Béziercurves. Om beter een idee te krijgen van hoe de Béziercurves moeten lopen tekenen we eerst in Paint.net Béziercurves op het logo. Van de getekende Béziercurves markeren we de controlepunten, zodat we straks in GeoGebra enig idee hebben van hoe de controlepunten ongeveer liggen. Vervolgens importeren we deze afbeelding (zie



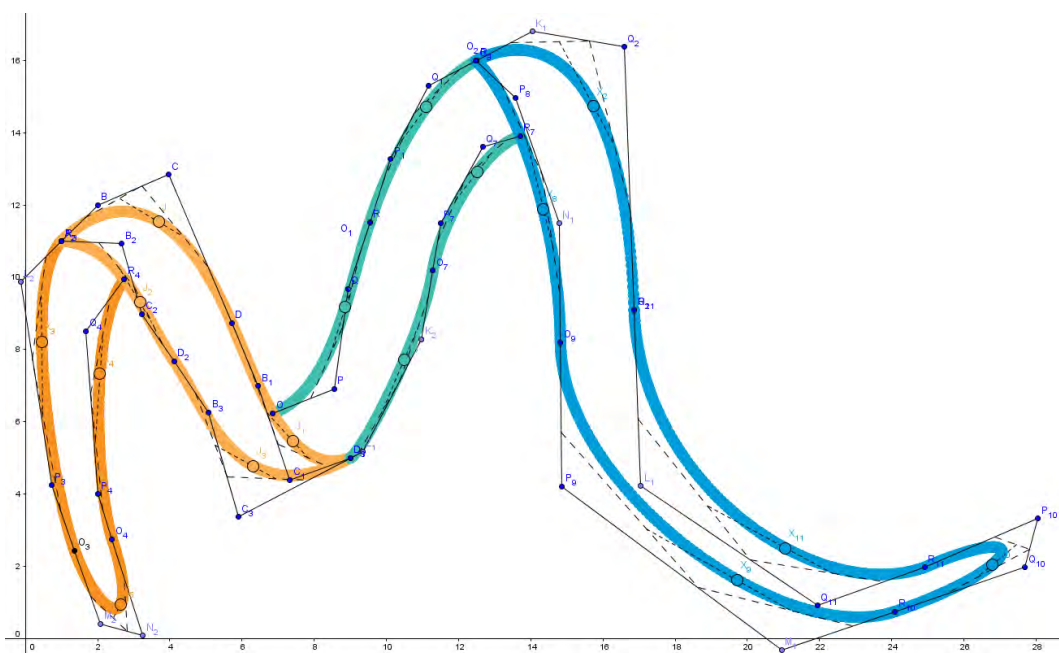
Figuur 29 Logo van het Minkema Logo met Béziercurves erop gemaakt in Paint.net

Figuur 29) als achtergrondafbeelding in GeoGebra. Hiermee kunnen we de 16 Béziercurves op de juiste plek zetten, door middel van het verschuiven van de controlepunten.

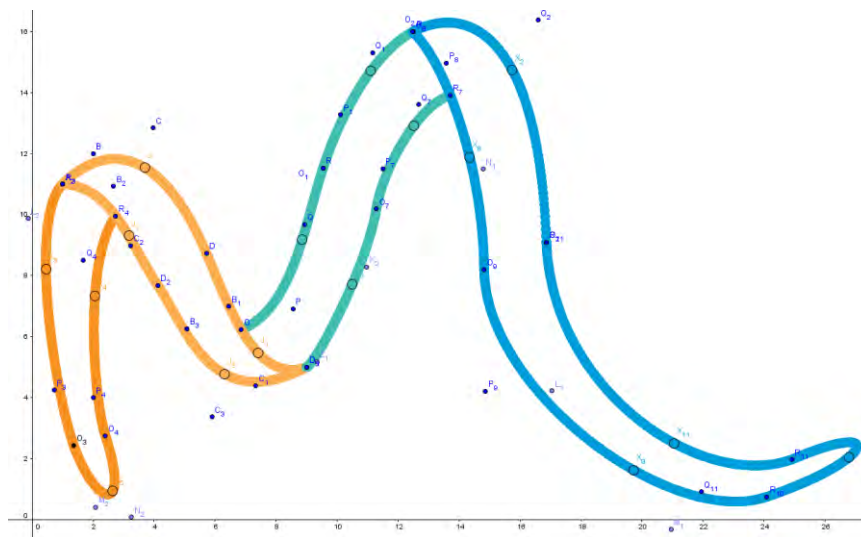
Dan komt nu het belangrijkste onderdeel, waar dit onderzoek ook over gaat, het vloeiend laten aansluiten van de verschillende Béziercurves. In het logo zijn 12 punten waar de Béziercurves vloeiend moeten aansluiten. Wij gaan deze laten aansluiten met G1 continuïteit. Voor één punt gaan wij in 3.2 bewijzen dat de twee Béziercurves daar vloeiend aansluiten met behulp van formules. In deelvraag 2.4 is bewezen dat twee Béziercurves aansluiten met G1 continuïteit als het gemeenschappelijke controlepunt, het voor laatste controle punt van de eerste Béziercurve en het tweede controle punt van de tweede Béziercurve op één lijn liggen. In GeoGebra geven we aan dat de punten op één lijn moeten liggen en dan ontstaat er een logo waarvan de verschillende Béziercurves vloeiend aansluiten. In de figuren hieronder een beeld van de opbouw van het logo en het uiteindelijke resultaat.



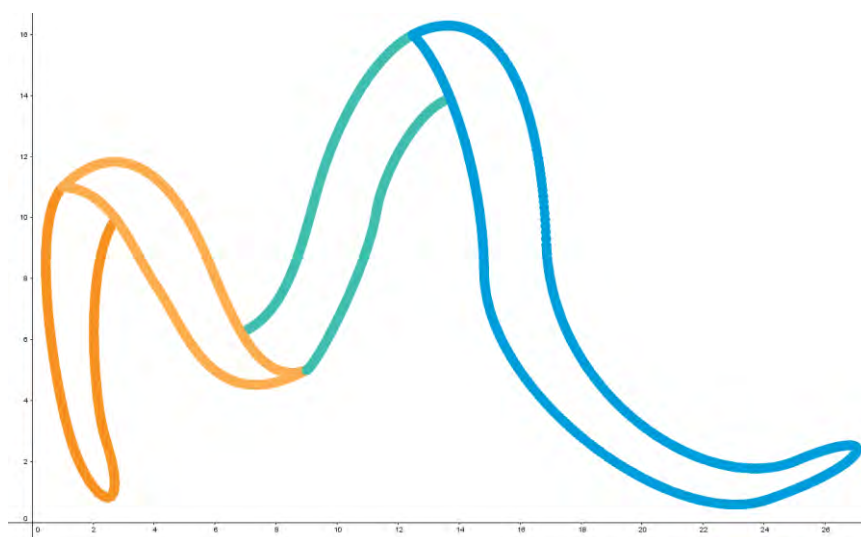
Figuur 30 Minkema logo in GeoGebra; controlepunten en hulplijnen te zien



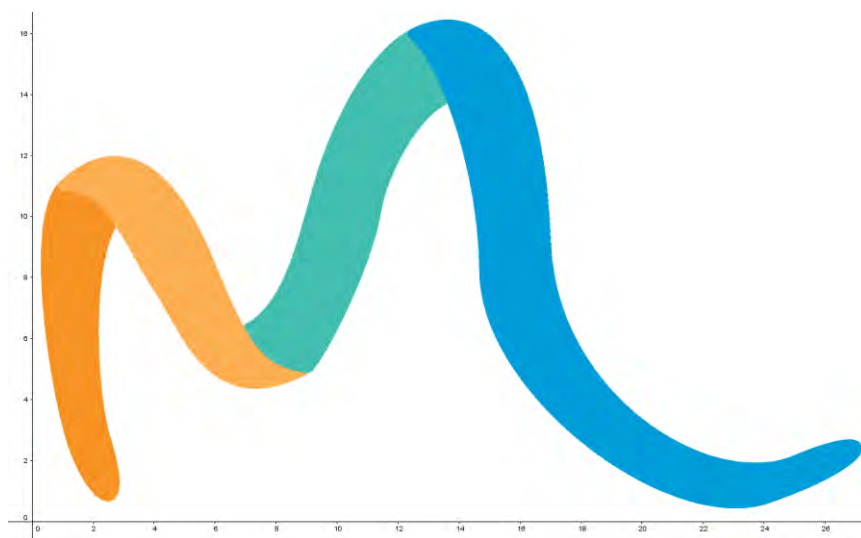
Figuur 31 Minkema logo in GeoGebra; controlepunten, hulplijnen en spoor te zien



Figuur 32 Minkema logo in GeoGebra; controlepunten en spoor te zien



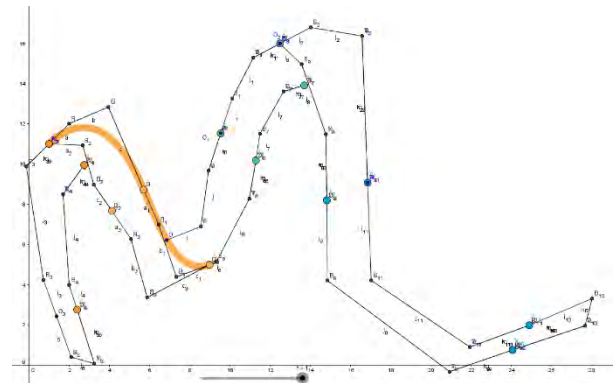
Figuur 33 Minkema logo in GeoGebra; alleen spoor te zien



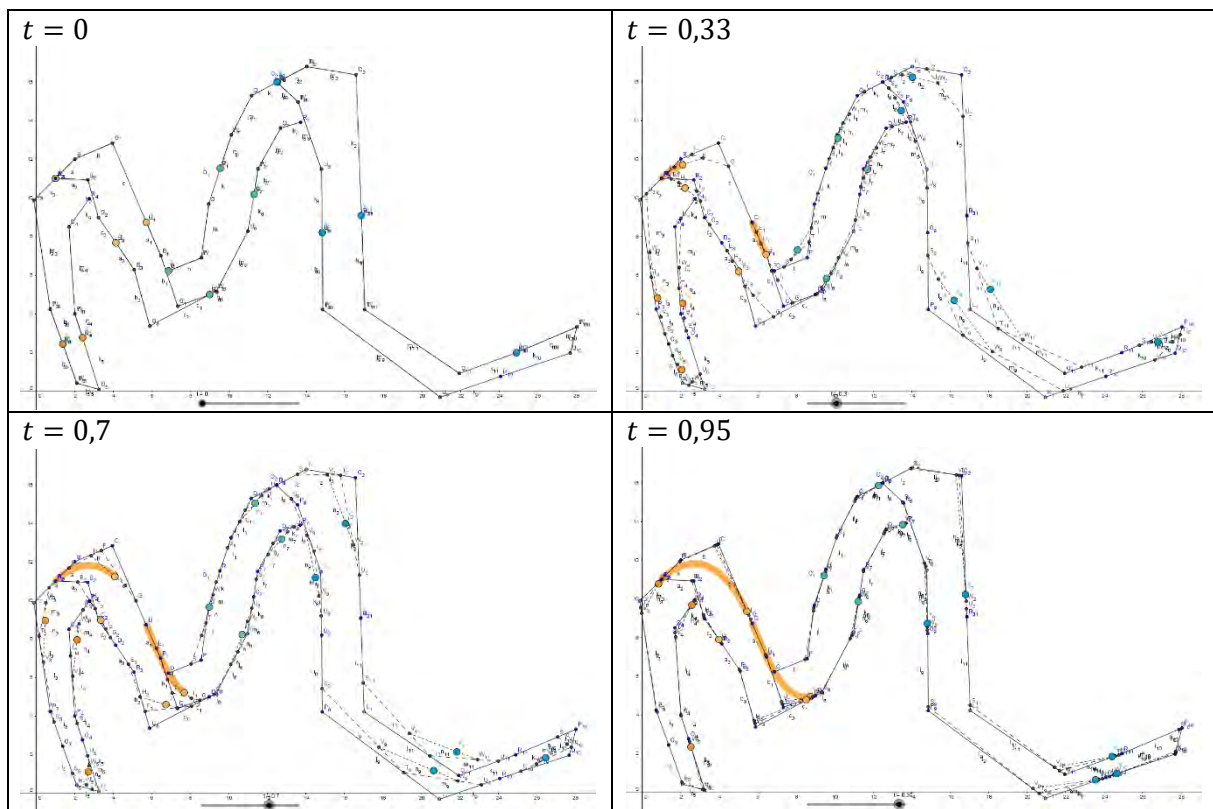
Figuur 34 Minkema logo in GeoGebra en Paint.net; logo opgevuld

3.2 Bewijs voor het vloeiend aansluiten van twee Béziercurves

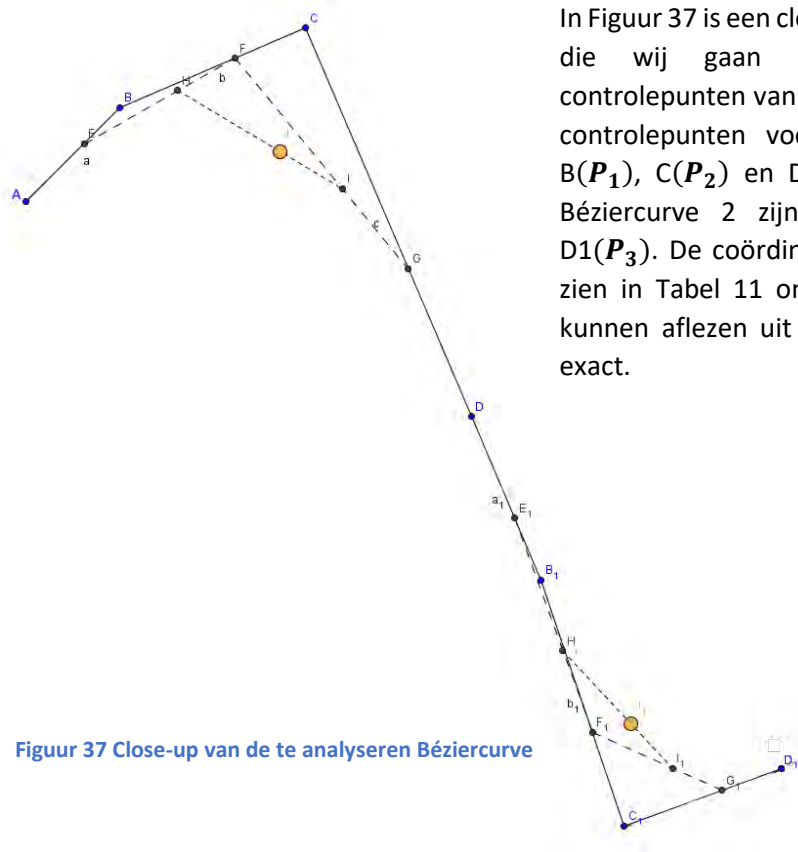
Voor twee Béziercurves in het logo van het Minkema College, waarvan het spoor in Figuur 35 is te zien, gaan wij bewijzen met behulp van formules dat ze vloeiend aansluiten. Dit gaan wij doen door eerst voor beide Béziercurves een formule op te stellen en daarna van die formules de afgeleiden op te stellen. Met deze afgeleide kunnen wij bewijzen dat ze vloeiend op elkaar aansluiten volgens de theorie die wij in hoofdstuk 2.4 hebben beschreven.



Figuur 35 Spoor van de te analyseren Béziercurves in het logo



Figuur 36 Verloop te analyseren Béziercurve in de tijd



Figuur 37 Close-up van de te analyseren Béziercurve

In Figuur 37 is een close-up te zien van de Béziercurve die wij gaan analyseren. Hierin zijn de controlepunten van de twee Béziercurves blauw. De controlepunten voor Béziercurve 1 zijn: $A(P_0)$, $B(P_1)$, $C(P_2)$ en $D(P_3)$. De controlepunten voor Béziercurve 2 zijn: $D(P_0)$, $B_1(P_1)$, $C_1(P_2)$ en $D_1(P_3)$. De coördinaten van deze punten (zoals te zien in Tabel 11 onder de afbeelding) hebben wij kunnen aflezen uit GeoGebra, maar deze zijn niet exact.

Controlepunten Béziercurve 1:	Controlepunten Béziercurve 2:
A (1; 11)	D1 (5,71523; 8.727)
B (2; 12)	B1 (6,45; 7,00029)
C (3,96324; 12,84417)	C1 (7,33064, 4.39149)
D (5,71523; 8,727)	D1 (9; 5)

Tabel 11 Coördinaten controlepunten Béziercurve 1 en 2

Formules Béziercurve 1

De algemene formule voor een derdegraads Béziercurve is:

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

Door de controlepunten van Béziercurve 1 in te vullen krijgen we de formule voor Béziercurve 1:

$$B_1(t) = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 3,96324 \\ 12,84417 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 5,71523 \\ 8,727 \end{pmatrix}$$

De helling van Béziercurve 1 is dus:

$$\frac{y'_1(t)}{x'_1(t)} = \frac{-3(1-t)^2 \cdot 11 + (3(1-t)^2 - 6t(1-t)) \cdot 12 + (6t(1-t) - 3t^2) \cdot 12,84417 + 3t^2 \cdot 8,727}{-3(1-t)^2 \cdot 1 + (3(1-t)^2 - 6t(1-t)) \cdot 2 + (6t(1-t) - 3t^2) \cdot 3,96324 + 3t^2 \cdot 5,71523}$$

Formules Béziercurve 2

De algemene formule voor een derdegraads Béziercurve is:

$$B(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t \mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2 \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3$$

Door de controlepunten van Béziercurve 1 in te vullen krijgen we de formule voor Béziercurve 2:

$$B_2(t) = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 5,71523 \\ 8,727 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 6,45 \\ 7,00029 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 7,33064 \\ 4,39149 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De helling van Béziercurve 2 is dus:

$$\frac{y'_2(t)}{x'_2(t)} = \frac{-3(1-t)^2 \cdot 8,727 + (3(1-t)^2 - 6t(1-t)) \cdot 7,00029 + (6t(1-t) - 3t^2) \cdot 4,39149 + 3t^2 \cdot 5}{-3(1-t)^2 \cdot 5,71523 + (3(1-t)^2 - 6t(1-t)) \cdot 6,45 + (6t(1-t) - 3t^2) \cdot 7,33064 + 3t^2 \cdot 9}$$

Aansluiting Béziercurve 1 en 2

De Béziercurves B_1 en B_2 hebben als gemeenschappelijk controlepunt het punt D(5,71523;8,727). Voor B_1 is dit het eindpunt van de Béziercurve bij $t = 1$ en dus het laatste controlepunt ($\mathbf{P}_3$). Voor B_2 is dit het beginpunt van de Béziercurve bij $t = 0$ en dus het eerste controlepunt ($\mathbf{P}_0$). In dat punt moeten de afgeleiden dus gelijk zijn.

De waarde van de helling van Béziercurve 1 bij $t = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{y'_1(1)}{x'_1(1)} &= \frac{-3(1-1)^2 \cdot 11 + (3(1-1)^2 - 6t(1-1)) \cdot 12 + (6 \cdot 1(1-1) - 3 \cdot 1^2) \cdot 12,84417 + 3 \cdot 1^2 \cdot 8,727}{-3(1-1)^2 \cdot 1 + (3(1-1)^2 - 6 \cdot 1(1-1)) \cdot 2 + (6 \cdot 1(1-1) - 3 \cdot 1^2) \cdot 3,96324 + 3 \cdot 1^2 \cdot 5,71523} \\ &= \frac{-12,35151}{5,25597} = -2,35 \end{aligned}$$

De helling van Béziercurve 2 bij $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{y'_2(0)}{x'_2(0)} &= \frac{-3(1-0)^2 \cdot 8,727 + (3(1-0)^2 - 6 \cdot 0(1-t)) \cdot 7,00029 + (6 \cdot 0(1-t) - 3 \cdot 0^2) \cdot 4,39149 + 3 \cdot 0^2 \cdot 5}{-3(1-0)^2 \cdot 5,71523 + (3(1-0)^2 - 6 \cdot 0(1-t)) \cdot 6,45 + (6 \cdot 0(1-t) - 3 \cdot 0^2) \cdot 7,33064 + 3 \cdot 0^2 \cdot 9} \\ &= \frac{-5,18013}{2,20431} = -2,35 = \frac{y'_1(1)}{x'_1(1)} \end{aligned}$$

Er is dus bewezen dat $\frac{y'_1(1)}{x'_1(1)} = \frac{y'_2(0)}{x'_2(0)}$ en dus sluiten de Béziercurves B_1 en B_2 in punt D vloeiend op elkaar aan volgens G1 continuïteit.

4 Conclusie

Om een vloeiend aansluitende lijn door punten te trekken kunnen Béziercurves gebruikt worden. Deze parameterkrommen opgebouwd uit polynomen hebben over het algemeen net als polynomen een vloeiend verloop. Met één Béziercurve kunnen we gemakkelijk een vloeiende curve trekken tussen twee punten, waarbij deze twee punten het eerste en het laatste controlepunt van de Béziercurve zijn. Met de andere controlepunten kunnen we makkelijk de loop van de curve bepalen.

Als we een vloeiende aansluitende lijn door 3 of meer punten willen trekken, maken we eerst tussen elk tweetal punten dat verbonden moet worden een Béziercurve. Per definitie sluiten de curves nu op elkaar aan met G_0 continuïteit. Om ze vloeiend in elkaar over te laten gaan kunnen we ze bij elke aansluiting laten aansluiten met G_1 of C_1 continuïteit, waarbij C_1 vloeiender is dan G_1 . Bij C_1 gaan de baansnelheden ook vloeiend in elkaar over.

Voor het vloeiend laten aansluiten van twee Béziercurves met G_1 continuïteit kunnen we aan de hand van de formules afleiden aan welke voorwaarden de Béziercurves moeten voldoen. Er moet gelden dat de twee controlepunten van de twee curves naast het overeenkomende controlepunt samen met het overeenkomende controlepunt op 1 lijn liggen, waarbij het overeenkomende punt tussen de andere twee punten ligt.

Voor het vloeiend laten aansluiten van twee Béziercurves met C_1 continuïteit kunnen we weer aan de hand van de formules afleiden aan welke voorwaarden de Béziercurves moeten voldoen. Er moet gelden dat de twee controlepunten van de twee curves naast het overeenkomende controlepunt samen met het overeenkomende controlepunt weer op 1 lijn liggen en daarnaast dat het overeenkomende controlepunt in het midden van deze lijn ligt.

5 Discussie

In de conclusie hebben we vastgesteld wanneer er G_0 , G_1 en C_1 continuïteit geldt tussen twee Béziercurves. In de discussie gaan we in op de betrouwbaarheid van de conclusies die hier getrokken zijn. Daarnaast noemen we een aantal voor- en nadelen van onze onderzoeksmethode en suggesties voor vervolgonderzoek.

Betrouwbaarheid

We hebben voor een groot deel zelf de formules afgeleid of zelf dingen uitgerekend. Dit hebben we meerdere malen gecontroleerd op fouten. Daarnaast kwamen we uit op dingen die we later ook terugvonden in bronnen. Verder hebben we veel bronnen gebruikt en hebben we de informatie die we gebruikten vaak in meerdere bronnen gevonden wat de betrouwbaarheid ten goede komt. Daarbij zorgden we dat de bronnen van voldoende niveau waren.

Voor één van de punten in het praktisch deel hebben we nagerekend of de helling in het overeenkomende punt inderdaad gelijk was bij beide curves, nadat we ervoor hadden gezorgd dat de controlepunten naast het overeenkomende controlepunt samen met het overeenkomende controlepunt op 1 lijn lagen. Hierbij kwamen we er inderdaad op uit dat de hellingen gelijk waren.

Tot slot kun je op verschillende sites Béziercurves tekenen. Als je ze hier zo tekent dat ze ongeveer vloeiend aansluiten blijken de controlepunten naast het overeenkomende controlepunt samen met het overeenkomende controlepunt ongeveer op 1 lijn te liggen. Andersom lijken de Béziercurves vloeiend aan te sluiten als je deze punten bewust op 1 lijn legt. Het lijkt dus waarschijnlijk dat onze conclusie over G_1 continuïteit waar is.

Hoewel we niet altijd de meest betrouwbare bronnen hebben gebruikt, zijn er veel factoren die aantonen dat onze conclusie betrouwbaar is. We gaan er daarom vanuit dat onze conclusie juist is.

Voor- en nadelen van de onderzoeksmethode

Om onze hoofdvraag te beantwoorden hebben we allereerst bronnenonderzoek gedaan. Op deze manier konden we informatie over ons onderzoek verzamelen. Daarnaast zijn er ook een aantal dingen die we zelf berekend en uitgezocht hebben, zodat we onze hoofdvraag konden beantwoorden.

Een voordeel van bronnenonderzoek is dat je door veel bronnen te gebruiken en te vergelijken, betrouwbaar informatie kunt verzamelen. Een ander voordeel is bovendien dat het met het internet gemakkelijk is om snel relevante bronnen te vinden, waardoor we efficiënt aan de slag konden met ons onderzoek.

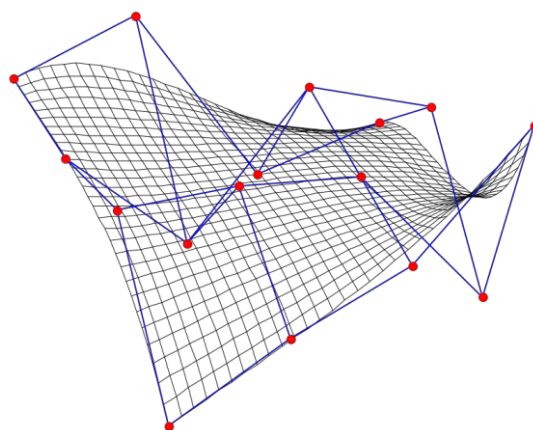
Een nadeel van bronnenonderzoek is echter dat het vinden van goede bronnen op passend niveau lastig is met ons onderwerp. Bronnen over wiskunde zijn vaak op een hoger niveau dan wij aankunnen of juist niet diepgaand genoeg. Vaak werd het begrijpen van bronnen ook bemoeilijkt door het gebruik van Engelse termen en wiskundige tekens waar wij niet bekend mee zijn.

Naast bronnenonderzoek hebben we een aantal dingen zelf bedacht en uitgewerkt. Een voordeel hiervan is dat je goed in het onderwerp komt en je ervoor moet zorgen dat je het goed begrijpt, waardoor je uiteindelijk dus beter snapt hoe alles in elkaar zit. Een nadeel hiervan is echter dat het redelijk gevoelig is voor fouten. Dit hebben we echter zo veel mogelijk beperkt door het te vergelijken met bronnen en het meerdere malen te controleren. Daarnaast kan het soms ook meer werk zijn dan dat het zou zijn als je er een goede bron over vindt.

Mogelijk vervolgonderzoek

Naar aanleiding van ons onderzoek zijn er aantal dingen die nog verder onderzocht zouden kunnen worden. Ten eerste zouden hogere maten van vloeiendheid meer onderzocht kunnen worden. In ons onderzoek hebben we alleen gekeken naar G1 en C1 continuïteit, maar het is ook mogelijk om twee Béziercurves aan te sluiten met G2 of zelfs C2 continuïteit.

Verder kunnen Béziercurves ook driedimensionaal voorkomen, zoals in deelvraag 3 genoemd is. Voor het vloeiend aansluiten zou dit echter waarschijnlijk op ongeveer dezelfde manier gaan. Dit zou in een vervolgonderzoek nog preciezer uitgezocht kunnen worden. Bij driedimensionale Béziercurves zou je het echter ook kunnen hebben over Béziervlakken. In Figuur 38 hieronder kun je een voorbeeld van een Béziervlak zien. Over hoe deze werken en hoe je ze vloeiend laat aansluiten zou een mogelijk vervolgonderzoek gedaan kunnen worden. Dit heeft waarschijnlijk veel toepassingen bij het ontwerpen van driedimensionale voorwerpen.



Figuur 38 Voorbeeld van een Béziervlak

Er bestaan curves die zijn opgebouwd uit Béziercurves, een voorbeeld hiervan is een B-spline. Hiernaar zou ook mogelijk vervolgonderzoek gedaan kunnen worden.

6 Bronnenlijst

- [minicursus] differentiëren. (2005, 21 februari). Geraadpleegd op 17 december 2018, van <https://www.wetenschapsforum.nl/index.php/topic/6783-minicursus-differentieren/>
- Asher, J. (2011, 17 februari). Geometric Continuity. Geraadpleegd op 27 november 2018, van https://communities.bentley.com/products/products_generativecomponents/w/generative_components_community_wiki/2023/geometric-continuity
- Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Doekes, W., Van den Reek, K., Reijenga, R., . . . Wallien, C. (2017). *Moderne wiskunde* (11e ed.). Groningen, Nederland: Noordhoff Uitgevers.
- Barendrecht, P. J. (*Student TU/Eindhoven*) (2012, 7 juni). A gentle introduction to rational Bézier curves and NURBS. Geraadpleegd op 2 februari 2019, van <http://www.redpanda.nl/TUE/GentleIntroToNURBS.pdf>
- Bertka, B. T. (*University of California Santa Cruz*) (2008, 30 mei). An Introduction to Bezier Curves, B-Splines, and Tensor Product Surfaces with History and Applications. Geraadpleegd op 2 februari 2019, van https://fei.edu.br/~psergio/CG_arquivos/IntroSplines.pdf
- Boschman, B. (z.d.). Vectoren. Geraadpleegd op 13 november 2018, van <http://www.megawetenschap.nl/vector.html>
- Bronvermelding.nl. (z.d.). Bron vermelden bij afbeelding. Geraadpleegd op 2 februari 2019, van <http://www.bronvermelding.nl/bron/bron-vermelden-bij-afbeelding.html>
- Casselman, B. (*University of British Columbia, Vancouver, Canada*) (z.d.). American Mathematical Society. Geraadpleegd op 2 februari 2019, van <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-bezier>
- Chambré, C. (*GeoGebra Docu Team*) (z.d.). Een Achtergrondafbeelding invoeren. Geraadpleegd op 22 januari 2019, van <https://www.geogebra.org/m/DkZSJ8ZV>
- Chambré, C. (*GeoGebra Docu Team*) (z.d.). Objecten kopiëren. Geraadpleegd op 22 januari 2019, van <https://www.geogebra.org/m/iQ6Bq42z>
- Codicedemonkey (2010, 21 maart). Computing Bézier curves using de Casteljau's algorithm. [Video]. Geraadpleegd op 29 januari 2019, van <https://www.youtube.com/watch?v=YATikPP2q70>
- Dawkins, P. (2018, 31 mei). Parametric Equations and Curves. Geraadpleegd op 25 september 2018, van <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/ParametricEqn.aspx>
- Dekkers, J. (2010). Application of Bézier curves in Computer-Aided Design (Bachelor thesis). Geraadpleegd van <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:97042938-aadd-4d4d-a099-0a768ae49e30/datastream/OBJ/download>
- Dr. Murtaza Khan (2009, 9 juli). Bezier Interpolation in N-Dimension Space - File Exchange - MATLAB Central. Geraadpleegd op 1 februari 2019, van <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7441-bezier-interpolation-in-n-dimension-space>
- Drawing a continuous Bézier curve. (z.d.). Geraadpleegd op 20 september 2018, van <http://www.algosome.com/articles/continuous-bezier-curve-line.html>

- GeoGebra. (z.d.). About GeoGebra. Geraadpleegd op 26 januari 2019, van <https://www.geogebra.org/about>
- GeoGebra. (z.d.). Punt Commando - GeoGebra Manual. Geraadpleegd op 22 januari 2019, van https://wiki.geogebra.org/nl/Punt_Commando
- Grill, P. (2012, 2 oktober). How to make the limit (mathematics) sign? [Forumpost]. Geraadpleegd op 3 februari 2019, van <https://tex.stackexchange.com/questions/74969/how-to-make-the-limit-mathematics-sign>
- Gross, R. (2012, 29 maart). Bridges, string art and Bézier curves. Geraadpleegd op 27 januari 2019, van <https://plus.maths.org/content/bridges-string-art-and-bezier-curves>
- Hofstede, H. (z.d.). Helling parameterkromme. Geraadpleegd op 27 november 2018, van <https://www.hhofstede.nl/modules/hellingparameter.htm>
- Kalkman, G. N. (z.d.). Het Binomium van Newton. Geraadpleegd op 12 december 2018, van http://www.wiskundeonline.nl/lessen/binomium_van_Newton.htm
- Kantor, I. (z.d.). Bezier curve. Geraadpleegd op 27 januari 2019, van <https://javascript.info/bezier-curve>
- Knaust, H. (z.d.). The "Cubic Formula". Geraadpleegd op 19 december 2018, van <http://www.sosmath.com/algebra/factor/fac11/fac11.html>
- Lay, D. C. (2010). Linear Algebra and Its Applications (4e ed.). New York, Amerika: Pearson Education.
- Li, Z. (2015, 14 juli). Fig. 3. Quadratic Bézier curves combine together for a four sections... [Illustratie]. Geraadpleegd op 1 oktober 2018, van https://www.researchgate.net/figure/Quadratic-Bezier-curves-combine-together-for-a-four-sections-flexible-robot-Two-sensors_fig3_280093529
- Making of a GeoGebra Work - Bezier Curve [Video]. (2010, 5 juni). Geraadpleegd op 22 januari 2019, van <https://www.youtube.com/watch?v=LDUeuV-LImc>
- Malek, M. (*California State University East Bay*). (z.d.). Bezier Curves. Geraadpleegd op 14 november 2018, van <http://www.mcs.csueastbay.edu/~malek/Class/Bezier.pdf>
- Markushevich, A. I. (2015, 27 juni). Polynomial. Geraadpleegd op 30 oktober 2018, van <https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Polynomial>
- Martins, F. B. (2014, 16 april). Bézier Curves and Type Design: A Tutorial. Geraadpleegd op 19 september 2018, van <https://learn.scannerlicker.net/2014/04/16/bezier-curves-and-type-design-a-tutorial/>
- Matusik, W. (*MIT CSAIL*) (2012). Bézier Curves and Splines [College-slides]. Geraadpleegd op 2 februari 2019, van https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-837-computer-graphics-fall-2012/lecture-notes/MIT6_837F12_Lec01.pdf
- Mrs. T (2015, 16 april). Bezier Curves Geogebra Curve Function [Video]. Geraadpleegd op 11 december 2018, van <https://www.youtube.com/watch?v=byyZH5bziXE>
- Murray, A. (2007, 8 september). PostScript, TrueType and OpenType: Curves and Outlines. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://www.cr8software.net/article004.html>
- Nederlandse Wiskunde Olympiade. (z.d.). Polynomen [Handout]. Geraadpleegd op 3 februari 2019.

- O'Mara, S. (2016, 6 mei). Mathematical Intuition Behind Bezier Curves. Geraadpleegd op 2 februari 2019, van <https://buildingvts.com/mathematical-intuition-behind-bezier-curves2ea4e9645681?gi=37eab3018b72>
- One Dimensional Bezier Curves. (2014, 28 augustus). Geraadpleegd op 20 september 2018, van <https://blog.demofox.org/2014/08/28/one-dimensional-bezier-curves/>
- Parameterkrommen. (z.d.). Geraadpleegd op 14 november 2018, van <https://www.wisfaq.nl/pagina.asp?nummer=1896>
- So What's the Big Deal with Horizontal & Vertical Bezier Handles Anyway? – The Australian Graphic Supply Co. (2014, 17 april). Geraadpleegd op 26 november 2018, van <http://theagasc.com/blog/tutorials/so-whats-the-big-deal-with-horizontal-vertical-bezier-handles-anyway/>
- Stackoverflow. (2010, 24 augustus). How to create a cubic bezier curve when given N points in 3D? [Forumpost]. Geraadpleegd op 1 februari 2019, van <https://stackoverflow.com/questions/3526940/how-to-create-a-cubic-bezier-curve-when-given-n-points-in-3d>
- The APA Team. (z.d.). Afbeelding op omslag. Geraadpleegd op 2 februari 2019, van <https://theapateam.blogspot.com/2015/04/afbeelding-op-omslag.html>
- Wickes, T. (2018, 29 mei). An Ode to the Bezier Curve. Geraadpleegd op 19 september 2018, van <https://blog.prototypr.io/an-ode-to-the-bezier-curve-3eb9eca038ff?gi=169f151ab35f>
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézier curve. Geraadpleegd op 2 februari 2019, van https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_curve
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézier surface. Geraadpleegd op 3 februari 2019, van https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_surface
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézierkromme. Geraadpleegd op 2 februari 2019, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkromme>
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). B-spline. Geraadpleegd op 3 februari 2019, van <https://en.wikipedia.org/wiki/B-spline>
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Computeralgebrasysteem. Geraadpleegd op 26 januari 2019, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/Computeralgebrasysteem>
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). GeoGebra. Geraadpleegd op 26 januari 2019, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Gladde functie. Geraadpleegd op 18-12-2018, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Gladde_functie
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Graad (polynoom). Geraadpleegd op 1 januari 2019, van [https://nl.wikipedia.org/wiki/Graad_\(polynoom\)](https://nl.wikipedia.org/wiki/Graad_(polynoom))
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Parametervergelijking. Geraadpleegd op 25 september 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/Parametervergelijking>
- Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Parametric equation. Geraadpleegd op 25 september 2018, van https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_equation

Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Paul de Casteljau. Geraadpleegd op 6 juli 2018, van https://nl.wikipedia.org/wiki/Paul_de_Casteljau

Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Pierre Bézier. Geraadpleegd op 19 september 2018, van https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_B%C3%A9zier

Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Polynomial - Wikipedia. Geraadpleegd op 27 september 2018, van <https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial>

Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Polynoom. Geraadpleegd op 18 december 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/Polynoom>

Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Smoothness. Geraadpleegd op 8 december 2018, van <https://en.wikipedia.org/wiki/Smoothness>

Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Sommatie. Geraadpleegd op 12 december 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/Sommatie>

Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Vector (wiskunde). Geraadpleegd op 30 oktober 2018, van [https://nl.wikipedia.org/wiki/Vector_\(wiskunde\)](https://nl.wikipedia.org/wiki/Vector_(wiskunde))

Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Vierdegraadsvergelijking. Geraadpleegd op 19 december 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/Vierdegraadsvergelijking>

Afbeeldingen

Figuur 1 Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Graad (polynoom) [Illustratie]. Geraadpleegd op 10 januari 2019, van [https://nl.wikipedia.org/wiki/Graad_\(polynoom\)](https://nl.wikipedia.org/wiki/Graad_(polynoom))

Figuur 2 Slimleren.nl. (z.d.). Grafieken van kwadratische functies [Illustratie]. Geraadpleegd op 24 januari 2019, van <https://www.slimleren.nl/onderwerpen/rekenen/12.238/Grafieken+van+kwadratische+functies>

Figuur 3 Wiskunde.net. (z.d.). Antwoorden 3.4 De abc-formule VWO 3 [Illustratie]. Geraadpleegd op 24 januari 2019, van <https://www.wiskunde.net/antwoorden-174/vwo/de-abc-formule.html>

Figuur 11 Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Doekes, W., Van den Reek, K., Reijenga, R., . . . Wallien, C. (2017). *Moderne wiskunde* (11e ed.). Groningen, Nederland: Noordhoff Uitgevers.

Figuur 13 Kantor, I. (z.d.). Bezier curve [Illustratie]. Geraadpleegd op 18 december 2018, van <https://javascript.info/bezier-curve>

Figuur 19 Gross, R. (2012, 29 maart). Bridges, string art and Bézier curves [Illustratie]. Geraadpleegd op 27 januari 2019, van <https://plus.maths.org/content/bridges-string-art-and-bezier-curves>

Figuur 20 Dr. Murtaza Khan (2009, 9 juli). Bezier Interpolation in N-Dimension Space - File Exchange - MATLAB Central [Illustratie]. Geraadpleegd op 1 februari 2019, van <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7441-bezier-interpolation-in-n-dimension-space>

Figuur 21 Gross, R. (2012, 29 maart). Bridges, string art and Bézier curves [Illustratie]. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://plus.maths.org/content/bridges-string-art-and-bezier-curves>

Figuur 24 Minkema College. (z.d.). Logo Minkema College [Illustratie]. Geraadpleegd op 1 februari 2019, van <https://www.minkema.nl/>

Figuur 38 Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézier surface. Geraadpleegd op 3 februari 2019, van https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_surface

Alle overige figuren zijn eigen werk.

Tabellen

Tabel 2 Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézierkromme [Animatie]. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkromme>

Tabel 3 Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézierkromme [Animatie]. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkromme>

Tabel 6 Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézierkromme [Animatie]. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkromme>

Tabel 7 Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézierkromme [Animatie]. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkromme>

Tabel 8 Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézierkromme [Animatie]. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkromme>

Tabel 9 Wikipedia-bijdragers. (z.d.). Bézierkromme [Animatie]. Geraadpleegd op 26 november 2018, van <https://nl.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkromme>

Tabel 10 So What's the Big Deal with Horizontal & Vertical Bezier Handles Anyway? – The Australian Graphic Supply Co [Illustraties]. (2014, 17 april). Geraadpleegd op 26 november 2018, van <http://theagsc.com/blog/tutorials/so-whats-the-big-deal-with-horizontal-vertical-bezierhandles-anyway/>

Alle overige tabellen zijn eigen werk.

7 Logboek

Datum	Minuten Sièna	Minuten Eline	Verrichte werkzaamheden	Afspraken / opmerkingen
<i>totaal aantal uren p.p.:</i>	83,75	86,42		
juni 2018	60	60	onderwerp keuze	<i>definitieve onderwerp vastgesteld</i>
6-7-2018	150	150	opstartdag: hoofdvragen + deelvragen + bronnenonderzoek	<i>in de zomervakantie bronnen doorlezen</i>
2-9-2018	-	20	opfrissen onderwerp en voorbereiden doorstart met begeleider	
3-9-2018	15	-	opfrissen onderwerp en voorbereiden doorstart met begeleider	
4-9-2018	25	25	doorstart PWS met begeleider	<i>elke 2-3 weken afspreken met begeleider tijdens het tweede uur donderdag</i>
4-9-2018	15	15	begonnen met bronnen zoeken	
6-9-2018	50	50	bronnen zoeken + onderzoeksplan + planning	<i>Planning aanhouden</i>
15-9-2018	10	-	persoonlijke planning voor komende week maken	<i>Planning aanhouden</i>
17-9-2018	40	-	Bronnen uitgezocht die nuttig zijn voor eerste deelvraag en een beetje doorgelezen	
18-9-2018	50	50	deelvraag 2 en 5 bronnen verder uitwerken	<i>deelvraag 5 over toepassingen even zo laten (toepassingen staan nu op een rij, nog niet uitgewerkt)</i>
19-9-2018	40	-	deelvraag 1	
19-9-2018	-	90	Bronnen gezocht	<i>Bronnen organiseren + uitwerken</i>
20-9-2018	-	50	Bronnen van gisteren georganiseerd	<i>Bronnen uitwerken</i>
20-9-2018	50	50	Bespreking met begeleider	5-10-2018 inleveren: onderzoeksplan (hoofdvraag, deelvraag, verwachte uitkomsten, planning?) + logboek + bronnen zie document overzicht opmerkingen besprekingen voor verdere toelichting en afspraken
20-9-2018	-	90	Onderzoeksplan uitwerken + aantekeningen bespreking uitwerken	
21-9-2018	35	-	Feedback gegeven op het onderzoeksplan en enkele dingen naar aanleiding van de afspraak uitgewerkt	
21-9-2018	-	10	Feedback op onderzoeksplan verwerken	<i>onderzoeksplan verder uitwerken + begeleider mailen</i>
22-9-2018	10	-	Mail gestuurd naar begeleider over onduidelijkheden binnen het onderzoeksplan	
23-9-2018	40	-	Bronnen bij deelvraag 1 verder uitwerken	
24-9-2018	-	30	Onderzoeksplan 2.1 verder uitgewerkt	
25-9-2018	50	50	Onderzoeksplan H2 af, H3 planning af, activiteiten komende 2 weken bepaald, bronnen parameterkromme	<i>zie planning</i>
25-9-2018	-	40	Onderzoeksplan: deel van de bronnen in apa notering + geordend	

25-9-2018	50	-	Onderzoeksplan: begonnen aan de verwachte uitkomsten	
26-9-2018	50	-	Gewerkt aan verwachte uitkomsten (onderzoeksplan) en bronnen gezocht voor het diffiriëntieren van polynomen	<i>Bronnen over het bewijs van de diffiriëntieerregels van polynomen zijn lastig te vinden.</i>
27-9-2018	50	50	Onderzoeksplan: verwachte uitkomsten (doorlezen + uitwerken), bronnen	
30-9-2018	60	-	Onderzoeksplan: verwachte uitkomsten afmaken	<i>verwachte uitkomsten af alleen nog doorlezen</i>
1-10-2018	-	30	Onderzoeksplan: verwachte uitkomsten doorlezen+verbeteren, bronnen afmaken	<i>bronnen af, laatste verbeteringen verwachte uitkomsten nog uitvoeren, hele onderzoeksplan doorlezen, presentatie maken</i>
2-10-2018	45	45	Presentatie: opzet bedenken + beginnen met uitwerken	<i>verder uitwerken</i>
2-10-2018	-	45	Presentatie: template + basis opmaak, deelvraag 5 + hoofdvraag	
3-10-2018	50	-	Presentatie + onderzoeksplan kleine verbeteringen	
3-10-2018	-	35	Presentatie: verschillende dia's gemaakt + informatie aangevuld; opmaakt aangepast	<i>Tekst uitwerken</i>
4-10-2018	25	25	Bespreking met begeleider	<i>Onderzoeksplan van goede kwaliteit. Kleine dingen aanpassen in presentatie. 10-10-2018 presentatie beoordelingsmoment 1 15-11-2018 volgende bespreking (tussendoor email contact)</i>
4-10-2018	25	25	Presentatie: aangepast naar aanleiding van gesprek + Onderzoeksplan doorgelezen, laatste bronnen aangepast	
5-10-2018	60	-	Presentatie: teksten uitschrijven voor mezelf	
5-10-2018	25	-	Presentatie: teksten uitschrijven voor mezelf	
7-10-2018	-	60	Presentatie: teksten uitschrijven voor mezelf	
8-10-2018	30	-	Presentatie: teksten afmaken	
8-10-2018	-	40	Presentatie: tekst Siëna door gelezen, eigen tekst door genomen, presentatie doorgenomen	
9-10-2018	30	-	Presentatie: tekst doorlezen + leren + feedback doornemen + tekst Eline doornemen	
10-10-2018	50	50	Presentatie samen doornemen	
10-10-2018	20	20	Beoordelingsmoment 1 - presentatie	
14-10-2018	50	-	Gewerkt aan deelvraag 1	
16-10-2018	45	45	Planning komende tijd doornemen; Siena deelvraag 1; Eline deelvraag 2	
17-10-2018	50	-	Gewerkt aan deelvraag 1	
19-10-2018	20	-	Gewerkt aan deelvraag 1	
30-10-2018	45	45	Gewerkt aan deelvraag 1 (Siëna) & 2 (Eline)	
13-11-2018	90	100	Gewerkt aan deelvraag 1 (Siëna) & 2 (Eline)	
14-11-2018	-	100	Gewerkt aan deelvraag 2	
14-11-2018	90	-	Gewerkt aan deelvraag 1 en bronnen doorlezen, deelvraag 2 doorgenomen en opmerkingen geplaatst	

14-11-2018	-	120	Gewerkt aan deelvraag 2, gewerkt aan overzicht voor deelvraag 3&4, opmerkingen Sièna deelvraag 2 verwerkt	
15-11-2018	20	20	Bespreking met begeleider	Voor 5 dec overzicht wat we per deelvraag precies gaan uitwerken en of we alles voor de conclusie hebben om de conclusie te trekken 29-11-2018 volgende bespreking, ook gaan nadenken over praktisch deel
15-11-2018	30	30	Overleg over deelvragen indelen, conclusie en wat we nog willen weten	
15-11-2018	70	-	Afgeleide Béziercurve bepalen op papier (algemene formule en specifiek voor $t=0$ en $t=1$)	
16-11-2018	20	-	Bepaald wanneer twee Béziercurves die aansluiten in het overeenkomende punt dezelfde afgeleide hebben	<i>Bevindingen uitwerken op de computer</i>
17-11-2018	45	-	De uitwerking van de afgeleide van een Béziercurve voor een deel ingetypt op de computer	
20-11-2018	45	45	Gewerkt aan deelvraag 1 (Sièna) & 2 (Eline), overlegd over vorderingen	<i>Eline: komende dagen deelvraag 2 afmaken (ex. bewijzen vector dingen), daarna aan deelvraag 3/4 beginnen</i>
21-11-2018	60	-	De uitwerking van de afgeleide van een Béziercurve voor een deel ingetypt op de computer	
23-11-2018	-	50	Deelvraag 2 afgemaakt (alleen afgeleide nog), opzet deelvraag 3 af	
23-11-2018	20	-	Eline geholpen met afgeleide bij deelvraag 2	
23-11-2018	50	-	Gewerkt aan deelvraag 1	
23-11-2018	-	80	deelvraag 3 bronnen ordenen en uitzoeken + diverse kleine dingen	
26-11-2018	-	120	Gewerkt aan deelvraag 3	
26-11-2018	90	-	Gewerkt aan deelvraag 1	
27-11-2018	-	40	2.2.3 afgemaakt + overzicht van vorderingen	
27-11-2018	45	45	vorderingen besproken + afspraken gemaakt, begonnen aan conclusie, deelvragen verder uitwerken	
27-11-2018	60	60	Eline: 2.2.4 over snelheidsvector (af)gemaakt Sièna: Gewerkt aan deelvraag 4	
28-11-2018	50	-	Gewerkt aan deelvraag 4	
28-11-2018	-	20	Opmerkingen verwerkt + stukken doorgelezen	
28-11-2018	-	50	Gewerkt aan deelvraag 3: soorten Béziercurve	
29-11-2018	35	35	Bespreking met begeleider / beoordelingsmoment 2	<i>voor 5-12</i> conclusie aanpassen in punten per deelvraag en dan de hoofdvraag; voor de rest goed bezig en ga zo verder met uitwerken van de deelvragen; toepassing minkema logo maken in programma goed idee
29-11-2018	15	15	Werken aan conclusie	
3-12-2018	20	-	Conclusie volledig uitgewerkt in punten	
4-12-2018	45	90	Eline: werken aan deelvraag 3 + algemene dingen Sièna: werken aan deelvraag 3 + conclusie + algemene dingen	

4-12-2018	20	-	Uitwerking afleiding van de afgeleide van een Béziercurve afgemaakt en naar Eline gemaild	
4-12-2018	-	30	Begonnen met afleiding van de afgeleide van een Béziercurve uit te werken	
5-12-2018	5	-	LaTeX bestanden van afleiding van de afgeleide van een Béziercurve naar Eline gemaild	
8-12-2018	-	50	LaTeX bestanden overgenomen in Word	<i>nog verder uitwerken</i>
8-12-2018	60	-	Gewerkt aan deelvraag 4	
8-12-2018	-	30	Laatste laat LaTeX bestanden overgenomen in word van deelvraag 3.2	
11-12-2018	50	100	Samen: overleg over prioriteiten voor deze week Sièna: 2.4 Eline: geogebra beziercurve maken +oefenen, 2.2, 2.3	
12-12-2018	40	-	2.4.1 afgerond en begonnen met 2.4.2	
12-12-2018	50	-	Verder gewerkt aan 2.4.2 en 2.1	
12-12-2018	150	-	2.4.2 afgerond en deels afgerond van 2.1 wat we inhoudelijk willen laten controleren	
12-12-2018	60	-	van 2.1 afgemaakt wat we inhoudelijk willen laten controleren	
13-12-2018	60	-	2.1 formules deels uitgewerkt in word	
13-12-2018	-	120	Verschillende paragrafen formules uitgewerkt voor wat we inhoudelijk willen laten controleren	
13-12-2018	30	30	Laatste formules uitgetypt en bestandje gecontroleerd, opgestuurd naar docent	
17-12-2018	30	-	Gewerkt aan 2.1.5	
18-12-2018	45	-	Gewerkt aan 2.1	
18-12-2018	45	80	- gewerkt aan deelvraag 2.3 - afleiding formule Béziercurve graad 2 - overlegd over vorderingen	
19-12-2018	50	-	Gewerkt aan 2.1.4 en 2.1.5	
20-12-2018	35	35	Bespreking met begeleider	<i>ingeleverde stukken besproken + andere vorderingen</i>
20-12-2018	15	15	overleg samen	
20-12-2018	-	20	opmerkingen in gescand, samengevoegd en geupload naar drive	
4-1-2019	40	-	Gewerkt aan 2.1.3, opmerkingen doorgekeken en naar bronnen gezocht voor 2.3	
8-1-2019	45	70	praktisch deel, overleg over tijdplanning komende weken en vorderingen	
9-1-2019	-	30	paragraaf 2.1.1 en 2.1.2 in word	<i>alleen bronvermelding nog</i>
10-1-2019	50	50	Eline: paragraaf 2.1.1 en 2.1.2 bronvermelding + verwerking opmerkingen; begonnen aan 2.2 in word Sièna: Gewerkt aan 2.1.3	
10-1-2019	-	20	paragraaf 2.2.1 in word gezet + bronvermelding + begonnen aan afbeeldingen	<i>afbeeldingen afmaken</i>
20-1-2019	-	90	paragraaf 2.2.1 afbeeldingen afgemaakt + hele paragraaf afgerond in word	
22-1-2019	30	90	H3: beziercuves in paint op logo gezet, 1e 4 beziercurves in ggb gezet	
23-1-2019	-	90	H3: beziercurve in ggb ongeveer af	

23-1-2019	160	-	2.1 afgerond	
24-1-2019	35	35	Bespreking met begeleider	4-02-2019 inleveren via magister 5-02-2019 op papier inleveren; inhoud presentatie doorgenomen
24-1-2019	65	125	Sièna: Gewerkt aan 2.3.1 Eline: 2.1 in word gezet	
24-1-2019	50	50	Sièna: 2.1 in word nagekeken Eline: geogebra meer afbeeldingen gemaakt	<i>Vrijdag: samen praktisch deel 1 punt uitwerken, Eline opmerkingen Sièna verwerken</i>
25-1-2019	-	50	Eline: geogebra analyse beziervcurve afbeeldingen gemaakt + coördinaten afgelezen; geogebra animatie functie uitgezocht en werkend gekregen	<i>Vanmiddag: mail over eisen pws doorlezen + website</i>
25-1-2019	160	160	Samen: email over inleveren pws doorgenomen Sièna: Gewerkt aan 2.3.1 + 2.4 Eline: geogebra punt uitgewerkt; opmerkingen Sièna verwerkt	<i>Eline: opmerkingen verwerken nog afmaken</i>
25-1-2019	-	30	Opmerkingen Sièna (24-1) verder verwerkt	
26-1-2019	-	60	3.1 werkwijze begonnen uit te werken + geogebra basis beziervcurve gemaakt voor uitleg doeleinde	
27-1-2019	300	-	Gewerkt aan 2.3.1 en bijna afgerond, werkwijze praktisch deel gecontroleerd en 2.4 afgerond	
27-1-2019	-	5	Opmerkingen Sièna doorgenomen + gereageerd (op telefoon tijdens stage)	
28-1-2019	50	-	Opzet gemaakt voor de conclusie	
28-1-2019	-	90	2.4 in word gezet; kleine dingen aan 2.2 verbeterd in word; 2.3.2 in word gezet; paragrafen voor structuur vast met kopjes in word	<i>Dinsdag: met Sièna naar 2.2.2 en 2.3 kijken</i>
29-1-2019	-	55	Opmaak consequent gemaakt; kleine aanpassingen gedaan; bron vermelding; gewerkt aan H3; 2.3.1 casteljau algoritme doorgenomen	
29-1-2019	45	45	2.3.1 doorgenomen; algemene voorgang doorgenomen; 2.2.2 doorgenomen	<i>Siena paragraaf conclusie van deelvraag 1,3,4 Eline van deelvraag 2</i>
30-1-2019	50	-	Conclusie deelvraag 1, conclusie afgerond en begonnen aan conclusie deelvraag 4	
30-1-2019	20	60	Email met conclusie en magister opdr naar van den berg gemaild; conclusie + 2.1 conclusie doorgenomen; 2.2 in word; begonnen met 2.3.1 in word	<i>bronvermelding 2.2. doen</i>
30-1-2019	-	60	bronvermelding 2.2; 2.3.1 bijna helemaal in word; 2.3.3 in word; 2.3.4 in word	<i>tabellen lijst toevoegen en updaten; bronnenlijst figuren updaten; 2.3.4 verder in word; 2.3.3 controleren</i>
30-1-2019	45	-	Conclusies van deelvragen verder geschreven en 2.3.1 in word gecontroleerd (versie 20190130-3)	
30-1-2019	-	30	kleine dingen aangepast; stappenplan 2.3.1 in tabel gezet en afbeeldingen geogebra gemaakt	
30-1-2019	-	100	2.2 afbeeldingen gecentreerd en bijschriften aangepast; 2.3.1 stappenplan beziervcurve afgemaakt incl afbeeldingen; 2.3.1 vectoren latex omgezet naar vectoren word; conclusies deelvragen (1,3,4) in word; opmerkingen Sièna	

			verwerkt (versie 20190130-1 en 29-3); gewerkt aan H3	
1-2-2019	-	15	gewerkt aan H3	
1-2-2019	170	170	Eline: gewerkt aan H3 Sièna: Afbeeldingen gemaakt, begonnen aan discussie en onderdelen doorgelezen en gecontroleerd Samen: Planning doorgenomen	
1-2-2019	-	75	H3 afgerond (staat al in word PWS); 2.3.3 nagekeken en afgemaakt	
1-2-2019	-	45	Bronnenlijst gemaakt tot nu toe	<i>Afbeeldingen en tabellen moeten nog</i>
2-2-2019	-	75	2.1 / 2.3.1 kleine dingen aangepast qua formule lay-out; conclusie deelvraag 2 geschreven; bronvermelding bijgewerkt + afbeeldingen en tabellen bronvermelding	
2-2-2019	60	-	Discussie afgemaakt en opzet inleiding gemaakt	
2-2-2019	-	20	discussie doorgelezen; 2.3.4 afgerond; kleine aanpassingen bronnenlijst	
2-2-2019	20	-	Stukje over het binomium van Newton herschreven, een beetje verder gewerkt aan de inleiding en deels de opmerkingen van Eline verwerkt	
3-2-2019	90	90	2.1.2 veranderingen Sièna in word gezet; inleiding afronden; opmerkingen verwerken uit drive;	
3-2-2019	110	110	Inleiding + 2.1 grondig doorgelezen en zo goed als af	
3-2-2019	45	45	2.2 grondig doorgelezen en zo goed als af	
3-2-2019	95	95	2.3 grondig doorgelezen en zo goed als af; extra afbeeldingen toegevoegd	
3-2-2019	70	70	2.4 + 3 + 4 + 5 grondig doorgelezen en zo goed als af; voorblad ontworpen	
3-2-2019	35	35	laatste keer doorlezen 1 - 2.3	
3-2-2019	120	120	laatste keer doorlezen rest; laatste kleine dingen aangepast; reflectie geschreven; logboek in verslag gezet	<i>verslag inleveren via magister en op papier</i>

Reflectie

In het begin van ons onderzoek was het vinden van geschikte bronnen lastig. Echter naarmate we meer informatie hadden verzameld was ook het vinden van verdere geschikte bronnen makkelijker. Het vinden van geschikte bronnen was in het begin vooral lastig omdat we nog nooit een wiskundig bronnenonderzoek hadden gedaan. Hierdoor wisten we af en toe niet goed waar we moesten zoeken.

Over het algemeen vonden wij de samenwerking goed gaan. We vulden elkaar aan met de dingen die we leuk vonden om te doen dus daarom konden we een goede taakverdeling maken waar we ons beide in konden vinden. We hebben veel zelfstandig gewerkt. Soms werkten we naast elkaar aan een eigen onderdeel, maar vaak werkten we er op andere momenten aan. Echter konden we altijd mondeling of via digitale middelen vragen aan elkaar stellen. Daarnaast hebben we elkaars werk goed gecontroleerd. Hierdoor wisten we goed waar we beiden mee bezig waren en daarnaast konden we er zo (slordigheids)fouten uit halen. Als laatste hielden we ons goed aan de afspraken die we met elkaar en de begeleider maakten wat het prettige werken verbeterde.

Al met al kijken wij met trots terug op ons onderzoek en het resultaat daarvan. We hebben er zeker veel van geleerd.