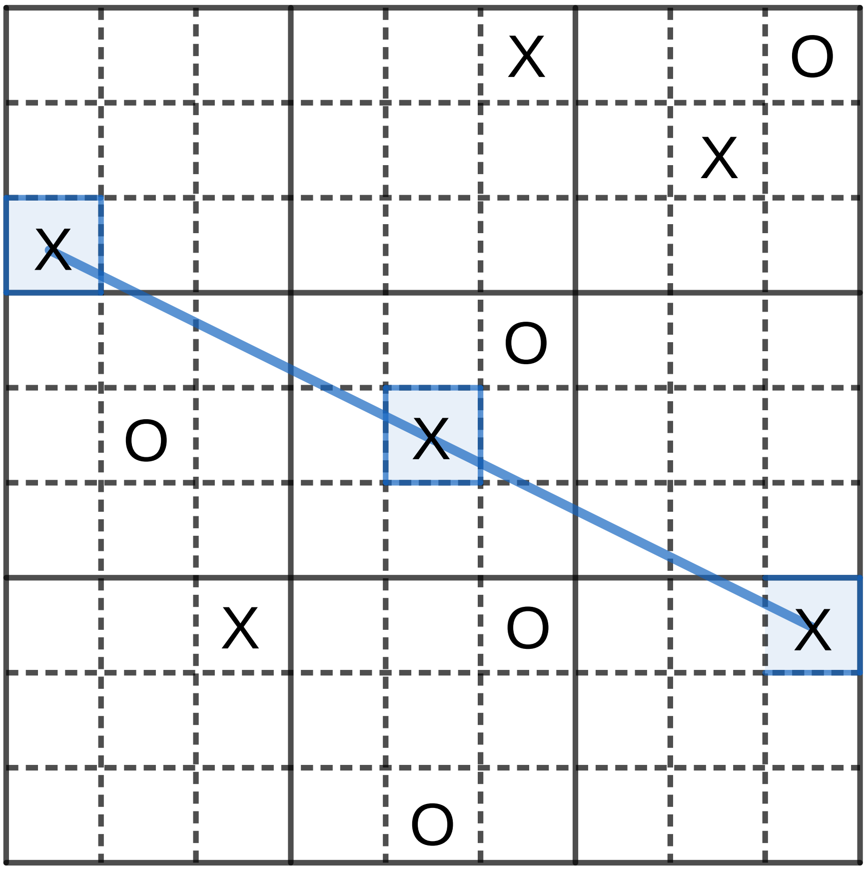
Profielwerkstuk wiskunde

Femke Voogt



Hoger-dimensionaal boter-kaas-en-eieren

Een spelletje voor gevorderden

In samenwerking met:
Transtrend
Harold de Boer
Michael van Enkhuizen
Meike Geertsma

Begeleider Alphons de Lange
Klas RA6b
Schooljaar 2020-2021
Datum 9 februari 2021

Aan De bewoners der Ruimte in 't algemeen
En aan H. C. in het bizonder
Wordt dit werk gewijd
Door een needrig inboorling van Platland
In de hoop dat, Even als hij werd ingewijd in de geheimen
Der drie afmetingen
Na te voren slechts met twee bekend te zijn geweest,
Zoo ook de burgers van dat hemelsche gewest
Steeds hooger en hooger mogen streven
Naar de geheimen van vier, vijf of zelfs zes dimensies,
En daardoor mogen medewerken
Tot verruiming der Verbeeldingskracht
En tot de mogelijke ontwikkeling
Dier allerzeldzaamste en toch uitstekende gave, Bescheidenheid,
Onder de hoogere geslachten
Der lichamelijke menschheid.

Flatland (1884) door Edwin Abbott Abbott,
vertaald door D. Mijs (1886).

Samenvatting

Boter-kaas-en-eieren is een spel dat je overal kunt spelen. Het is een simpel spelletje. Boter-kaas-en-eieren lijkt misschien te makkelijk voor een profielwerkstuk wiskunde, maar het tegendeel is waar! Niet alleen de grootte van het bord, maar ook de dimensie van het bord kunnen we veranderen en dan ontstaat er een heel interessant spel waar veel wiskunde bij komt kijken. In dit profielwerkstuk ga ik onderzoeken wat het keerpunt tussen winst en gelijkspel voor verschillende dimensies is. Het exacte keerpunt heb ik niet gevonden, maar ik introduceer in hoofdstuk 8 wel mijn eigen vermoeden voor een aangescherpte grens.

De eerste drie hoofdstukken bestaan uit een introductie van het spel hoger-dimensionaal boter-kaas-en-eieren. Een lezer die geen ervaring heeft met de wereld van hoger-dimensionaal boter-kaas-en-eieren kan zo toch mijn profielwerkstuk lezen. In hoofdstuk 1 en 2 bespreek ik het bekende spel boter-kaas-en-eieren en de dimensies na de derde dimensie. In hoofdstuk 3 combineer ik dit tot het spel hoger-dimensionaal boter-kaas-en-eieren. Ik introduceer wat handige notaties en symbolen die nodig zijn om de wiskundige bewijzen te kunnen volgen. Ik geef voorbeelden om vertrouwd te raken met deze notaties en symbolen.

Daarna is het tijd voor de echte wiskunde met bewijzen en berekeningen! We gaan slim rijen tellen. Bij dit combinatorische deel is dubbeltellen het grootste gevaar. In hoofdstuk 5 vergeten we de dimensies groter dan twee even. Ik laat zien dat gelijkspelen op een groter bord steeds makkelijker wordt en ik introduceer paarstrategieën. Daarna gaan we weer terug naar de hogere dimensies en zullen we tegen de grenzen van de huidige wiskunde aanlopen. De stelling van Hall over grafentheorie komt aan bod om de bovengrens $S = \left\lfloor \frac{2D}{\ln 2} \right\rfloor$ aan te tonen. In hoofdstuk 7 bepalen we een ondergrens.

In hoofdstuk 8 beantwoord ik de hoofdvraag en introduceer ik mijn eigen vermoeden. De weg naar het beantwoorden van mijn hoofdvraag kent vele hindernissen in de vorm van onopgeloste problemen. Ik zal ze toelichten in dit profielwerkstuk. Het is niet erg dat ik het exacte keerpunt niet gevonden krijg. De route naar de hoofdvraag is misschien nog wel mooier dan de beantwoording van de hoofdvraag zelf! Daarna zal ik nog wat bespreken over de toepassingen van dit probleem en speltheorie in het algemeen. Dit profielwerkstuk is een literair onderzoek, maar dat betekent niet dat er geen praktische toepassingen zijn. Deze toepassingen bespreek ik daarom ook. Verder licht ik nog wat dingen toe over het programma Overleaf.

Inleiding

In dit profielwerkstuk wiskunde neem ik u mee naar de wereld van een algemenere variant van het bekende spelletje boter-kaas-en-eieren. Ik zal u meenemen naar de wereld van hogere dimensies. Dat klinkt misschien ingewikkeld (en dat wordt het uiteindelijk ook), maar het is vooral heel interessant! De hoofdvraag heb ik gekregen van Harold de Boer, Michael van Enkhuizen en Meike Geertsma. Zij werken bij het bedrijf Transtrend en zij hebben mij geholpen bij dit profielwerkstuk. Zonder deze drie personen was het profielwerkstuk nooit geworden wat het nu is! Verder kan dit profielwerkstuk natuurlijk niet zonder mijn schoolbegeleider, mentor en docent Wiskunde B Alphons de Lange die mij tips heeft gegeven en af en toe mijn enthousiasme moest temperen. Ik wil ook Niels van der Veen bedanken. Hij heeft mijn laatste vragen over Overleaf beantwoord. Zijn trucjes hebben mijn opmaak naar een volgend niveau gebracht. Ik dank mijn begeleiders voor hun hulp.

De vierde dimensie is voor ons wat de derde dimensie is voor de Platlanders (zie pagina 2). In dit verhaal laat Edwin Abbott Abbott zien hoe de Platlanders, die leven in een tweedimensionale wereld, de wereld van hogere dimensies ontdekken. Ik voel op dit punt een overeenkomst tussen mij en de schrijver. Ik probeer de driedimensionale lezer ook een hogere dimensie uit te leggen. De vijfde dimensie en hogere dimensies zullen eveneens aan bod komen. Binnen deze wereld gaan we het bekende spel boter-kaas-en-eieren spelen.

De hoofdvraag van dit literaire onderzoek is:

Wat is de kleinste S voor alle D waarvoor geldt dat beide spelers die het spel S-op-een-rij boter-kaas-en-eieren spelen in een D-dimensionale S-kubus met $S > 1$ en $D \geq 1$, elkaar altijd van winst kunnen behouden?

In simpelere taal staat hier dat ik op zoek ga naar het kantelpunt tussen winnen en gelijkspelen als twee spelers boter-kaas-en-eieren spelen op een bord met een variabele grootte en dimensie. Via de zeven deelvragen neem ik u mee naar de beantwoording van deze hoofdvraag. Deze hoofdvraag zal dan steeds duidelijker worden. Na hoofdstuk 3 is het al mogelijk om boter-kaas-en-eieren te spelen in hogere dimensies. Daarna komt de wiskunde pas echt om de hoek kijken. Volledige inductie en het bewijs uit het ongerijmde komen aan bod. De lezer die verder leest, leert meer over winstrategieën en paarstrategieën. Hoe kan ik gegarandeerd winnen? Meedoen is natuurlijk leuk, maar winnen maakt boter-kaas-en-eieren leuker!

Beste lezer, ga er goed voor zitten en voel u niet beschaamd als u tijdens het lezen de behoefte voelt om 5-op-een-rij boter-kaas-en-eieren te spelen in de vierde dimensie! Laat u verrassen door de wiskunde achter dit spel en u zult zien dat ik u stap voor stap meeneem naar de grenzen van de wiskunde.

Inhoudsopgave

1 | Het spel boter-kaas-en-eieren

Hoe speel je boter-kaas-en-eieren?

Boter-kaas-en-eieren is een spelletje waar je maar weinig voor nodig hebt. Het is makkelijk te leren. Pak een papiertje en teken een vierkant. Deel dit vierkant op in negen vakjes: drie per kolom en drie per rij. Binnen dit 3-bij-3-vierkant ga je boter-kaas-en-eieren spelen. Je moet alleen nog een tegenspeler vinden, want boter-kaas-en-eieren speel je niet alleen.

Het doel van het spel is om 3-op-een-rij te maken met je eigen symbool. Dan heb je gewonnen. Hiervoor gebruik je twee symbolen: X en O. Elke speler heeft zijn of haar eigen symbool. Om beurten mag je jouw eigen symbool tekenen ergens in een vakje van het vierkant. Je wint als je drie keer jouw symbool in een rechte lijn hebt. Dit mag horizontaal, verticaal en diagonaal zijn. (Pilgrim, 1995)

Een spel tussen twee beginners zal nog regelmatig gewonnen en verloren worden. Na een aantal potjes gaat het vast beter, maar de tegenstander wordt ook beter. Een spel met gevorderde spelers zal steeds vaker in een gelijkstand eindigen. Waarom dit zo is, leg ik uit in hoofdstuk 5. Het spel gaat uiteindelijk niet meer over winnen, maar over niet-verliezen. Dat is toch echt wat anders.

In dit profielwerkstuk gelden de volgende voorwaarden tenzij anders aangegeven:
- Er wordt met twee spelers gespeeld;
- De beginner speelt met X en de tegenspeler met O;
- De spelers spelen perfect. Dat houdt in dat ze altijd de meest gunstige zet doen en dat ze geen fouten maken. (Infinite Series, 2017)

2 | Kubussen in hogere dimensies

Wat is een D-dimensionale kubus met $D \geq 4$?

In het begin van de eerste klas heb ik geleerd wat een kubus is. Het is een ruimtefiguur met zes vlakken en al deze vlakken zijn vierkant. Een vierkant is een plat vlak en alle zijden zijn even lang. De hoeken tussen de zijden zijn 90°. Dat was duidelijk en goed te begrijpen als brugklasser. Ingewikkelder wordt het als je vertelt dat een vierkant eigenlijk onze vertrouwde kubus is, maar dan een dimensie lager. Er zijn nog meer wonderbaarlijke dingen over kubussen in andere dimensies te zeggen. Dit gaat veel verder dan die 'gewone' kubus uit de eerste klas. Die standaard kubus die we kennen is een 3-dimensionale kubus. Het heeft een lengte, een breedte en een hoogte. Een kubus heeft veel gemeen met de wereld waarin wij leven, want die is ook 3-dimensionaal.

Het blijft niet bij drie dimensies. Deze tekst leest u waarschijnlijk op papier of op een scherm, maar deze tekst heeft geen dieptedimensie. Het gaat van links naar rechts en van boven naar beneden, maar daar blijft het bij. Een tekening op papier heeft dit ook. Dit zijn voorbeelden van 2-dimensionale dingen. 2-dimensionale dingen hebben een lengte en een breedte. Een vierkant is ook een voorbeeld van een 2-dimensionaal figuur.

Een vierkant en een kubus hebben veel gemeen. Stelt u zich een kubus voor op een leeg vel papier. Stel dat we deze kubus nu het vlak in kunnen drukken zodat de kubus in het vlak staat, dan zou er vierkant op het papier staan. We hebben de zijden die voor de hoogte zorgen, weggedrukt. Andersom werkt het ook. Stelt u zich een vierkant op een papier voor en 'trek' deze *loodrecht* uit het papier. Nu krijgt het vierkant een extra dimensie, namelijk de hoogtedimensie. Een vierkant is dus eigenlijk de 2-dimensionale variant van de 3-dimensionale kubus.

Nu u een beter beeld heeft van de 2-dimensionale en 3-dimensionale wereld, de platte en ruimtelijke wereld, kunnen we iets verder gaan. Er bestaat ook zoiets als 0-dimensionaal en 1-dimensionaal. Een 0-dimensionale kubus is een oneindig dunne stip. Het is een stip zonder lengte en breedte. Als de stip wel een lengte en breedte heeft, dan is de stip eigenlijk een 2-dimensionale ingekleurde cirkel. Een 1-dimensionale kubus is een lijnstuk zonder dikte. Het lijnstuk heeft wél een lengte, maar géén breedte. Men kan een kubus tekenen in een 1-dimensionale wereld. Dit is dus gewoon een recht lijnstuk. Wil je een huis tekenen in de eerste dimensie? Ook dit is niets meer dan een streep op het papier. Lekker makkelijk, zo kan iedereen leren tekenen…

We kunnen ons dus een voorstelling maken van de dimensies nul tot en met drie, maar voor een wiskundige blijft het daar niet bij. Waarom zouden we ons tot het getal drie beperken? Waarom pakken we niet vier? Of vijf? Of duizend? Tijd wordt wel eens gezien als de vierde dimensie. Ik kijk hier niet naar de tijddimensie, maar naar een vierde ruimtedimensie. Het is lastig om ons daar iets bij voor te stellen, maar het is niet onmogelijk. De varianten nul tot en met drie kunnen als een klein geval dienen voor hogere dimensies. Er zijn namelijk wat leuke patronen te zien in een stip, lijn, vierkant en kubus. (Noort, 2013)

Het eerste patroon heeft te maken met de hoekpunten. Deze kun je tellen:
Een 0-dimensionale kubus, oftewel een stip, heeft 1 hoekpunt.
Een 1-dimensionale kubus, oftewel een lijnstuk, heeft 2 hoekpunten die verbonden zijn. Dat maakt het een lijnstuk.
Een 2-dimensionale kubus, oftewel een vierkant, heeft 4 hoekpunten die verbonden zijn (niet de diagonalen). Dit maakt het een vierkant.
Een 3-dimensionale kubus, oftewel de kubus die een brugklasser als kubus leert herkennen, heeft 8 hoekpunten die verbonden zijn.

Dit kun je ook doen met het aantal kanten.
Een 0-dimensionale kubus heeft 0 kanten.
Een 1-dimensionale kubus heeft 2 kanten.
Een 2-dimensionale kubus heeft 4 kanten (een *vier*kant).
Een 3-dimensionale kubus heeft 6 kanten.

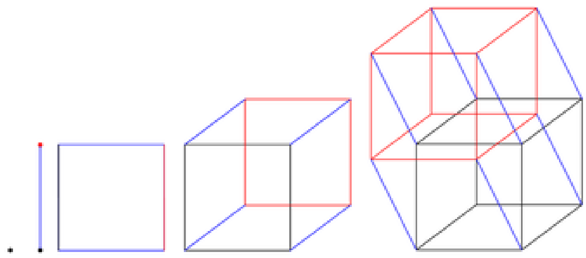
Dimensie	Hoekpunten	Kanten
0	$1 = 2^0$	$0 = 2 \cdot 0$
1	$2 = 2^1$	$2 = 2 \cdot 1$
2	$4 = 2^2$	$4 = 2 \cdot 2$
3	$8 = 2^3$	$6 = 2 \cdot 3$
4	?	?
5	?	?

Tabel 2.1: Overzicht patronen

Hier is een mooi patroon in te zien. Het lijkt zo te zijn dat voor een zeker $D \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat er 2^D hoekpunten zijn en $2D$ kanten in een D-dimensionale kubus. Dit betekent dat een 4-dimensionale kubus ($D = 4$) $2^4 = 16$ hoekpunten en $2 \cdot 4 = 8$ kanten heeft en dat een 5-dimensionale kubus ($D = 5$) $2^5 = 32$ hoekpunten en $2 \cdot 5 = 10$ kanten heeft. Dit is natuurlijk al een mooi patroon, maar ook in het tekenen van zo'n hoger dimensionale kubus kun je gebruik maken van de lagere dimensies.

Pak een 0-dimensionale kubus. Verdubbel het aantal hoekpunten (je hebt er dus 2 hoekpunten) en verbind deze punten. Nu heb je een 1-dimensionale kubus.
Pak deze 1-dimensionale kubus. Verdubbel het aantal hoekpunten (je hebt nu dus 4 hoekpunten) en verbind deze punten. Nu heb je een vierkant, oftewel een 2-dimensionale kubus.
Pak deze 2-dimensionale kubus. Verdubbel het aantal hoekpunten (je hebt nu dus 8 hoekpunten) en verbind deze punten. Nu heb je een standaard kubus, oftewel een 3-dimensionale kubus.

Dit patroon is door te zetten voor $D = 4$. Pak een 3-dimensionale kubus. Verdubbel het aantal hoekpunten (je hebt nu dus 16 hoekpunten) en verbind deze punten. Nu heb je een 4-dimensionale kubus[1]! De zwarte en rode kubus zijn de 3-dimensioanale kubussen die verbonden zijn met de blauwe lijnen.

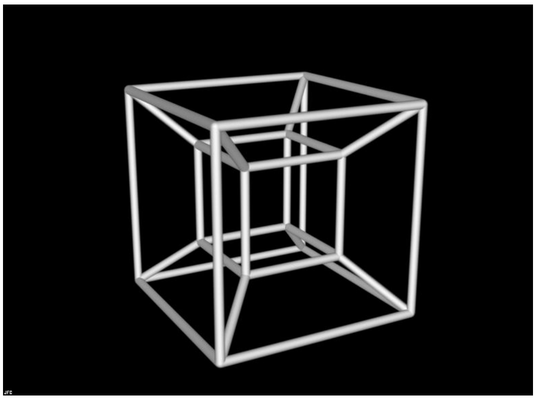


Figuur 2.1: D-dimensionale kubus uit twee $D-1$-dimensionale kubussen (Kau, sd)

Algemeen geldt:

Pak een D-dimensionale kubus[2]. Verdubbel het aantal hoekpunten (je hebt nu 2^{D+1} hoekpunten) en verbind de punten. Nu heb je een $D+1$-dimensionale kubus.

We leven in een 3-dimensionale wereld, maar dat betekent dus niet dat er niet iets kan bestaan als een 4-dimensionale kubus. Een 4-dimensionale kubus ziet ongeveer als volgt uit:



Figuur 2.2: 4-dimensionale kubus (Darling, sd)

Dit is dus een 3-dimensionale weergave van een 4-dimensionale kubus op een 2-dimensionaal vlak (het plaatje).

[1]Een 4-dimensionale kubus wordt ook wel een Tesseract genoemd. (Darling, sd)
[2]Een D-dimensionale kubus wordt ook wel hyperkubus genoemd. (Brandhof, 2018)

3 S-op-een-rij boter-kaas-en-eieren in D dimensies

Hoe speel je S-op-een-rij boter-kaas-en-eieren in een D-dimensionale S-kubus met $S > 1$ en $D \geq 1$?

Deze vraag schrikt een niet-wiskundige lezer misschien al snel af. Twee variabelen die gaan tot het oneindige, dat lijkt u misschien wat lastig om te spelen. Laten we bij het makkelijkste voorbeeld beginnen: ons vertrouwde potje boter-kaas-en-eieren. Dat is een plat vlak en je probeert 3-op-een-rij te bereiken. Uit de vorige vraag blijkt dat een plat vlak eigenlijk een 2-dimensionale kubus is. Een standaard potje boter-kaas-en-eieren is dus 3-op-een-rij boter-kaas-en-eieren in een 2-dimensionale kubus, dus voor S vullen we 3 in en voor D pakken we 2. Als we 4-op-een-rij spelen in een $4 \times 4 \times 4$-kubus, dan is $S = 4$ en $D = 3$. S is dus de grootte van het bord. D geeft de dimensie van het bord aan.

3.1 Toenemende lengte

Twee variabelen zijn lastiger om mee te rekenen dan één variabele. We beginnen daarom met $D = 2$ als constante. We kijken nu dus alleen naar spelletjes op een plat vlak. Dit is makkelijker voor te stellen op papier. Onze enige variabele is nu dus S met $S \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Merk op dat $S = 1$ niet mee mag doen met onze potjes. Stel dat het wel mag en kies $S = 1$. Dan speel je dus 1-op-een-rij en ziet het bord er als volgt uit:

Tabel 3.1: Het bord als $S = 1$ en $D = 2$

De beginner mag dan zijn of haar teken plaatsen in dit ene vakje. Er is geen keus. De beginner kan dus niet eens verliezen en zijn tegenspeler komt niet aan de beurt. Dit is zo flauw dat $S = 1$ niet mee mag doen. Dit geldt natuurlijk niet alleen voor $D = 2$, maar ook voor andere D. Neem bijvoorbeeld $D = 3$ en $S = 1$. Je speelt in een $1 \times 1 \times 1$-kubus. Je bent op zoek naar 1-op-een-rij, dus bij het plaatsen van een symbool heeft de beginner al gewonnen. Aangezien dat de tegenspeler niet eens aan de beurt komt, tel ik deze niet mee als een spel.

$S = 2$ is dus de kleinste S waar we naar kijken. Dit geval is even flauw. Probeer maar eens 2-op-een-rij te spelen op het volgende bord:

Tabel 3.2: Het speelveld als $S = 2$ en $D = 2$

De beginner zet zijn symbool in een hoekje (anders kan ook niet) en de tegenspeler moet drie opties voor 2-op-een-rij blokkeren met maar één symbooltje. Dat is onmogelijk. De tegenspeler komt deze keer wel aan de beurt en dus ik zie het hier als een spel.

Het standaard spel is als $S = 3$ en $D = 2$ en dit spel kan altijd eindigen in een gelijkspel mits beide spelers perfect spelen (één van de voorwaarden). Hier ga ik nu niet verder op in, want dit hoort bij hoofdstuk 5. $S = 3$ is het kleinste getal waar de tegenspeler ook echt nog iets kan blokkeren. De tegenspeler is niet automatisch kansloos. De speler moet wachten op een fout en dan toeslaan, maar vanwege het feit dat onze spelers perfect spelen, zal dit niet voorkomen. In de perfecte situatie kan de tegenspeler wel gelijkspel afdwingen. Maar waarom zou je het houden bij 3-op-een-rij? Waarom niet 4-op-een-rij, 10-op-een-rij of zelfs 28179-op-een-rij? Als je een speelbord tekent met een hogere S, dan teken je bijvoorbeeld een 4×4-vierkant, of in het algemeen een $S \times S$-vierkant. Zo ziet dat eruit:

Tabel 3.3: Het bord als $S = 4$

Tabel 3.4: Het bord als $S = 5$

Tabel 3.5: Het bord als $S = 6$

Dit zet je steeds door voor elke S. De regels van het spel veranderen niet. Het is een makkelijke aanpassing op het standaard boter-kaas-en-eierenspel.

3.2 Hogere dimensie

Nu we gekeken hebben naar een variabele S en een constante $D = 2$, draaien we het om. Kies $S = 3$ en neem D als variabele. Pak eerst $D = 1$. Uit de vorige vraag bleek dat het veld er nu uitziet als een lijn. (Noort, 2013) Probleem: onze symbolen X en O zijn 2-dimensionaal. Daarom smokkel ik een beetje bij $D = 1$. $S = 3$ en $D = 1$ ziet eruit als:

Tabel 3.6: Het speelveld als $S = 3$ en $D = 1$

Dit bord heeft dus wel een dikte (een dikte van 1), maar dat is niet erg. In dit speelveld kun je dus 3-op-een-rij gaan spelen, want $S = 3$. Ook dit geval is een beetje flauw, want je hebt drie vakjes en je bent op zoek naar drie vakjes in één rij. De beginner mag in slechts twee vakjes een X zetten en de tegenspeler mag dat maar met één vakje. Maar goed, het is mogelijk om te spelen en zo zou het bord eruit zien. Het is ook mogelijk om écht 1-dimensionaal te spelen. Teken S streepjes naast elkaar en geef ze om de beurt een kleurtje, bijvoorbeeld rood voor de beginner en blauw voor de tegenspeler. Deze kleuren vervangen de 2-dimensionale symbolen.

$D = 2$ is het standaard boter-kaas-en-eierenspel, dus we gaan door naar $D = 3$. Dit is een kubus. Dit bord is voor te stellen op papier:

B			B			B		
				C				
A	A	A						

Tabel 3.7: Het bord met $D = 3$ en $S = 3$

Het linker 3×3-vlakje voor de dubbele streep is de onderste laag van het bord. Het middelste bord is de eerste etage en het rechterbord is de tweede etage. De drie A's die weergeven zijn in het veld zijn dus een geldig rijtje met drie symbolen op de onderste laag. Ook de B's zorgen voor een overwinning. Dit is namelijk een rijtje die van onder naar boven loopt. De B's liggen boven elkaar in een kubus. Het is dus een overwinning in de hoogte. C is het midden van de kubus.

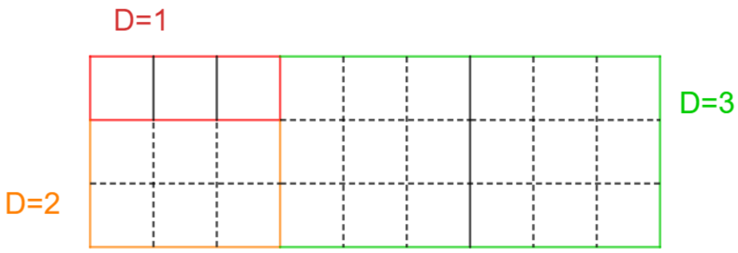
Nog een paar voorbeeldjes:

E		F		E				E
				F				G
G				G		F		

Tabel 3.8: Het bord met $D = 3$ en $S = 3$

De E's vormen ook een geldig rijtje. Ze vormen een rij over één van de zijvlakken van de kubus. De F's zijn ook een rijtje. Dit is misschien iets lastiger om te zien. Schuif de drie 3×3-velden over elkaar heen en vergeet extra hoogtedimensie even. Dan liggen de F's als een diagonaal in een standaard boter-kaas-en-eierenspeelveld. Bedenk nu de hoogte er weer bij. De F's vormen een lichaamsdiagonaal door de kubus. Speler G heeft wat minder geluk, want dat rijtje zorgt niet voor een overwinning. Een G rechtsonder in het rechtervakje zou wel winst betekenen.

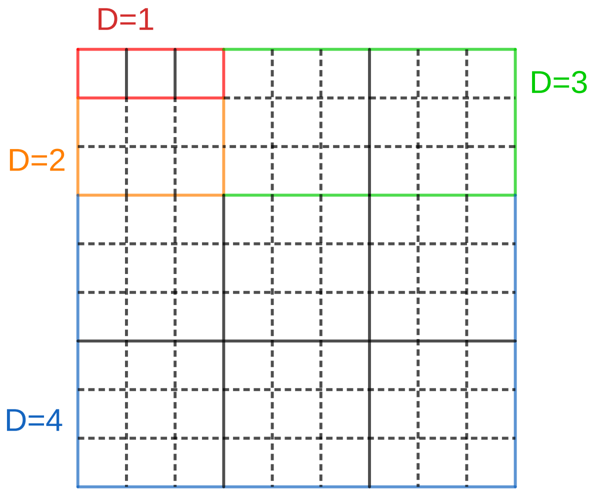
Nu de eerste drie dimensies zijn uitgelegd, gaan we spelen in nog hogere dimensies! Daarvoor is het handig om (alweer) te kijken naar patronen. Ondanks dat het lastig is om een 4-dimensionale kubus voor te stellen, kunnen we wel wat nuttigs over deze kubus zeggen. Hoe komt het bord met dimensie D voort uit dimensie $D-1$? Daarvoor is de volgende tekening als toelichting toegevoegd:



Figuur 3.1: Tekening van $D = 1$ naar $D = 2$ naar $D = 3$

Om van $D = 1$ naar $D = 2$ te gaan heb je drie keer $D = 1$ nodig. Deze heb ik eronder getekend. Om van $D = 2$ naar $D = 3$ te gaan heb je drie keer een bord van $D = 2$ nodig. Deze plak ik ernaast.

Nu gaan we weer drie keer $D = 3$ pakken, want dit deden we immers ook om van $D = 2$ naar $D = 3$ te gaan. We hebben twee opties om de twee borden van $S = 3$ en $D = 3$ erbij te plakken, namelijk eronder en ernaast. Als we kiezen voor ernaast, dan krijg je een bord van 3 bij 27 en dat is niet heel gemakkelijk. Als we deze borden eronder bij plakken, krijgen we een mooi vierkant. Dan krijg je:



Figuur 3.2: Tekening van $D = 3$ naar $D = 4$

Zo kun je het ook doen voor $D = 5$, $D = 6$ enzovoort. Steeds zet je er aan één kant twee borden bij van $D - 1$. Maar toch is een tekening van met $D \geq 5$ vaak niet heel overzichtelijk. Zelfs bij $D = 4$ is het soms lastig te zien wat nu een geldig 3-op-een-rij-rijtje is. Daarvoor hebben wiskundigen iets handigs bedacht: coördinaten. (Hales and Jewett, 1963) Ik zal eerst een voorbeeld geven met $S = 4$ en $D = 2$, dus met het bord:

	1	2	3	4
1	A			
2			B	
3		C		
4				D

Tabel 3.9: Het bord als $S = 4$ en $D = 2$

Het principe is als volgt: geef elk vakje een coördinaat door het (rij, kolom)-paar te pakken. Bij A hoort dus $(1, 1)$, bij B $(2, 3)$, bij C $(3, 2)$ en bij D $(4, 4)$. Bij het algemene boter-kaas-en-eierenspel met $D = 2$ en $S = 3$ is een cooridinaat dus van de volgende vorm (a_1, a_2) met $a_1, a_2 \in \{1, 2, 3\}$. Dit heeft best wat weg van een (x, y)-assenstelsel, want met twee gegevens leg je een punt (in dit geval een vakje) vast. Dit kunnen we ook met een kubus, want daar zijn we gewend te werken met een (x, y, z)-assenstelsel. Je hebt dus een extra coördinaat nodig die ook de hoogte, de derde dimensie, vastlegt. In plaats van (x, y, z) werken we nu met (a_1, a_2, a_3) met $a_1, a_2, a_3 \in \{1, 2, 3\}$ als $S = 3$. Hoe moeten we dat voor ons zien?

	1	A		2			3	
							B	

Tabel 3.10: Het bord met $D = 3$ en $S = 3$

Het 3×3-bord met 1 in het midden is de onderste laag, dus $a_3 = 1$. Bij de middelste laag hoort $a_3 = 2$ en bij de bovenste laag hoogt $a_3 = 3$. De coödinaten voor a_1 en a_2 gaan hetzelfde als bij $D = 2$, dus $A(2, 3, 1)$ en $B(3, 2, 3)$. In woorden is het coördinaat dus (rij, kolom, vlak).

Onze 3-op-een-rij 4-dimensionale kubus hebben we gekregen door drie 3-op-een-rij 3-dimensionale kubussen te pakken, dus ook hier kunnen we een extra coördinaat pakken door elke 3-dimensionale kubus het cijfer 1, 2 of 3 te geven. Dit is het bord met $S = 3$ en $D = 4$:

				1				
								A
				2				
		B		3				

Tabel 3.11: Het bord als $S = 3$ en $D = 4$

De 1, 2, 3 geven aan wat 3-dimensionale kubus nummer 1, 2 en 3 is (die kubussen zijn horizontaal weergeven tussen de dubbele strepen). Bij A hoort dus $(1, 3, 3, 2)$ en bij B $(2, 3, 1, 3)$. Dit principe is door te zetten bij $D \geq 4$. Dan heb je $(a_1, a_2, \ldots a_D)$ met $a_n \in \{1, 2, 3\}$ en $1 \leq n \leq D$ als $S = 3$.

3.3 Toenemende lengte en hogere dimensie

Nu hebben we gekeken naar een vaste D en een variabele S en een vaste S met een variabele D, maar natuurlijk kunnen ook beide variabel zijn. Zo kun je ook 4-op-een-rij boter-kaas-en-eieren spelen in een 3-dimensionale kubus[3]. Het principe is hetzelfde. Zo ziet een bord eruit met $S = 4$ en $D = 3$:

Tabel 3.12: Bord met $S = 4$ en $D = 3$

Merk op er nu 4 borden met $S = 4$ en $D = 2$ nodig zijn om het bord voor $D = 3$ te maken. Je hebt immers een hoogte van 4 in plaats van 3. Een ander voorbeeld is:

Tabel 3.13: Bord met $S = 2$ en $D = 5$

Deze heeft misschien iets meer uitleg nodig. Ik liet namelijk nog niet eerder een $D = 5$ zien, omdat dat grote speelvelden worden. Ik heb het bord door de dubbele lijnen opgedeeld in 4 vlakken en elk vlak is het bord voor $D = 3$ en $S = 2$. Het bord linksboven met het bord linksonder vormen samen het bord van $D = 4$ en $S = 2$. Die heb ik weer verdubbeld (keer twee, want $S = 2$) en zo krijg je het bord van hierboven. Toen ik coördinaten vermeldde, gebruikte ik alleen dat $a_n \in \{1, 2, 3\}$ met $1 \leq n \leq D$, maar algemener kun je dit zeggen:

De plaats α op het bord is te omschrijven met $\alpha = (a_1, a_2, \ldots a_D)$ met $a_n \in \{1, 2, \ldots S\}$ en $1 \leq n \leq D$.

Nu we weten hoe we onze zet duidelijk kunnen maken als we S-op-een-rij boter-kaas-en-eieren spelen in een D-dimensionale kubus, rest er nog één ding duidelijk gemaakt te worden. Hoe win je? Daarvoor pak ik eerst ons vertrouwde spelletje met $D = 2$ en $S = 3$ met coördinaten:

(1,1)	(1,2)	(1,3)
(2,1)	(2,2)	(2,3)
(3,1)	(3,2)	(3,3)

Tabel 3.14: $S = 3$ en $D = 2$ met coördinaten

Een voorbeeld van een winnend rijtje is $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Dit is een overwinning over de diagonaal van het bord. Ook de set $\{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$ is toegestaan, net als $\{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

[3]Boter-kaas-en-eieren waarbij je 4-op-een-rij probeert te halen in een 3-dimensionale kubus heet ook wel Qubic. (Patashnik, 1980)

Om duidelijker te maken over welke rij we het hebben, introduceer ik een nieuwe notatie. $\{3,*\}$ is bijvoorbeeld de rij $\{(3,1),(3,2),(3,3)\}$. a_1 blijft gelijk aan 3 en de waarde van a_2 loopt in dit geval op. Uiteraard kan * ook staan voor een aflopende waarde, want $\{(3,1),(3,2),(3,3)\} = \{(3,3),(3,2),(3,1)\}$. $\{*,2\}$ is bijvoorbeeld $\{(1,2),(2,2),(3,2)\}$. Er gaat alleen iets fout bij $\{*,*\}$, want er is nu niet duidelijk of dat hiermee $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ of $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ bedoeld wordt. Daarvoor is de notatie $\{\uparrow,\uparrow\}$ bij $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, want zowel a_1 als a_2 lopen op. Voor $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ is de notatie $\{\uparrow,\downarrow\}$, want a_1 loopt op en a_2 loopt af. Merk op dat $\{\uparrow,\downarrow\} = \{\uparrow,\downarrow\}$ en $\{\uparrow,\uparrow\} = \{\downarrow,\downarrow\}$.

Wat gaat er fout bij $\{(1,1),(1,2),(2,3)\}$? Dit is namelijk duidelijk geen overwinning. Een winnend rijtje moet het volgende voldoen:

Een rij is een verzameling $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_S\}$ van S verschillende vakjes $\alpha_m = (a_1,a_2,\dots a_D)$ en $1 \leq m \leq S$ met $a_n \in \{1,2,\dots S\}$ en $1 \leq n \leq D$. Voor elke α_m in deze verzameling geldt dat:
• Maximaal $D-1$ a_n gelijk aan elkaar zijn;
• Minimaal één a_n aflopend en verschillend is of oplopend en verschillend is (dus dat betekent dat er minimaal één * staat in de rijnotatie).
Als dit het geval is en rij één soort symbool bevat, dan spreken we van een winnende S-op-een-rij.

De set $\{(1,1),(1,2),(2,3)\}$ voldoet hier dus niet aan. Het gaat fout bij a_1. We pakken $S=3$ en $D=2$. We kijken naar a_n met $n \in \{1,2\}$ (dus we kijken naar a_1 en a_2) in alle drie de coördinaten. Voor a_2 gaat het nog goed want $\{1,2,3\}$ zijn oplopend en verschillend (ze gaan van 1 tot en met $S=3$). Bij a_1 gaat het fout, want in $\{1,1,2\}$ zijn niet alle a_1 verschillend. Hoe zit het dan met het drietal $\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$? Hier zit tweemaal het drietal $\{1,2,3\}$ in, maar het is overduidelijk geen winnend rijtje. Voor a_1 gaat het goed, want de volgorde van a_1 is $\{1,2,3\}$. Om a_2 nu ook te laten voldoen, moet je $(2,3)$ en $(3,2)$ omdraaien en dan pas krijg je ook $\{1,2,3\}$. Omdraaien is niet toegestaan. Hier staat er dus $\{1,3,2\}$. Deze getallen zijn wel verschillend, maar niet aflopend. Daar gaat het dus fout.

Nog twee voorbeelden:
• $\{(1,1,3,3),(2,2,2,2),(3,3,1,1)\}$ is dus een overwinning in $S=3$ en $D=4$;
• $\{(1,3,1,2,2,1,1,2),(2,3,2,2,2,2,1,2),(3,3,3,2,2,3,1,2)\}$ is een overwinning als $S=3$ en $D=8$. (Polymath, 2012)

Zo speel je dus boter-kaas-en-eieren in hogere dimensies en op een groter speelvlak!

4 | Rijen tellen

Hoeveel rijen zijn er in een D-dimensionale S-kubus?

Het aantal rijen geeft aan op hoeveel manieren je een winnend rijtje kunt maken. Het zijn dus alle winopties. In een standaard potje boter-kaas-en-eieren kun je verticaal, horizontaal en diagonaal winnen. Al deze opties zien we als een 'rij'. Er zijn drie rijen voor verticaal, drie rijen voor horizontaal en twee rijen voor diagonaal. In totaal zijn er dus acht rijen. Het zou natuurlijk heel mooi zijn als we een formule kunnen vinden met S en D die in één keer het aantal rijen geeft. Daar gaat deze vraag over.

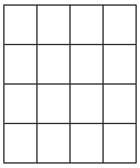
Voordat we handig kunnen gaan tellen, moeten er eerst gedefiniërd worden wat een rij is. In $D = 1$, $D = 2$ en wellicht ook $D = 3$ is dit misschien nog wel voor te stellen, maar in $D \geq 4$ wordt dit al lastig.

Definitie *Een rij in een D-dimensionale S-kubus ontstaat als je de positie in maximaal $D - 1$ dimensies vastzet, terwijl je in de andere dimensies van de ene extreem naar het andere extreem beweegt.*

Deze definitie is van Harold de Boer van Transtrend. Voor $D = 2$ staat hier dat we maximaal één dimensie vastzetten. Als we namelijk twee dimensies vastzetten, heb je een punt op het bord, zoals bijvoorbeeld $(1, 2)$. Het punt $(1, 2)$ met $S = 3$ kan geen $(1, 3)$ worden of $(2, 2)$, want we hebben a_1 en a_2 vastgelegd, dus die mogen niet veranderen. Ze blijven respectievelijk 1 en 2. Zo krijgen we natuurlijk nooit een rijtje. Als we één dimensie vastleggen (zonder beperking der algemeenheid leggen we a_2 vast) en de andere niet, kunnen we wel een rijtje vormen door de losse dimensie (hier a_1) van de ene extreem naar de andere extreem te bewegen. De extremen zijn 1 en S. Zo is $(1, 2)$ nu te bewegen via $(2, 2)$ tot $(3, 2)$. Dit is een geldig rijtje. We kunnen ook beide dimensies losmaken, zodat er nul dimensies vaststaan. Dat is het geval bij de diagonalen. Die gaan van $(1, 1)$ via $(2, 2)$ naar $(3, 3)$ of van $(1, 3)$ via $(2, 2)$ naar $(3, 1)$. In totaal zijn er dus acht rijen in een standaard bord: drie verticaal met één dimensie vast, drie horizontaal met één dimensie vast en twee diagonaal met nul dimensies vast.

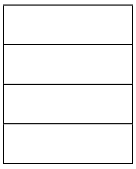
Nu kijk ik alleen naar een bord met $D = 2$, dus een $S \times S$-bord. Eerst leggen we a_1 vast, dus a_2 staat nog los. Deze laten van het ene extreem naar het andere extreem gaan. Zo wordt a_2 oplopend van 1 naar S. Merk op dat dat een rijtje met een vaste a_1 en een losse a_2 die loopt van S naar 1 hetzelfde rijtje is. Tel deze dus niet dubbel! Dit zorgt voor S rijen, want we kunnen S vast waarden voor a_1 kiezen. Hetzelfde kunnen we doen bij met een losse a_1 en een vast a_2. Op analoge wijze heb je hier ook S rijen. Nu zetten we geen dimensies vast. Nu hebben we de twee diagonalen. In totaal zijn er dus $2S + 2$ rijen mogelijk waarin gewonnen kan worden.

Nu ga ik een dimensie hoger kijken. Ik pak $D = 3$ en S houd ik variabel. Eerst kijken we naar twee dimensies vastgelegd en dus één dimensie los. Zie dit als een doorzichtige $S \times S \times S$-bak waarin we $1 \times 1 \times S$-bakstenen in gaan leggen (ik laat het hier zien met $S = 4$). Zet één van de vlakken van deze kubusvormige bak recht voor u. Leg de bakstenen er nu zo in dat de 1×1-kant naar u toe gericht is. Het vooraanzicht ziet er bij $S = 4$ als volgt uit:



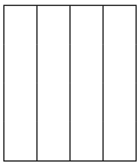
Tabel 4.1: Vooraanzicht kubus met 1×1-kant tegen voorkant

Er passen op deze manier $4 \cdot 4 = 16$ bakstenen in de bak en algemeen passen er S^2 in, omdat het voorvlak S bij S is. Op dezelfde manier kunt u de bakstenen met de lange kant naar u toe leggen, zoals:



Tabel 4.2: Vooraanzicht kubus met $1 \times S$-kant liggend tegen voorkant

Het zijaanzicht van tabel 4.2 ziet er hetzelfde uit als tabel 4.1. Ook hiervoor zijn dus S^2 opties. Haal nu alle bakstenen er weer uit en zet ze met de 1×1-kant op de bodem. Van voren ziet u dit:



Tabel 4.3: Vooraanzicht kubus met 1×1-kant tegen voorkant

Van boven ziet dit er weer hetzelfde uit als tabel 4.1. Ook dit zijn weer S^2 rijen. In totaal zijn er zo dus $3S^2$ rijen als er twee dimensies worden vastgelegd. Nu zet ik maar één dimensie vast en de andere twee laat ik los. We hebben dezelfde $S \times S \times S$-bak, maar nu gaan we die vullen met 'planken' van $1 \times S \times S$, oftewel $S \times S$-borden waarop we boter-kaas-en-eieren kunnen spelen. We hoeven alleen maar naar de diagonalen op deze planken te kijken, want de horizontale en verticale rijen hebben we net al geteld. Elke plank heeft twee diagonalen. We kunnen de planken gewoon op de bodem leggen, zodat u hetzelfde ziet als in tabel 4.2. Dit zijn S hoogtes om plank weg te leggen. Of we zetten de planken er zo in dat u een vooraanzicht heeft als in tabel 4.3. Er zijn S opties om de plank weg te zetten. Of zet de $S \times S$-kant naar u toe zodat u maar één plank geheel ziet. In totaal zijn dit $3S$ opties om de plank op te bergen in onze bak, dus er zijn $2 \cdot 3S = 6S$ rijen als twee dimensies los zijn. Als we alle dimensies losgooien, krijgen we precies de vier lichaamsdiagonalen. In totaal zijn er dus $3S^2 + 6S + 4$ rijen in een 3-dimensionale kubus met grootte S.

Nu hebben we $D = 2$ en $D = 3$ bekeken, maar dit kunnen we natuurlijk niet zo doen voor grotere D. Daar is een slimme oplossing voor nodig! Het zou mooi zijn als er een formule zou zijn die het aantal rijen uitdrukt in S en D en die hebben wiskundigen (natuurlijk) gevonden! Het aantal rijen in een D-dimensionale kubus met grootte S is:

$$\frac{(S+2)^D - S^D}{2}$$

Hier zijn twee mooie bewijzen voor. De wiskundigen Golomb en Hales noemden ze Geometric/Intuitive en Algebraic/Rigorous. (Golomb and Hales, 2002) Ik begin met het bewijs dat ze Rigorous noemden. Ik heb ook gebruik gemaakt van de uitwerking van (Do, 2005).

4.1 Bewijs 'Rigoureus'

Elke vakje van een S^D-kubus [4] is te schrijven volgens de vorm $\alpha_m = (a_1, a_2, \ldots a_D)$ met $a_n \in \{1, 2, \ldots S\}$ en $1 \leq m \leq S$ en $1 \leq n \leq D$. Een rij $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_S\}$ bestaat uit S van zulke vakjes α met elke a_n voor elke n oplopend, aflopend of gelijk aan elkaar. Voor oplopend en aflopend heb je elk één optie.[5] Deze optie ligt vast. Als je a_n constant houdt, heb je S opties.[6] In totaal zijn dit dus $S + 2$ opties voor alle D a_n. In totaal zijn er zo dus nooit meer dan $(S + 2)^D$ rijen.

Maar dit zijn te veel rijtjes, want een aantal opties zorgen niet voor een geldig rijtje. De 'rij' $\{(1, 3), (1, 3), (1, 3)\}$ in een 3^2-kubus wordt nu ook meegeteld, terwijl dit toch echt geen rij is. Alle a_n blijven constant in dit voorbeeld en dat mag niet volgens onze definitie, want nu staan er D dimensies vast in plaats van het maximum van $D - 1$. Het aantal constante rijtjes is S^D, want voor elke a_n heb je S mogelijke waardes en er zijn D a_n. Dit zijn dus $(S + 2)^D - S^D$ rijen.

De laatste stap is bedenken dat $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_S\} = \{\alpha_S, \alpha_{S-1}, \ldots \alpha_1\}$. Deze tel je nu nog dubbel, dus er moet nog gedeeld worden door 2. Daarmee is bewezen dat de formule $\frac{(S+2)^D - S^D}{2}$ het aantal rijtjes in een S^D-kubus weergeeft. $\square$

Dit is een bewijs waar slim tellen goed van pas komt en waar je heel zorgvuldig te werk moet gaan. Een andere bewijs is een geometrisch bewijs. Dit bewijs is misschien iets lastiger voor te stellen, maar ik vind het zelf zo'n mooi bewijs dat ik het u niet wil onthouden.

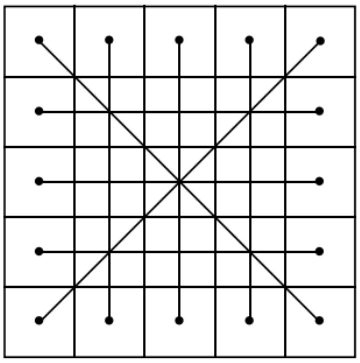
[4] Dit is de officiële notatie voor een D-dimensionale kubus met grootte S. Door deze notatie aan te houden, kan ik korter duidelijk maken om wat voor kubus het gaat. Een standaard spel is bijvoorbeeld een 3^2-kubus, want $S = 3$ en $D = 2$.

[5] Als bijvoorbeeld a_n van α_1 gelijk is aan 1, dan is a_n van α_2 gelijk aan 2, ..., en dan is a_n van α_S gelijk aan S.

[6] Alles van 1 tot en met S.

4.2 Bewijs 'Intuïtief'

Pak een S^D-kubus en bouw in elke richting een vakje uit. De S^D-kubus wordt volledig omringd door vakjes. Geen enkel vakje van de S^D-kubus dat zich eerst aan de buitenkant bevond, zit daar nu nog. We hebben dus een S^D-kubus (de binnenkubus) precies te midden van een $(S+2)^D$-kubus (de buitenkubus). Teken alle rijen in de S^D-kubus en trek de rij door tot *in* de vakjes van de $(S+2)^D$-kubus, zie figuur 4.1. Dit figuur is een voorbeeld van een standaard 3^2-bord met daaromheen een rand waardoor een 5^2-kubus ontstaat. De stippen in de buitenste rand zijn de begin- en eindpunten van de doorgetrokken rijen van de 3^2-kubus.



Figuur 4.1: Buitenkubus met rijen (Golomb and Hales, 2002)

Precies twee vakjes in de buitenkubus zijn samen het nieuwe begin- en eindpunt van een rij. Er is geen enkele andere rij die begint en eindigt in deze twee vakjes. Dit paar van vakjes is dus uniek voor elke rij. Met andere woorden: het aantal paren vakjes in de rand van de buitenkubus is gelijk aan het aantal rijen van de binnenkubus. Er zijn in totaal $(S+2)^D$ vakjes in de *totale* buitenkubus en er zijn S^D vakjes in de binnenkubus, dus er zijn $(S+2)^D - S^D$ vakjes in de buitenste rand van de buitenkubus. Er zijn dan $\frac{(S+2)^D - S^D}{2}$ paren in de rand van de buitenkubus en dus zijn er ook $\frac{(S+2)^D - S^D}{2}$ rijen in de binnenkubus. □

We hadden al gevonden dat voor $D = 2$ geldt dat er $2S + 2$ rijtjes zijn en voor $D = 3$ zijn er $3S^2 + 6S + 4$ rijtjes. Dit ziet er anders uit dan de breuk die we gevonden hebben. Er geldt voor $D = 2$ dat:

$$\frac{(S+2)^2 - S^2}{2} = \frac{S^2 + 4S + 4 - S^2}{2} = 2S + 2$$

en voor $D = 3$ geldt:

$$\frac{(S+2)^3 - S^3}{2} = \frac{(S^2 + 4S + 4)(S+2) - S^3}{2} = \frac{S^3 + 6S^2 + 12S + 8 - S^3}{2} = 3S^2 + 6S + 4$$

Dit komt overeen met de gevonden formule! In dit hoofdstuk heb ik het aantal rijen voor $D = 2$ en $D = 3$ beredeneerd en ik heb op twee manieren laten zien dat er $\frac{(S+2)^D - S^D}{2}$ rijen zijn in een S^D-kubus. Dit zijn een hoop rijtjes om in de gaten te houden als je boter-kaas-en-eieren speelt en dat terwijl je aan één rijtje genoeg hebt om te winnen!

5 | Gelijk spelen op een plat vlak

Voor welke S kan de niet-beginner voorkomen dat de beginner wint in een 2-dimensionale S-kubus?

We spelen boter-kaas-en-eieren met twee personen op een $S \times S$-bord. De twee spelers zijn de beginner en de niet-beginner, ook wel de eerste en de tweede speler genoemd. Beide spelers spelen natuurlijk voor het plezier, maar een overwinning behalen is mooi meegenomen. Voor de beginner kan dit mooi uitpakken, maar de niet-beginner heeft minder geluk als hij of zij wil winnen. Deze speler zal genoegen moeten nemen met een gelijkspel of een verlies. Waarom? Daar is een bewijs voor. Het gaat over het stelen van strategieën. Beide spelers spelen perfect (ze maken geen fouten).

5.1 Bewijs niet-beginner kan niet winnen

Neem aan dat de tweede speler *wel* een winstrategie heeft.[7] De eerste speler mag beginnen en omdat de tweede speler een winstrategie heeft, is de eerste zet van de beginner een random zet. Het heeft geen invloed op de tweede speler. Ergens op het bord wordt een X weggezet. Dan is de tweede speler aan de beurt. Deze speler gebruikt zijn winstrategie en plaatst een O. De beginnende speler is weer aan zet. Hij of zij neemt de winstrategie van de niet-beginnende speler over en probeert zo te winnen. Het kan dan voorkomen dat de beginner een zet wil doen waar al een X staat. Dat is mooi meegenomen voor de beginner en dus kan deze persoon weer willekeurig ergens een X wegzetten. Aangezien dat bij boter-kaas-en-eieren een extra vakje *nooit* een nadeel is, kan de tweede speler niet anders dan de overwinning uit handen geven. De niet-beginner heeft dus *geen* winstrategie. (Hales and Jewett, 1963) □

Nu is niet-winnen niet hetzelfde als verliezen. Het is namelijk ook mogelijk om gelijk te spelen. Dit heeft de lezer waarschijnlijk ooit wel ervaren met een spelletje op een 3×3-bord. De beginner kan dus winnen of gelijkspelen en de niet-beginner kan gelijkspelen of verliezen. Dit hoofdstuk gaat over de niet-beginner die probeert te voorkomen dat de beginner wint, oftewel de niet-beginner probeert gelijk te spelen. Aangezien dat gelijkspel voor de tweede speler de beste uitkomst van het spel is, zal de tweede speler dit altijd proberen.

[7] Zo'n soort bewijs heet ook wel 'Een bewijs uit het ongerijmde'. Je neemt het tegenovergestelde aan en dan ga je proberen om te bewijzen dat dit onwaar is. De gedachte is als volgt: als het tegenovergestelde *niet* waar is, dan is de te bewijzen stelling *wel* waar.

5.2 Onoverwinnelijke logica en noeste arbeid

Zoals ik al toelichtte bij tabel 3.2 vertelde, kan de beginner op een 2×2-bord altijd winnen. De beginner zet een X in een van de hoekpunten (een 2×2-bord heeft alleen maar hoekpunten) en de niet-beginner kan slechts één van de drie winnende rijen blokkeren. Het gevolg is een onoverwinnelijke beginner en een snel gefrustreerde tegenspeler.

X	

Tabel 5.1: Het bord als $S = 2$ en $D = 2$, na de eerste zet

Nu gaan we kijken naar een 3×3-bord. Vanwege symmetrie kan de X op drie plekken worden neergezet, in een hoekje (zie X_a), aan de zijkant (zie X_b) en in het midden (zie X_c).

X_a		
X_b	X_c	

Tabel 5.2: De plaatsen van X

Stel dat de eerste speler begint met een X aan de zijkant. Waar moet je dan O wegzetten? Het midden is de beste zet. Daarmee blokkeer je namelijk een overwinning in één verticale, één horizontale en twee diagonale rijen. X kan dan alleen nog maar winnen in de vier buitenste rijen. X_2 [8] zal nooit aan de zijkant tegenover X_1 worden gezet, want dan kan O winnen. Dan speelt de beginner niet optimaal.

O_3		O_2
X_1	O_1	X_2
X_3		

Tabel 5.3: Zowel X_1 als X_2 aan de buitenkant en tegenovergesteld

Als X_2 in het hoekje tegen X_1 komt te staan, krijg je:

X_2	O_3	X_3
X_1	O_1	
O_2	X_4	

Tabel 5.4: X_1 aan de zijkant en X_2 in het aangrenzende hoekje

Als X_2 in het hoekje tegenover de zijkant van X_1 wordt gezet, krijg je:

O_2		X_2
X_1	O_1	O_3
		X_3

Tabel 5.5: X_1 aan zijkant en X_2 in tegenoverliggend hoekje

X_4 op $(3, 1)$ of $(3, 2)$ maakt niet uit, want O_4 pakt het andere vakje en weer is het gelijkspel. O kan dus gelijkspelen als X aan de zijkant begint.

[8] De tweede X. Algemeen is X_m de m-de X die gespeeld wordt.

Stel dat X in een hoekje begint. Dan moet O_1 juist *niet* in het midden, want dat geeft:

X_3		X_2
	O_1	
X_1		O_2

Tabel 5.6: X_1 aan zijkant en X_2 in tegenoverliggend hoekje

O is kansloos als O_1 in het midden wordt gezet. Dit gebeurt dan ook niet. Zet O_1 daarom op de plek van X_2 in het figuur hierboven. Ook deze zet zal resulteren in veel verschillende borden. Ik ga ze niet allemaal tonen. Ze gaan analoog als de tabellen die ik hiervoor toonde. (Aycock, 2002)

Het midden is de beste plek om te beginnen. Het is de plek waar de meeste rijen samenkomen. X_1 staat nu in het midden. Door symmetrie kan O_1 op twee plekken staan, de zijkant of een hoekje. Stel de niet-beginner zet O_1 aan de zijkant. Dan gaat X_2 en de rest van de stappen als volgt:

X_2	O_1	
X_3	X_1	
		O_2

Tabel 5.7: X_1 in het midden en O_1 aan de zijkant

O_1 zal dus niet aan de zijkant worden weggezet. O_1 zal daarom in een hoekje worden gezet. Vanwege symmetrie maakt het niet uit welk hoekje. X_2 zal diagonaal tegenover O_1 komen te staan, omdat er dan nog mogelijkheden zijn voor de eerste speler om te winnen als de tweede speler een fout maakt. Ze spelen beiden perfect spelen, dus ook dit levert een gelijkspel op.

O_1	*	
*	X_1	*
	*	X_2

Tabel 5.8: X_1 in het midden en O_1 in een hoekje

De plekken met * zijn de plekken waar O_2 niet weggezet mag worden, want dan wint X. O_2 zal dus in een hoekje gezet worden en dat geeft:

O_1	X_3	O_2
	X_1	
	O_3	X_2

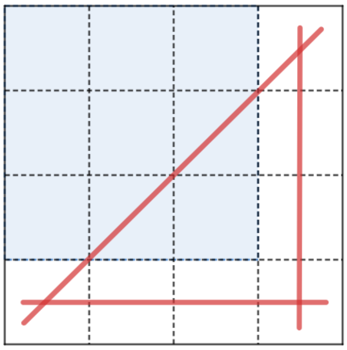
Tabel 5.9: X_1 in het midden en O_1, X_2 en O_2 in een hoekje

Natuurlijk zijn voor X_1 in het midden ook meerdere mogelijkheden, want X_2 hoeft niet in het tegenoverliggende hoekje gezet te worden, maar al deze gevallen ga ik hier niet apart benoemen. Door gebruik te maken van symmetrie is het aantal mogelijkheden een flink stuk kleiner geworden, maar nog steeds heb ik niet alle mogelijkheden behandeld. O_1 moet *nooit* aan de zijkant gezet worden en dan zijn veel mogelijkheden voor X om te winnen al geblokkeerd. (Aycock, 2002)

Als we kijken naar de deelvraag, dan is $S = 3$ dus een antwoord op de vraag! Zijn we klaar? Nee, want wat is er aan de hand bij $S = 4$ en bij $S = 5$? En wat gebeurt er bij nog hogere S? We willen natuurlijk *alle* S geprobeerd hebben en weten wat daar voor geldt. Maar voor alle S nagaan of er gelijkspel mogelijk is op dezelfde manier als bij $S = 3$ is onbegonnen werk. Daar is dus iets beters voor nodig. We hebben al gekeken naar $S = 2$ en $S = 3$. Kunnen we daar op voortborduren voor $S = 4$? Het antwoord is ja!

5.3 Het speelveld vergroten

Merk op dat een 4×4-bord eigenlijk een 3×3-bord is met een extra rand aan twee kanten (ik plak deze rand er onder en rechts bij). Het ziet er als volgt uit:



Figuur 5.1: Een $S = 4$ bord met een gekleurd $S = 3$ bord

De situatie is amper veranderd. Alle rijen zitten met drie vakjes in het gekleurde 3-bij-3-bord, op drie rijen na. Dit zijn $\{4, *\}$, $\{*, 4\}$ en $\{\downarrow, \uparrow\}$. Binnen het gekleurde gebied heeft de tweede speler een tactiek om niet te verliezen. De eerste speler gaat in dat gebiedje dus geen overwinning halen. Alle hoop van de beginner is gevestigd op deze drie rijen die niet of deels door het gekleurde gebied lopen. Maar ook bij $S = 4$ kan de niet-beginner de beginner dwars zitten. Dat gaat als volgt (Hofstede, sd):

- Als de beginner in het gekleurde gebied speelt, speelt de niet-beginner volgens de vertrouwde tactiek die hij of zij gebruikt bij $S = 3$.
- Als de beginner een X wegzet op $(1, 4)$ (dus rechtsboven), speelt de niet-beginner $(4, 1)$. De optie om te winnen in met de diagonaal is daarmee geblokkeerd. Natuurlijk kan de eerste speler met $(1, 4)$ ook de verticale rij buiten het gekleurde gebied proberen te veroveren, maar de diagonaal is het 'grootste gevaar' voor de tweede speler, dus die moet eerst geblokeerd worden. Analoog geldt dit voor een X op $(4, 1)$, want dan komt een O op $(1, 4)$.
- Als de beginner een X op een plek zet waardoor de rij volledig in de rand komt (bijvoorbeeld $(4, 2)$), dan is dit altijd makkelijk te blokkeren door een O ergens in diezelfde rij te zetten, want dan is die hele rij afgeschreven voor X om te winnen.

Het is op deze manier altijd mogelijk om X te blokkeren. Als X op $(4, 4)$ komt te staan, dan zijn er twee rijen waarin X nog kan winnen. O komt dan ergens in een van deze twee rijen, bijvoorbeeld op $(2, 4)$. Dan is de verticale rij in de rand al afgeschermd. Dan kan de volgende X in de horizontale rij in de rand weggezet worden (daar staat dan twee keer een X en nog geen O), maar O_2 kan dan heel makkelijk ook deze rij blokkeren. Deze tactiek is ontstaan uit het kleinere geval $S = 3$. Deze tactiek is ook toe te passen voor grotere S en daarmee is een bewijs met volledige inductie te maken.

Volledige inductie is een bewijsmethode die regelmatig gebruikt wordt in de wiskunde. Je maakt bij inductie gebruik van een soort domino-effect. *Als* er een blokje valt, *dan* valt het volgende blokje. Omdat dat blokje valt, valt het blokje daarna ook weer, en dus het blokje daarna enzovoort. Net als bij domino moet er eerst een blokje omgaan voordat de rest omgaat. Natuurlijk willen we het eerste steentje omgooien en niet het vierde blokje omstoten zodat we weer opnieuw kunnen gaan bouwen. Dan weten we niet zeker of de eerste drie blokjes ook omgevallen waren. In de wiskunde begin je met het benoemen van je bewering en daarna komt de *inductiebasis* (het eerste steentje). Je bekijkt dan eerst de extreme waarde (de grootste of kleinste)[9] en je laat voor deze waarde zien dat de bewering voldoet. Je laat zien dat er in ieder geval een steentje valt en dat steentje is het eerste steentje. Inductie is ook alleen maar te doen met gehele getallen. Dit is ook te verklaren vanuit het dominospel, want je kunt niet met $10\frac{1}{2}$, π of $\sqrt{2}$ blokjes werken.

Dan komt er een aanname die ook wel *inductiehypothese* wordt genoemd. Je neemt aan dat de bewering waar is voor een zeker getal k. Dan ga je kijken wat er zeker moet gelden voor $k + 1$ (het volgende steentje) en hiervan maak je gebruik van de inductiehypothese. Het voldoen aan de bewering van het volgende getal moet wel voortkomen uit het getal daarvoor. In dominotermen kun je zeggen dat het volgende steentje om moet vallen door de duwkracht van het steentje daarvoor en dus niet door een hand of voet die de boel omver stoot. Aan de hand van de inductiehypothese en algemene waarheden (bijvoorbeeld eisen die in de opgave gesteld worden of rekenregels) moet je zo toewerken naar de situatie van $k + 1$ die voldoet aan de bewering. Dan heb je bewezen dat het eerste steentje valt en dat *als* er een steentje valt, het volgende steentje valt. De hele rij steentjes gaat vanaf het begin om.

Ik ga nu het bewijs laten zien dat voor elke $S \geq 4$ er een gelijkspel afgedwongen kan worden door de tweede speler. Het eerder beschreven geval voor $S = 4$ is de inductiebasis, want dit is de extreme waarde in $\{4, 5, 6, \ldots\}$.

[9] Als je bijvoorbeeld iets wilt bewijzen voor $\mathbb{Z}$, dan is er geen extreme waarde. Dan kun je bijvoorbeeld de verzameling opbreken bij 0. Je bekijkt de verzamelingen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ en $\{\ldots, -3, -2, -1\}$ apart van elkaar.

5.4 Bewijs volledige inductie naar S

Bewering: Voor elke gehele $S \geq 4$ geldt dat de niet-beginner een strategie heeft om gelijk te spelen in een $S \times S$-bord.
Bewijs:
Inductiebasis: Bij $S = 4$ heeft de niet-beginner een tactiek om gelijk te kunnen spelen. Dat hebben we hiervoor al gezien.
Inductiestap:
Inductiehypothese: Neem aan dat de bewering waar is voor een zekere S gelijk aan $k \geq 4$. De niet-beginner heeft dus een tactiek om gelijk te spelen op dit $k \times k$-bord.
Wat geldt er dan voor $k + 1$?
Pak een $k \times k$-bord en plak er een rand met nieuwe vakjes aan. Er is een $k + 1 \times k + 1$-bord ontstaan. Er zijn drie rijen bijgekomen die minder dan k velden in het $k \times k$-bord hebben. Dit zijn $\{k + 1, *\}$, $\{*, k + 1\}$ en $\{\downarrow, \uparrow\}$. Zolang de beginner in het $k \times k$-bord speelt, gebruikt de niet-beginner zijn tactiek voor een $k \times k$-bord (en die is er vanwege de inductiehypothese), dus de beginner zal geen $k + 1$-op-een-rij halen in rijen die met k vakjes in het $k \times k$-bord zitten. De enige rijen waar de beginner dus kan winnen zijn de drie genoemde rijen. Het is voor de niet-beginner voldoende om deze drie rijen te blokkeren om gelijkspel af te dwingen. De niet-beginner kan de volgende tactiek aanhouden:

- Als er een X op $(1, k + 1)$ wordt weggezet, dan zet de niet-beginner O op $(k + 1, 1)$. De diagonaal is daarmee geblokkeerd. De niet-beginner zet O natuurlijk op $(1, k + 1)$ als X op $(k + 1, 1)$ wordt weggezet.

- Als er een X wordt gezet in de rand en niet op $(1, k + 1)$, $(k + 1, 1)$ of $(k + 1, k + 1)$ dan gaat de niet-beginner er vanuit dat de beginner $k + 1$-op-een-rij wil gaan halen in de rij in de rand. Zolang er nog geen X staat op $(1, k + 1)$, $(k + 1, 1)$ of $(k + 1, k + 1)$, is de X van deze zet de eerste van die rand. Er zijn dan nog $k - 1$ vakjes over om O in te zetten en omdat $k - 1 \geq 3$ is er altijd plek om O ergens te plaatsen.

- Als er door X $(1, k + 1)$ of $(k + 1, 1)$ gespeeld wordt, blokkeert de niet-beginner eerst de diagonaal. Maar X kan daarna natuurlijk nog in de rij in de rand worden gezet (bijvoorbeeld X_1 op $(k+1, 1)$ en X_2 op $(k+1, 2)$). Nog steeds geldt er dan dat er genoeg plekken zijn voor O om in weggezet te worden, want in die rij zijn nog $k - 2 \geq 2$ vakjes leeg.

- Als eerst $(k + 1, k + 1)$ gespeeld wordt, dan blokkeert de niet-beginner één van de twee rijen. Daarna kan de beginner nog een X in de nog niet geblokkeerde rij wegzetten (er staan dan twee symbolen in die rij), maar omdat er nog $k - 2 \geq 2$ plekken over zijn, kan O ook hier de rij blokkeren.

- Als eerst $(k + 1, k + 1)$ wordt gespeeld, één rij geblokkeerd door O en er dan $(1, k + 1)$ of $(k + 1, 1)$ gespeeld wordt, dan blokkeert O weer eerst het diagonaal. Dan zijn meteen twee van de drie rijen (diagonaal en één randrij) geblokkeerd. In de andere rij kan nu nog een X komen te staan (dan staan er drie symbolen in die rij), maar omdat $k - 3 \geq 1$ [10] is er nog steeds plek voor O om te blokkeren. Dit geldt ook andersom, dus als er eerst

[10] Merk op dat dit ook een reden is waarom deze inductie alleen werkt voor $S \geq 4$, want voor $S = 3$ zou hier staan dat er nog $S - 3 = 0$ plekken zijn om O weg te zetten, oftewel de beginner heeft 3-op-een-rij. Ook zou er voor $S = 3$ geen redenatie mogelijk zijn vanuit $S = 2$, omdat de beginner dan wint.

$(1, k+1)$ of $(k+1, 1)$ gespeeld wordt en daarna pas $(k+1, k+1)$. Dan zijn er alleen nog $k-2 \geq 2$ plekken over voor O om de laatste randrij te blokkeren.

De niet-beginner heeft dus ook voor $S = k+1$ een strategie om gelijk te spelen en dat is wat bewezen moest worden.
Conclusie: Voor elke gehele $S \geq 4$ heeft de niet-beginner een tactiek om gelijkspel te bereiken in een potje boter-kaas-en-eieren op een $S \times S$-bord. □

5.5 Paartjes vormen

Het antwoord op de deelvraag is dus dat voor elke $S \geq 3$ de niet-beginner een strategie heeft om de beginner te weerhouden van winst. Nu is er voor $S \geq 5$ nog een andere manier voor de tweede speler om gelijk te spelen, namelijk met een paarstrategie. De tweede speler kan voor elke $S \geq 5$ het bord verdelen in paartjes. Als de eerste speler op het ene vakje van een paar een X zet, dan speelt de tweede speler het andere vakje. Dit wordt waarschijnlijk duidelijker met een afbeelding. Voor $S = 5$ kan zo'n bord er als volgt uitzien:

V	I	A	A	F
J	B	H	U	B
C	I		G	C
D	U	H	D	F
J	E	E	G	V

Tabel 5.10: Paarstrategie voor $S = 5$ (Do, 2005)

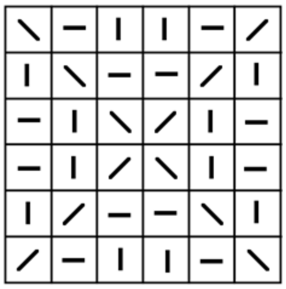
Elke letter[11] die op het bord staat, staat er twee keer op. Zo staat V op $(1, 1)$ en op $(5, 5)$ en A staat op $(1, 3)$ en $(1, 4)$. Met deze tabel kan de tweede speler gelijkspel afdwingen. Als X op $(3, 2)$ wordt gezet (dat is bij een I), dan komt O op $(1, 2)$ te staan. X kan dus niet meer winnen in de tweede kolom. Dit doet de tweede speler bij elke letter waar X op komt te staan. O komt dan op dezelfde letter elders op het bord. Er zijn alleen $5^2 = 25$ vakjes, dus één vakje kan niet in een paartje. Dit is het middelste vakje. Als de eerste speler het midden speelt, dan heeft de tweede speler keuze uit alle andere vakjes. O komt daardoor wel op een nieuw, nog ongebruikt paartje. Dit is niet erg, want de tweede speler beschouwt dit zien als een extra vakje. Een extra vakje is nooit nadelig in dit spel.

Stel dat de situatie zich voordoet dat de eerste speler het midden speelt. De tweede speler kan dan bijvoorbeeld $F(1, 5)$ spelen. Het is niet erg dan $F(4, 5)$ nog niet gespeeld is. De tweede speler gaat daar O nooit wegzetten, want er staat al een O op F. O hoeft daar ook nooit op komen te staan, want er zijn 25 vakjes. Zelfs als de beginner X niet op $F(4, 5)$ weg wil zetten, dan nog *moet* X op dit vakje komen te staan als alle andere 24 vakjes al gevuld zijn. Als X al eerder op $F(4, 5)$ komt te staan, dan hoeft O niet meer op het andere deel van het paartje weggezet te worden, want op $F(1, 5)$ staat al een O. De tweede speler mag weer een nieuw paartje 'beginnen' en telkens als X in dit paartje komt, gaat O naar een willekeurig ander leeg veld op het bord.

[11] De letters lijken misschien willekeurig gekozen, want het zijn niet de eerste twaalf letters van het alfabet. Toch zit er een gedachte achter. A tot en met E blokkeren de rijen, F tot en met J blokkeren de kolommen en U en V blokkeren de diagonalen

Waarom werkt deze strategie? Een 5^2-bord heeft $\frac{7^2-5^2}{2} = 12$ rijen en in elke rij komt er een letter twee keer voor. Zo staan er in de linkerkolom de letters V, J, C, D en J, dus de J komt twee keer voor. X kan al neergezet zijn op $V(1,1)$, $C(3,1)$ en $D(4,1)$, maar de beginner wint pas als X op een van de twee J's wordt gezet. Dan pakt de niet-beginner de andere J. Winnen is in deze kolom onmogelijk. In elke rij waarin gewonnen kan worden, zit zo'n dubbele letter. Hierdoor kan de tweede speler rustig de strategie volgen terwijl een rij vol met X'jes raakt.

Dit heb ik nu het voorbeeld genoemd voor $S = 5$, maar dit kan ook voor $S = 6$. Naast de notatie met letter wordt ook wel eens een schema met lijnen gebruikt. Bij $S = 6$ zou dat er als volgt uitzien:



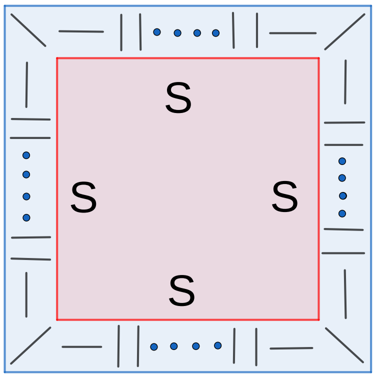
Figuur 5.2: Paarstrategie voor $S = 6$ met lijnen (Golomb and Hales, 2002)

Met deze weergave met lijnen is beter te zien dat er sprake is van symmetrie, zowel over de diagonalen als over de horizontale en verticale middenlijn. In elke rij en kolom staat een paar verticale en horizontale streepjes. Ik heb zelf ook een lettervariant gemaakt. Die ziet er zo uit:

O	A	K	J	A	P
M	Q	B	B	R	H
C	L	S	T	I	C
D	L	T	S	I	D
M	R	E	E	Q	H
P	F	K	J	F	O

Tabel 5.11: Paarstrategie voor $S = 6$ met letters

Nu werken deze letters niet zo handig meer bij bijvoorbeeld $S = 12$. Het wordt erg onoverzichtelijk en het alfabet is op. Uit de inductie bleek dat het makkelijker wordt voor de niet-beginner om te blokkeren bij een grotere S. De weergave met lijnen is makkelijk uit te breiden. Ik heb hier de volgende afbeelding voor gemaakt:



Figuur 5.3: Paarstrategie voor $S + 2$ en $S \geq 5$

Stel dat er een potje 7-op-een-rij boter-kaas-en-eieren wordt gespeeld. Dan pakt de niet-beginner de strategie van $S = 5$ en bedenkt daar een rand omheen. Aan de schuine lijnstukjes in de hoekpunten is te zien dat het tegenoverliggende vakje gespeeld wordt als de beginner een hoekpunt speelt. Verder zit er in elke randrij die er nu bijgekomen is, één paar die de ervoor zorgt dat er geen $S + 2$-op-een-rij gehaald kan worden in die rij. Dit zijn de horizontale lijnstukken bij de bovenste en onderste rand en de verticale lijnstukken bij de linker- en rechterrand. Voor de overige vakjes heb ik de tegenoverliggende randen met elkaar gekoppeld. Bij deze overige vakjes kun je natuurlijk ook nog kiezen voor meer paartjes binnen een rij aan de rand, dus bijvoorbeeld meer horizontale paren in de bovenste en onderste rij. Er zijn meerdere paarstrategieën mogelijk en hierboven staat er eentje.

In dit hoofdstuk heb ik gekeken naar meerdere manieren om te bewijzen dat voor $S \geq 3$ de niet-beginner kan voorkomen dat de beginner wint. Hoewel het spel theoretisch gezien makkelijker eindigt in een gelijkspel, is het leuk om eens boter-kaas-en-eieren voor een hogere S dan de gebruikelijke $S = 3$ te proberen. Zeker bij de eerste keren spelen, zullen er vast nog veel fouten worden gemaakt waardoor de niet-beginner misschien ook nog kan winnen. We hebben nu gezien dat dat extra knap zou zijn voor de niet-beginner, omdat gelijkspel eigenlijk het hoogst haalbare is!

6 Gelijk spelen in een D-dimensionale kubus

Voor welke S kan de niet-beginner voorkomen dat de beginner wint in een D-dimensionale S-kubus?

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat $S = 3$ en $D = 2$ gelijkspel geeft. $S = 2$ en $D = 2$ zorgt gegarandeerd voor winst voor de beginner. In dit hoofdstuk kijk ik niet alleen naar $D = 2$, maar naar alle $D \geq 1$. Voor $D = 1$ is het duidelijk, want voor $S = 1$ wint de beginner en voor $S = 2$ is er gelijkspel.

Laten we eerst kijken naar $D = 3$. Voor $S = 2$ wint de beginner. De beginner pakt een hoekje (en die zijn er alleen maar) en de niet-beginner heeft nog zeven rijen die met één O geblokkeerd moeten worden. Dat gaat natuurlijk niet, dus de beginner wint. De beginner kan winst afdwingen bij $S = 3$ en $D = 3$.

De eerste speler zet altijd X_1 in het middelste vakje, dus in $(2, 2, 2)$, want dat vakje zit in de meeste rijen. Er zijn nu dertien rijen ontstaan waar X al één symbool in heeft. O moet al deze rijen blokkeren om winst te voorkomen en er zijn nog maar $3^3 - 1 = 26$ vakjes over, dus alle dertien O'tjes moeten ingezet worden om te verdedigen. Telkens als X een zet doet moet O het vakje pakken die hieraan gespiegeld is ten opzichte van X_1. Zo ziet dat eruit voor O:

e	f	g	a	b	c	i	j	k
l	m	h	d	X_1	d	h	m	l
k	j	i	c	b	a	g	f	e

Tabel 6.1: Het 3^3-bord met de strategie voor O (Golomb and Hales, 2002)

Als X wordt gespeeld op bijvoorbeeld $(2, 2, 3)$ (hier m), dan moet O wel op $(2, 2, 1)$. Maar na X_1 in het midden is O_1 aan zet. O lijkt hierdoor steeds een stapje voor te lopen op X. Toch is dat niet zo, omdat elke plek waar X_2 komt te staan (mits X_2 niet tegenover O_1 wordt gezet, maar beide spelers spelen perfect) direct een bedreiging is voor O. X heeft dus een machtige positie als het midden is bemachtigd. O moet verdedigen en X kan met een aantal slimme zetten ervoor zorgen dat de X'en gunstig bij elkaar staan en dat de O's nooit met zijn tweeën in een rij staan. Uiteindelijk doet zich de situatie voor waar X zo geplaatst wordt dat er minimaal twee rijen ontstaan met twee X'en. O kan maar één rij blokkeren en dus wint X! Een voorbeeld van een overwinning voor X is:

	O_2						O_3	O_1
				X_1				
	X_3			X_4			X_2	

Tabel 6.2: Het bord met $D = 3$ en $S = 3$

X heeft een overwinning op $\{3, 2, *\}$. O moet na X_2 wel gaan verdedigen. O is hier dus kansloos. $S = 3$ en $D = 3$ is dus geen antwoord op deze deelvraag. Voor $S = 4$ is bekend dat de beginner hier kan winnen. Ik heb hier geen bewijs voor. De eerste die het wel voor elkaar kreeg, was Oren Patashnik in 1980 (Patashnik, 1980). Hij maakte gebruik van een computer en daarmee rekende hij verschillende mogelijke invullingen door. Door middel van symmetrie kon het aantal mogelijkheden flink gereduceerd worden. Patashnik bewees dat op een 4^3-bord, beter bekend als 'Qubic', de beginner wint.

Bij $S = 5$ en $D = 3$ is dit lastiger, want voor zover ik kan vinden, is dit nog een onopgelost probleem. In de onderstaande tabel is te zien voor welke S en D er zeker gewonnen of gelijkgespeeld wordt. De 'W' geeft winst aan voor de beginner, de 'G' geeft gelijkspel aan. Opvallend zijn vooral de vele vraagtekens, want die staan voor nog onopgeloste situaties. De 'W?' en 'G?' geven wel aan wat het vermoeden is op dit moment, maar bewezen zijn deze vermoedens nog niet.

	S=1	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10
D=1	W	G	G	G	G	G	G	G	G	G
D=2	W	W	G	G	G	G	G	G	G	G
D=3	W	W	W	W	G?	G?	G?	G	G	G
D=4	W	W	W	W	W?	W?	W?	G?	G?	G?
D=5	W	W	W	W	W?	W?	W?	W?	W?	G?
D=6	W	W	W	W	W?	W?	W?	W?	W?	W?

Tabel 6.3: Winnen en gelijkspelen op een S^D-bord (Do, 2005)

Het vermoeden is dus dat voor een 5^3-bord geldt dat er gelijkgespeeld wordt, maar het is nog niet bewezen. Het is opvallend dat we bij $D = 3$ niet zeker weten wat de uitkomst van $S = 5, 6$ en 7 is. We weten het wel zeker bij $S = 8, 9$ en 10.

We hebben een nieuwe stelling nodig om dit te begrijpen. Deze stelling is de stelling van Hall. Het wordt ook wel huwelijksstelling genoemd. Om de stelling te verduidelijken worden namelijk vaak jongens en meisjes gebruikt die gematcht worden. De stelling van Hall bestaat uit twee delen. (Meyer, 2015)

Voorwaarde *Zij G een bipartiete graaf die bestaat uit de sets U en W met $|U| \leq |W|$* [12]. *G voldoet aan Halls voorwaarde als $|N(X)| \geq |X|$ voor elke niet-lege set $X \subseteq U$.*

Hieruit volgt de theorie van Hall.

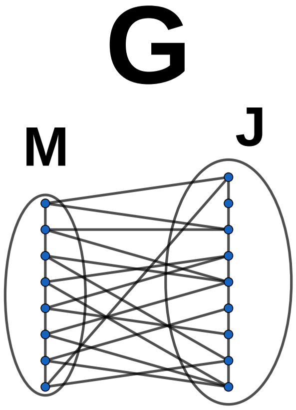
Theorie *Een bipartiete graaf G bestaande uit de grafen U en W met $|U| \leq |W|$, heeft een matching van grootte $|U|$ dan en slechts dan als G aan de voorwaarde van Hall voldoet.*

Om dit te verduidelijken zal ik ook gebruik maken van huwelijken tussen meisjes en jongens.

[12] De notatie $|U|$ staat voor de grootte van U.

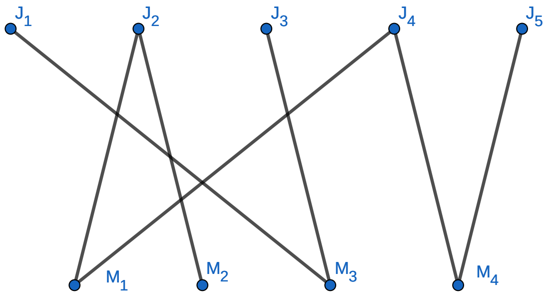
6.1 Huwelijken sluiten

We hebben een groep mensen G. G bestaat uit twee groepen, namelijk een groep meisjes M en een groep jongens J. De groep meisjes is kleiner dan de groep jongens, dus $|M| \leq |J|$. Elk meisje mag een aantal jongens kiezen waar ze mee zou willen trouwen. De jongens vinden het allemaal wel best en geven geen voorkeur door. Als een meisje van een jongen houdt, dan houdt deze jongen ook van het meisje.



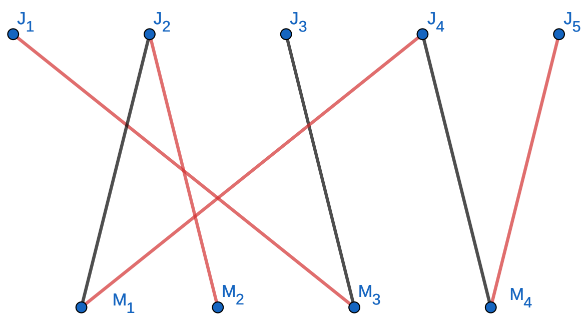
Figuur 6.1: Een groep G met M en J. De lijnen verbinden de meisjes met de jongens die ze leuk vinden.

Om een voorbeeld te geven, heb ik hieronder een tekening staan met vier meisjes en vijf jongens. De vraag is nu of het mogelijk is om elk meisje met een jongen te koppelen.



Figuur 6.2: Voorbeeld met vier meisjes en vijf jongens

Ja, bij deze graaf is dat mogelijk. m_4 is te koppelen met j_5. Verder kan m_2 met j_2. Voor m_1 is er nu een mogelijkheid afgepakt, maar gelukkig ziet m_1 j_4 ook wel zitten, dus die gaan samen trouwen. Dan moet alleen m_3 nog gekoppeld worden en dat kan bijvoorbeeld met j_1. j_3 heeft deze keer minder geluk en zal verder moeten zoeken.



Figuur 6.3: Oplossing van het voorbeeld. Rode lijnen geven een match aan.

Wat heeft dit voorbeeld met de stelling van Hall te maken? In de voorwaarde van Hall staat (vertaald naar dit huwelijksprobleem):

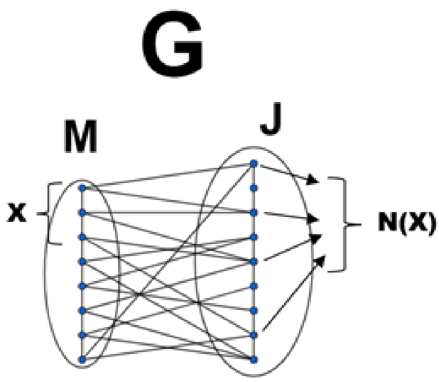
Voorwaarde *Zij G een bipartiete graaf die bestaat uit de sets M (meisjes) en J (jongens) met $|M| \leq |J|$ (het aantal meisjes is kleiner dan het aantal jongens). G voldoet aan Halls voorwaarde als $|N(X)| \geq |X|$ voor elke niet-lege set $X \subseteq M$.*

X en $N(X)$ zijn subsets van M en J. $N(X)$ is eigenlijk het beeld van X. X stelt een groepje meisjes voor uit M. Dat kan het groepje $\{m_1, m_3\}$ zijn, maar ook alleen $\{m_4\}$ of alle meisjes, dus $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$. Natuurlijk zijn er ook nog andere opties. $N(X)$ zijn alle beelden die afkomen van de gekozen groep originelen, dus bij $X = \{m_1, m_2\}$ hoort $N(X) = \{j_2, j_3, j_4\}$. $N(X)$ zijn dus alle jongens waar een lijntje naartoe loopt vanuit de gekozen X. De regel *"G voldoet aan Halls voorwaarde als $|N(X)| \geq |X|$ voor elke niet-lege set $X \subseteq M$."* betekent dus dat voor elke subset X die te maken is met de meisjes in M moet gelden dat de groep bijbehorende jongens groter is dan het origineel, dus $|N(X)| \geq |X|$. De vraag is alleen hoe dat je dit voor elke subset X kunt controleren. Bij het voorbeeld is dit nog best te doen, maar het wordt al een stuk lastiger bij vijf meisjes en zes jongens en het wordt al helemaal lastig om het te checken bij honderd meisjes en tweehonderd jongens.

Stel nu dat we weer een groep meisjes en jongens hebben (zie figuur 6.1) en voor deze bipartiete graaf geldt dat:

- Elk meisje $m \in M$ houdt van minstens a jongens;
- De liefde is wederzijds, dus deze jongens houden ook van dit meisje m;
- Elke jongen $j \in J$ houdt van hoogstens a meisjes.

Het is lastig om dit voor elke $X \subseteq M$ te checken, maar door deze voorwaarden zijn er nieuwe mogelijkheden ontstaan. Kijk naar een willekeurige subset X.



Figuur 6.4: Graaf G met subset $X \subseteq M$ en $N(X) \subseteq J$. X bereikt bepaalde punten in J en die samen zijn $N(X)$.

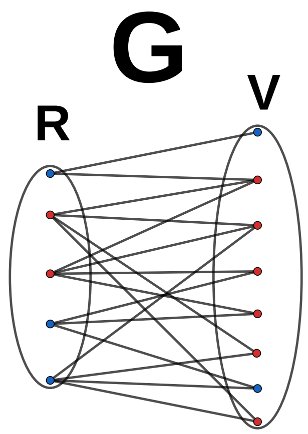
We kijken naar het aantal lijnen dat uit X komt. Omdat één meisje houdt van minstens a jongens, zijn er dus minstens $a|X|$ lijnen die uit X naar J gaan. Stel dat L het aantal lijnen is tussen X en $N(X)$, dan geldt dus dat $a|X| \leq L$. Gelijkheid geldt dan en slechts dan als elk meisje in X van *precies* a jongens houdt.

Alle eindpunten van die lijnen vormen de $N(X)$. Het aantal lijnen dat $N(X)$ maximaal 'op kan nemen' is $a|N(X)|$, want naar elk eindpunten van zo'n lijn (een jongen) gaan hoogstens a lijnen. Het betekent niet dat alle lijnen die naar $N(X)$ gaan uit X komen. Kijk hiervoor naar het voorbeeld (figuur 6.2). Voor $X = \{m_2, m_3\}$ geldt dat $N(X) = \{j_1, j_2, j_3\}$. Niet alle lijnen die naar j_2 gaan, komen uit $\{m_2, m_3\}$, want ook tussen m_1 en j_2 loopt een lijntje. Toch weten we zeker dat $N(X)$ maximaal $a|N(X)|$ lijnen 'opneemt'. Er geldt dus ook dat $L \leq a|N(X)|$. Gelijkheid geldt dan en slechts dan als elke jongen in $N(X)$ precies a meisjes leuk vindt en als geen één jongen in $N(X)$ houdt van een meisje dat niet in X zit.

Nu we deze twee vergelijkingen hebben, kunnen we dit samenvoegen tot $a|X| \leq L \leq a|N(X)|$. Delen door a geeft $|X| \leq |N(X)|$ en dat is precies wat bewezen moest worden. De graaf G voldoet dus aan de voorwaarde van Hall en vanwege de theorie van Hall is er dus een matching mogelijk van grootte $|M|$. Elk meisje heeft dus een jongen! (Meyer, 2015)

6.2 Vakjes in rijen en rijen met vakjes

Nu is dit probleem in de boter-kaas-en-eierenwereld nog een stukje lastiger. In deze bipartiete graaf G is sprake van een graaf V voor de vakjes in het spel en een graaf R voor de rijen in het spel. Er geldt dat $|V| \geq |R|$ als de S maar groot genoeg is. Bij bijvoorbeeld $S = 5$ en $D = 3$ is $|V| = 5^3 = 125$ en $|R| = \frac{(5+2)^3 - 5^3}{2} = 109$, dus $|V| \geq |R|$. Verder introduceer ik nog een letter b die staat voor het aantal keren dat een vakje maximaal in een rij zit. Er geldt dus $b \geq D$, want elke cel zit in ieder geval in D rijen waarin $D - 1$ dimensies zijn vastgelegd. Ik ga bewijzen dat er voor een zekere S een paarstrategie bestaat voor een gelijkspel. Voor dit bewijs is de aanname nodig zodat $S \geq 2b$. (Bollobás, 2002) De situatie is dus als volgt (in de werkelijkheid is de graaf natuurlijk veel groter, maar nu wordt het onoverzichtelijker):



Figuur 6.5: G bestaat uit een graaf R voor de rijen en V voor de vakjes. De rode punten geven R' en $N(R')$ aan.

Elk element in R heeft exact S lijnen naar V, want in elke rij zitten exact S vakjes. Voor elk element in V geldt dat het hoogstens b lijnen heeft naar R, want b is per definitie het aantal keren dat een vakje in een rij kan zitten.

Pak een subset $R' \subseteq R$. Het beeld dat hoort bij R' is $N(R')$ (zie figuur 6.5). Noem M het aantal lijnen tussen R' en $N(R')$. Er geldt dat elk element in R' precies S lijnen heeft naar $N(R')$ en er zitten $|R'|$ elementen in R', dus $M = S|R'|$.

Er geldt dat elk element in $N(R')$ hoogstens b lijnen heeft naar R. Het aantal lijnen naar R uit al deze $|N(R')|$ elementen is dus hoogstens $b|N(R')|$. Niet al deze lijnen naar R gaan ook daadwerkelijk naar R', dus $M \leq b|N(R')|$.

Deze twee vergelijkingen met M zijn te combineren tot $b|N(R')| \geq M = S|R'| \geq 2b|R'|$. Delen door b geeft dat $|N(R')| \geq 2|R'|$. Dit is precies wat bewezen moet worden om G aan de voorwaarde van Hall te laten voldoen. Vanwege de theorie van Hall is er dus een match van grootte $|R|$. Dit is ook precies wat nodig is om te bewijzen dat er een paarstrategie bestaat. Daarvoor is de 2 voor $|R'|$ heel belangrijk. Hierdoor zijn er zelfs twee matchings te vinden. Bij elke rij hoort een vakje. Deze vakjes claimt de beginner. Vanwege de 2 in de ongelijkheid, zijn er na het matchen van een vakje aan een rij nog genoeg vakjes over om dit nogmaals te doen! Deze vakjes claimt de niet-beginner.

Pak bijvoorbeeld een subset R' met $|R'| = 1$. Je pakt dus eigenlijk precies één rij waarin je probeert te winnen. Vanwege de net bewezen stelling is $|N(R')| \geq 2|R'| = 2$, dus er zijn in ieder geval twee vakjes die in die rij zitten. Als de beginner een van die vakjes pakt, dan is er dus altijd nog een ander vakje die de niet-beginner kan pakken om die rij te blokkeren. Eén symbooltje is natuurlijk voldoende om de hele rij te blokkeren. Over het algemeen geldt er dus dat er altijd een vakje is dat de niet-beginner kan claimen als de beginner een rij probeert te vullen met alleen maar X. De niet-beginner pakt dan gewoon het andere vakje en dus heeft de niet-beginner een paarstrategie!

Het zou helemaal mooi zijn als we S nu kunnen uitdrukken in D. In plaats van te kijken naar een subset R' van R kunnen we natuurlijk ook kijken naar de hele graaf R, dus $R' = R$. Dan geldt er dus dat $|N(R)| \geq 2|R|$. Omdat elk vakje in een rij zit en in elke rij een vakje zit, is het beeld van R precies de hele graaf V, dus $|V| \geq 2|R|$. (Hales and Jewett, 1963) We weten $|V|$ en $|R|$, want het aantal vakjes op een speelveld is gelijk aan S^D en het aantal rijen op een speelveld is gelijk aan $\frac{(S+2)^2 - S^D}{2}$, dus

$$S^D \geq (S+2)^D - S^D$$

Nu is de S vrij te schrijven, dus

$$2S^D \geq (S+2)^D$$

$$2 \geq (1 + \frac{2}{S})^D$$

$$\sqrt[D]{2} \geq 1 + \frac{2}{S}$$

$$S \geq \frac{2}{\sqrt[D]{2} - 1}$$

Het is beter om de rechterkant altijd naar boven af te ronden, omdat hier ook decimale getallen uitkomen voor bepaalde D, dus

$$S \geq \left\lceil \frac{2}{\sqrt[D]{2} - 1} \right\rceil$$

Deze notatie $\lceil ... \rceil$ geeft aan dat je naar boven afrondt op gehele getallen. Zo is $\lceil x \rceil = n$ als $n - 1 < x \leq n$. Verklaart deze vergelijking dan de waarneming in tabel 6.3? Voor $D = 2$ geldt dat $S \geq \left\lceil \frac{2}{\sqrt{2}-1} \right\rceil = \lceil 4,828... \rceil = 5$. En in hoofdstuk 5 zagen we inderdaad dat voor $S = 5$ een paarstrategie bestaat.

Voor andere D geldt:

$D =$	$S =$
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14
6	17

Tabel 6.4: Voor deze S en groter is er een paarstrategie

$D = 3$ geeft $S = 8$ en dit klopt inderdaad met de tabel. Dit verklaart waarom er voor $S = 8, 9, 10$ zeker gelijkspel mogelijk is. Daarmee is er een antwoord gevonden voor deze deelvraag. Voor elke $S \geq \left\lceil \frac{2}{\sqrt[D]{2}-1} \right\rceil$ kan de tweede speler gelijkspel afdwingen.

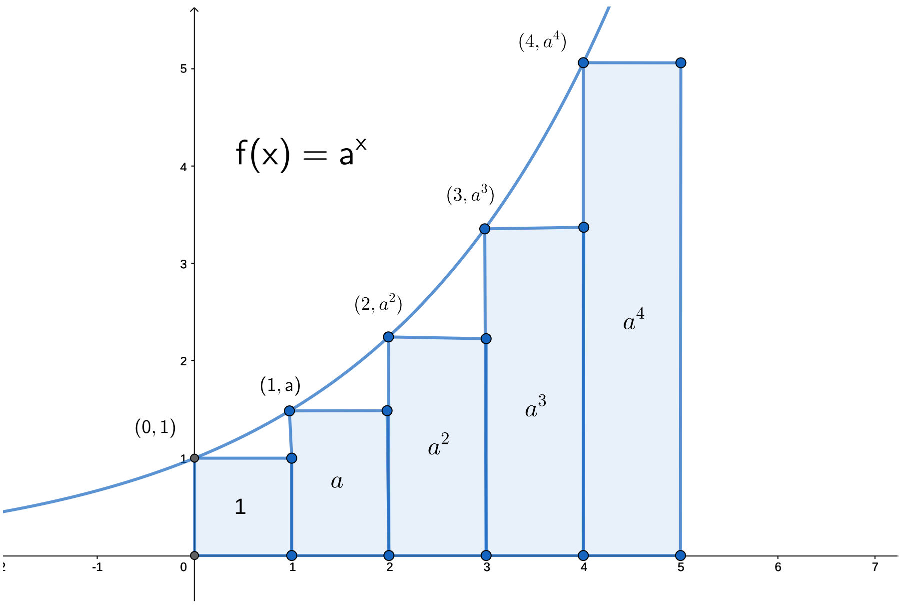
6.3 Een extraatje

Het waren Golomb en Hales die deze uitdrukking voor S als eerste vonden. Sinds deze ontdekking is boter-kaas-en-eieren een onderwerp waar meerdere wiskundigen het hoofd over gebroken hebben. Na het vinden van deze uitdrukking hebben ze ook nog naar de getaltheorie gekeken. Daaruit kwam de volgende vergelijking. In deze vergelijking is $a = \sqrt[D]{2}$.

$$\frac{2}{\sqrt[D]{2}-1} = 2 \cdot \frac{a^D - 1}{a-1} = 2(1 + a + a^2 + \dots a^{D-1})$$

$$\approx 2 \cdot \int_0^D a^t \, dt = 2 \cdot \frac{a^D - 1}{\ln a} = \frac{2D}{\ln 2}$$

Alle dingen die met het is-teken verbonden worden, zijn best logisch, maar de stap $2(1 + a + a^2 + \dots a^{D-1}) \approx 2 \cdot \int_0^D a^t \, dt$ is wat minder logisch. Daarom heb ik een plaatje gemaakt om dit te verduidelijken.



Figuur 6.6: De grafiek a^x

$\int_0^D a^t \, dt$ komt overeen met de oppervlakte onder de grafiek $f(x) = a^x$. $(0,1)$ ligt op a^x. Nu kun je een vierkant maken met oppervlakte 1 die gaat van de x-as naar $(0,1)$ tot $(1,1)$. Bij $x = 1$ hoort dan weer $(1,a)$. Door een rechthoek te tekenen met lengte a en breedte 1, heb je een rechthoek met oppervlakte a gemaakt. Dit kun je doen tot en met $x = D - 1$. Je maakt dan een rechthoek van de x-as naar $(D-1, a^{D-1})$ tot (D, a^{D-1}). Je hebt nu het oppervlak onder de grafiek van $x = 0$ tot en met $x = D$, dus $\int_0^D a^t \, dt$. Dit komt overeen met $1 + a + a^2 + a^3 + \dots a^{D-1}$. Het is niet precies gelijk aan elkaar, dus vandaar het teken voor bijna gelijk. Er geldt dat $1 + a + a^2 + a^3 + \dots a^{D-1}$ iets kleiner is dan de werkelijke oppervlakte onder de grafiek. Door $\frac{2}{\sqrt[D]{2}-1} = 2(1 + a + a^2 + \dots a^{D-1})$ naar boven af te ronden met $\lceil \dots \rceil$ en $2 \cdot \int_0^D a^t \, dt = \frac{2D}{\ln 2}$ naar beneden af te ronden met $\lfloor \dots \rfloor$, krijg je

$$\left\lceil \frac{2}{\sqrt[D]{2}-1} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2D}{\ln 2} \right\rfloor$$

Deze gelijkheid houdt het goed vol als je er een rekenprogramma op los laat! Het eerste getal waarvoor deze twee uitdrukkingen niet meer gelijk zijn aan elkaar, is $D = 6.847.196.937$. Een bord met $S = \left\lfloor \frac{2D}{\ln 2} \right\rfloor = 19.756.834.129$ is net te klein voor het bestaan van een paarstrategie. Jammer genoeg blijft het niet bij één tegenvoorbeeld. Het tweede tegenvoorbeeld dient zich aan bij $D = 27.637.329.632$, want $S = \left\lfloor \frac{2D}{\ln 2} \right\rfloor = 79.744.476.806$ is net te klein voor een paarstrategie. (Golomb and Hales, 2002)

Ik kan alleen deze twee tegenvoorbeelden vinden in de literatuur. Er is geen bewijs dat dit de enige twee tegenvoorbeelden zijn. Daarom is het volgende vraagstuk in het leven geroepen.

Voor hoeveel positieve gehele getallen D geldt dat

$$\left\lceil \frac{2}{\sqrt[D]{2} - 1} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2D}{\ln 2} \right\rfloor$$

niet waar is?

Dit probleem is nog onopgelost. Niet alleen op het gebied van combinatoriek, maar ook op het gebied van getaltheorie is er dus nog genoeg te ontdekken.

7 | Een S met een winnaar en verliezer

Bestaat er voor alle $D > 1$ een S zodat de beginner altijd kan winnen?

In dit hoofdstuk ga ik op zoek naar een S waarvoor altijd geldt dat de beginner wint ongeacht de dimensie waarin gespeeld wordt. In principe voldoet $S = 1$, maar die tellen we niet mee. Elk D-dimensionaal bord bestaat namelijk uit $1^D = 1$ vakje, dus O mag niet meespelen. De volgende S is dus $S = 2$ en daar kunnen we al meer mee.

We spelen 2-op-een-rij in een 2^D-kubus. Er zitten 2^D vakjes in deze kubus en er zijn $\frac{4^D - 2^D}{2}$ rijen waarin gewonnen kan worden. Een voorbeeld van een 2^6-kubus is:

X_1							

Tabel 7.1: Een 2^6-bord

Ik heb het bord even opgedeeld in zestien 2^2-borden. Twee van deze borden vormen samen een 2^3-bord, twee 2^3-borden vormen samen een 2^4-bord en zo verder tot je een 2^6-bord krijgt met $X_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Nu wil de niet-beginner X_1 blokkeren, maar dat zal lastig gaan. Elk vakje in een 2^6-bord zich in een hoekje bevindt. Er zijn te veel rijen (waaronder veel diagonalen over meerdere dimensies) die nu al bijna vol zitten. X_1 zit in $2^6 - 1$ rijen die nog maar één extra X nodig hebben om te voldoen aan een winnend rijtje. Elk vakje op het bord zit namelijk in een rij met X_1. Een rij heeft tenminste één coördinaat die oplopend of aflopend is. Elk ander vakje dan X_1 heeft minimaal één 2 in het coördinaat zitten. Er is dus altijd minstens één waarde die op- of aflopend is en dus vormen deze twee vakjes samen een geldig rijtje. Het hele bord, behalve X_1 zelf, zit in een rij met X_1 en dus zijn er $2^6 - 1$ rijen met X_1. Het gaat de tweede speler natuurlijk niet lukken om 63 rijen te blokkeren met slechts één symbool. X wint dit spel dus.

Algemener spelen we op een 2^D-bord 2-op-een-rij boter-kaas-en-eieren. Zet X_1 weer op $\underbrace{(1, 1, ...1, 1)}_{\text{D keer}}$. Er zijn nog $2^D - 1$ vakjes niet geclaimd door X_1 en dus zijn er ook $2^D - 1$ rijen waarin de beginner nog maar één X extra nodig heeft om te kunnen winnen. Al deze $2^D - 1$ rijen moeten dus geblokkeerd worden door maar één O. Dit gaat niet als $2^D - 1 > 1$, want dan zijn er meer O'tjes nodig dan de niet-beginner mag zetten en dat is als $D > 1$. Dus voor elke $D > 1$ wint de beginner gegarandeerd voor $S = 2$.

8 | De belangrijkste vraag

Wat is de kleinste S voor alle D waarvoor geldt dat beide spelers die het spel S-op-een-rij boter-kaas-en-eieren spelen in een D-dimensionale S-kubus met $S > 1$ en $D \geq 1$, elkaar altijd van winst kunnen behouden?

Dit profielwerkstuk heeft natuurlijk het uiteindelijke doel om de hoofdvraag te beantwoorden. Nu alle termen ooit langs zijn gekomen, is de hoofdvraag beter toe te lichten. We zijn dus op zoek naar de kleinste S (het liefst uitgedrukt in een formule met D) waarbij het spel eindigt in een gelijkspel. Laten we $S(D)$ definiëren als de kleinste S voor de gekozen D waarvoor gelijkgespeeld wordt.

In hoofdstuk 6 heb ik laten zien dat voor $S \geq \left\lceil \frac{2}{\sqrt[D]{2}-1} \right\rceil$ gelijkspel mogelijk is en in hoofdstuk 7 heb ik laten zien dat voor $S = 2$ altijd winst mogelijk is voor alle $D > 1$. Er bestaat een S zodat de beginner wint én er bestaat een S zodat er gelijkgespeeld wordt. Ergens daartussen ligt de kleinste S waarvoor de niet-beginner de beginner kan weerhouden van winst. We zijn op zoek naar die kleinste S. Voor deze S geldt dat er bij $S - 1$ nog gewonnen wordt door de beginner. We zijn dus geïnteresseerd in het omslagpunt tussen winst en gelijkspel.

Neem nou bijvoorbeeld $D = 1$. Daarvoor is $S(1) = 2$ de kleinste S waarvoor dit geldt, want bij $S = 1$ wint de beginner en bij $S = 2$ wordt er gelijkgespeeld. Voor $D = 2$ geldt dat de kleinste $S(2) = 3$, want bij $S = 2$ wint de beginner en bij $S = 3$ wordt er gelijkgespeeld. Zie hiervoor tabel 6.3 die ik voor het gemak hieronder nog eens heb ingevoerd.

	S=1	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10
D=1	W	G	G	G	G	G	G	G	G	G
D=2	W	W	G	G	G	G	G	G	G	G
D=3	W	W	W	W	G?	G?	G?	G	G	G
D=4	W	W	W	W	W?	W?	W?	G?	G?	G?
D=5	W	W	W	W	W?	W?	W?	W?	W?	G?
D=6	W	W	W	W	W?	W?	W?	W?	W?	W?

Tabel 8.1: Een kopie van tabel 6.3

8.1 Het vermoeden van Transtrend

Toen ik deze vraag doorgestuurd kreeg van mijn begeleiders van Transtrend, hadden ze zelf een vermoeden.

Het vermoeden van Transtrend *De kleinste S voor alle D waarbij gelijkgespeeld wordt, is $S(D) = D + 1$.*

De bedoeling was dat ik kon bewijzen dat $S(D) = D + 1$. Erg lang blijft dit vermoeden niet overeind, want het sneuvelt al bij $D = 3$. Voor $D = 3$ geldt namelijk dat de beginner nog *wel* wint voor $S = 4$, dus $S(3) \neq 4$.

8.2 Het vermoeden van Femke

Ik heb een ander vermoeden kunnen ontwikkelen. Tabel 6.3 laat zien dat de (vermoedelijke) grens tussen winst en gelijkspel niet echt lekker te schrijven is als een mooie formule met $S(D)$ en D. Er geldt dat $S(1) = 2$ en $S(2) = 3$ en we vermoeden dat $S(3) = 5$. Mijn eigen vermoeden was dus ook dat $S(D) = S(D-1)+D-1$. Zo is $S(3) = S(3-1)+3-1 = S(2)+2 = 3+2 = 5$. Dat past bij het vermoeden. De volgende stap is dan $S(4) = S(3) + 3 = 8$ en ook dat klopt met tabel 6.3! Ook al baseert deze reeks zich verder op vermoedens, het lijkt tot nu toe wel te kloppen.

Voor $S(5)$ lijkt $S(4) + 4 = 12$ dan wel een goede waarde. Helaas moeten we hier ons enthousiasme iets temperen. Uit de tabel blijkt dat het vermoeden nu is dat $S(5) = 10$. Dit gaat niet goed. Onze grens is ook deels bevestigd door vermoedens. Dit vermoeden lijkt dus te *ruim*, maar de tabelgegevens zeggen niet dat het *fout* is. Dit is zeker het proberen waard om te bewijzen. We lopen hierbij wel aan tegen een ander probleem: $S(D)$ is afhankelijk van $S(D-1)$. We hebben de gegevens van $D-1$ nodig om D te bepalen. Boter-kaas-en-eieren beredeneren vanuit lagere dimensies is niet altijd even succesvol. Zo liggen er nog twee andere problemen open. (Golomb and Hales, 2002) En zoals wel vaker in de wiskunde lijkt het heel logisch, maar het bewijs is lastig rond te krijgen.

Onopgeloste problemen

- Als er gelijkgespeeld wordt op een S^D-bord, dan wordt er ook gelijkgespeeld op een S^{D-1}-bord.
- Als er gelijkgespeeld wordt op een S^D-bord, dan wordt er ook gelijkgespeeld op een $(S+1)^D$-bord.

Het lijkt zo logisch, maar het perfect op papier krijgen, is tot nu toe niemand gelukt. Het is hooguit gelukt voor een aantal specifieke gevallen zoals $D = 2$. Het eerste puntje heeft wat overeenkomsten met ons vermoeden. Daarin gaan we ook van een dimensie naar de dimensie lager. Stel dat er bewezen wordt dat er gelijkgespeeld wordt op een 6^3-bord. Dan mag je vanwege puntje twee niet aannemen dat op een 7^3-bord ook gelijkgespeeld wordt. Mijn vermoeden is dus niet alleen gebaseerd op vermoedens, maar het bewijs heeft waarschijnlijk stellingen nodig die nog niet bewezen zijn. Maar zolang er geen tegenvoorbeelden gevonden zijn, blijft het vermoeden staan.

8.3 Winst voor D en $D + 1$

Het is makkelijk te bewijzen dat winst op een S^D-bord betekent dat er ook gelijkgespeeld wordt op een S^{D+1}-bord en zelfs voor alle hogere dimensies dan D. Stel dat er door de eerste speler gewonnen wordt in een spel met $S = x$ en $D = y$. Nu gaan de twee spelers tegen elkaar spelen in een spel met $S = x$ en $D = y + 1$. De beginner heeft schijnbaar een manier om winst af te dwingen op een x^y-bord en een x^{y+1}-bord zijn eigenlijk x x^y-borden aan elkaar gemaakt. De beginner kiest gewoon een bord uit deze x x^y-borden en voor dit bord heeft deze speler een winstrategie. De eerste speler heeft die extra borden helemaal niet nodig om te winnen en dus zal de beginner ook winnen op een x^{y+1}-bord. Op deze manier kan de beginner dus altijd winnen voor een $D > y$. Daarom weten we dat winst op een 4^3-bord ook winst op een 4^4-, 4^5- en 4^6-bord betekent. Dit is ook te zien in tabel 6.3.

8.4 Aangescherpte grenzen

Een andere manier om dichter bij de grens te komen, is het aanscherpen van de onder- en bovengrens. $S \geq \left\lceil \frac{2}{\sqrt[D]{2}-1} \right\rceil$ is niet de kleinste waarde waarvoor gelijkspel mogelijk is en $S = 2$ is niet de grootste S waarbij gewonnen wordt door de beginner. Onze gevonden bovengrens is wel gelijk de kleinste S waarvoor een paarstrategie bestaat. Voor alle andere $S < \left\lceil \frac{2}{\sqrt[D]{2}-1} \right\rceil$ kan de niet-beginner niet winnen dankzij een paarstrategie. Dat maakt het gelijk zo lastig om deze theorieën te begrijpen. Er zijn wel wat aanscherpingen gevonden, maar alleen in de notatie van de vergelijking of in de stelling worden zo veel begrippen en symbolen gebruikt dat ik deze niet meer in mijn profielwerkstuk ga behandelen. Zo geldt er dat er gelijkgespeeld wordt als $S \geq 3^D - 1$ voor een oneven S en dat $S \geq 2^{D+1} - 2$ als S even is. (Hales and Jewett, 1963). Deze grenzen zijn niet scherper dan onze gevonden $S \geq \left\lceil \frac{2}{\sqrt[D]{2}-1} \right\rceil$. Naast wat bewijzen van losse gevallen blijft de bovengrens te ruim om er echt iets mee te kunnen. Voor de ondergrens houd ik het op winst voor elke D als $S = 2$. De aanscherpingen verder zijn losse gevallen en die heb ik al eerder genoemd in dit profielwerkstuk.

8.5 Conclusie

De wereld van hoger-dimensionale kruisjes en rondjes is op zijn minst interessant maar ingewikkeld te noemen. Eerlijk is eerlijk, het is mij niet gelukt om deze hoofdvraag te beantwoorden. We moeten eerst nog andere hindernissen in de vorm van onopgeloste stellingen en vermoedens overwinnen, voordat deze vraag beantwoord kan worden. Graag voeg ik hier zelf ook nog een vermoeden aan toe:

Het vermoeden van Femke *In een S^D-kubus kan de niet-beginner gelijkspel afdwingen als $S \geq S_D$ en $S_D = S_{D-1} + D - 1$ met $S_1 = 2$.*

Aangezien dat niet voor alle S geldt dat $S(D) = S(D-1)+D-1$ heb ik ervoor gekozen om de notatie van een recursieve formule te pakken. Voor $1 \leq D \leq 4$ lijkt $S(D) = S(D-1) + D - 1$ wel te kloppen, maar voor $D > 4$ niet. Dit vermoeden is dus wel een vermoeden voor een aangescherpte grens, maar het is niet dé grens waar we naar op zoek zijn. Zeker weten we dat de grens waar we naar op zoek zijn, ligt tussen $S = 2$ en $S \geq \left\lceil \frac{2}{\sqrt[D]{2}-1} \right\rceil$ voor elke D. Het lukt nu nog niet om een harde grens te vinden. Daarvoor bevat dit probleem nog te veel mysteries...

9 | Toepassingen

Boter-kaas-en-eieren is veel meer dan 'gewoon een spelletje'. Door de grootte van het bord, de dimensie van het bord of de grootte en de dimensie te veranderen, krijg je een prachtig wiskundig spel! Het spel is verbonden met vele stellingen. De belangrijkste is waarschijnlijk de dichtheidsstelling van Hales en Jewett. Die zegt zoiets als:

Voor elke $R, S \in \mathbb{N}$ is er een getal $HJ(R, S)$ met $D \geq HJ(R, S)$ en een S^D-bord gekleurd in R kleuren, zodat er tenminste één rij bestaat met één kleur. (Hales and Jewett, 1963)

Dit heeft veel weg van het spel boter-kaas-en-eieren. In plaats van twee spelers zijn er nu R spelers (R kleuren) en deze stelling stelt dat er voor bepaalde R en S mogelijk is om D te kiezen zodat er een speler is die een volledige rij ingekleurd heeft. In onze boter-kaas-en-eieren wereld staat dat gelijk aan winst voor deze speler. Als je ook het aantal speler veralgemeniseerd, dan heb je al helemaal een mooi spel. Dat doen Hales en Jewett in hun stelling. Er geldt dat $HJ(1, S) = 1$ (dus $R = 1$), want iemand die alleen speelt, kan natuurlijk altijd een rij met zijn kleur vullen. Ook geldt er dat$HJ(2, 2) = 2$, dus we spelen met 2 spelers en $S = 2$. Dan geldt er dat er op een 2^D-bord met $D \geq 2$ gewonnen kan worden. Dit zien we ook in tabel 8.3. Verder weten we dat $HJ(2, 3) = 4$ en daar blijft het bij. Van andere $HJ(R, S)$ weten we geen exacte waarde. (Näslund, 2013)

Deze stelling is in 1963 gepubliceerd en pas in 1991 bewezen door twee wiskundigen uit Israël. Ze heten Hillel Furstenberg en Yitzhak Katznelson. (Furstenberg and Katznelson, 1991) Nog steeds publiceren ze artikelen over onderwerpen van dit vakgebied. Ze maakten gebruik van een bijzondere tak van wiskunde die de ergodentheorie heet. Dit bewijs gaat verder dan 'gewoon wat combinatoriek'. Dat maakte de Britse wiskundige Timothy Gowers nieuwschierig. (Brandhof, 2018) Hij vroeg zich af of het ook zonder de ingewikkelde ergodentheorie bewezen kan worden. Gowers startte op 27 januari 2009 een experiment op. Dit experiment heet het Polymath-project. Gowers zette het probleem van Hales en Jewett online en stelde voor om samen het probleem op te lossen. Iedereen kon helpen en ideeën delen. Op deze manier werkten studenten, docenten en grote wiskundigen als Terence Tao samen naar een combinatorisch bewijs voor deze stelling. Het lukte! Op 10 maart was de klus al geklaard en was het bewijs rond. De officiële publicatie was in 2012. (Polymath, 2012) Deze aanpak van problemen is erg succesvol gebleken. Het Polymath-project draait nog steeds en telkens weer met een nieuw probleem.

Hoewel de stelling al bewezen was, is een tweede bewijs altijd handig. Het kan leiden tot nieuwe inzichten. Op dezelfde manier kunnen inzichten in het boter-kaas-en-eierenprobleem wellicht bijdragen aan andere problemen. Boter-kaas-en-eieren is lang niet het enige spel met hogere dimensies. Neem nou het spel SET. Het is een spel met 81 kaarten met 4 eigenschappen met steeds 3 variaties. Alle symbolen op de kaartjes zijn bijvoorbeeld lichtgrijs, donkergrijs of zwart. Elk kaartje is uniek. Dit heeft veel weg van een 3^4-bord. Bij SET ga je op zoek naar drie kaarten met allemaal dezelfde of allemaal verschillende variaties van de vier eigenschappen. Bij 4-dimensionaal 3-op-een-rij boter-kaas-en-eieren werkt dit ongeveer ook zo. Je gaat op zoek naar drie coördinaten waarvan elk element hetzelfde of verschillend (oplopend of aflopend) is. Ook binnen het spel SET zijn er nog onopgeloste problemen. (Brandhof, 2018)

Boter-kaas-en-eieren is een spel dat valt onder speltheorie. Het gaat over beslissingen en strategieën. We hebben strategieën al vaker gezien in dit profielwerkstuk en ze zijn ook in de praktijk heel belangrijk. De beginner moet soms een rij als verloren beschouwen om zijn positie in een andere rij te versterken. Economie draait ook om keuzes maken. Speltheorie heeft dan ook een belangrijke toepassingen in de economie. Tijdens het spel van verkopen en kopen is er een constante wisselwerking tussen de verkoper en koper. Het bod van de een heeft invloed op het bod van een ander. Beiden willen zo optimaal mogelijk spelen en een zo goed mogelijke deal bereiken. (AGconnect, 2008) Dit past ook bij Transtrend, want Transtrend handelt in verschillende markten. Op de markt willen mensen een bepaalde prijs betalen en krijgen voor een goed. Er worden constant keuzes en afwegingen gemaakt om de maximale winst te behalen. Dat zijn ook de principes van de speltheorie.

Speltheorie komt bij veel principes ook indirect voor. Zo werken politiek, filosofie en psychologie ook met speltheorie. Er worden keuzes gemaakt en keuzes leiden tot een bepaald gedrag. Waarom kiest iemand dit? Deze uitkomst zal dan het meest gunstige scenario zijn. Speltheorie beschrijft het gedrag van de mensen dat voortkomt uit de keuzes die ze maken.

Je kunt ook een algoritme proberen te ontwikkelen waardoor de computer altijd probeert optimaal mogelijk te spelen. Dit algoritme wordt ook wel het Minimax algoritme genoemd. Het doel is om het slechtste senario te minimaliseren. (Surma, 2018) Door de computer te laten oefenen met een potje boter-kaas-en-eieren kan Kunstmatige Intelligentie verbetert worden en daar zijn weer genoeg toepassingen voor te bedenken!

Het bewijs voor winst op een 4^3-bord maakte ook gebruik van computerberekeningen. Alle mogelijkheden waren te veel om door te rekenen, maar door slim gebruik te maken van symmetrieën lukte het. Deze aanpak is wellicht ook handig voor andere problemen met te veel data. Het leert ons hoe we het aantal door te rekenen gevallen kunnen reduceren.

Hoger-dimensionaal boter-kaas-en-eieren is een mooi theoretisch experiment uit de speltheorie. Zowel de strategieën zelf als de manier waarop we nieuwe strategieën vinden, hebben toepassingen in de praktijk. Boter-kaas-en-eieren heeft veel overeenkomsten met andere spellen in de speltheorie en nieuwe inzichten in de wereld van boter-kaas-en-eieren zorgen wellicht voor doorbraken bij andere spellen. Speltheorie is belangrijk in situaties waar het gebruik van strategieën en het streven naar maximale winst een rol spelen. Boter-kaas-en-eieren is ook een mooie manier om optimale algoritmes te ontwikkelen door de eenvoud van regels. Het is toch maar fijn dat wiskundigen graag dingen veralgemeniseren, zoals een groter bord, hogere dimensies en meer spelers, want anders hadden we al deze toepassingen maar vooral al deze prachtige wiskunde moeten missen!

10 | Gecodeerde woorden

De codetaal achter de pagina's

Dit profielwerkstuk wiskunde is niet gemaakt in Word. Ik heb gebruik gemaakt van het programma Overleaf. Dat is een online tekstverwerker voor de codetaal LaTeX. Het is veel makkelijker om wiskundige symbolen in te voeren met Overleaf dan met Word.

Het lijkt wellicht geen voor de hand liggende keuze voor een middelbare scholier om het vertrouwde Word te laten schieten voor het programma Overleaf. Ik had voor het profielwerkstuk al wel wat ervaring met LaTeX, omdat ik twee jaar in de trainingsgroep van de Nederlandse Wiskunde Olympiade mocht zitten. Elke week stonden er vier opgaven klaar die ik in WinEdt ingevoerde en vervolgens doorstuurde naar mijn tutor. Toch liep alles wat minder soepel dan ik gehoopt had toen ik aan mijn profielwerkstuk begon. Normaal kreeg ik een voorgeprogrammeerd setje, maar nu moest ik zelf aan de slag met het bouwen van een document. Hier bleef het niet bij, want mijn bestand moest worden voorzien van hoofdstukken, bronnen, plaatjes en tabellen. Ik ben regelmatig vastgelopen in dit proces. Gelukkig heeft Transtrend mij geholpen. Michael adviseerde mij het gebruik van Overleaf.

Ik heb mijn LaTeX-bestand in Overleaf geplakt en ben in Overleaf verder gegaan. Het was in het begin even wennen, maar ik ben blij dat ik heb gedaan heb! Ik vind Overleaf veel fijner dan WinEdt. Een aantal dingen die in LaTeX niet lukte en in Overleaf wel, waren bijvoorbeeld hoofdstukken, inhoudsopgave en plaatjes. Ik vulde het bestand aan met nieuwe codes. Het werd langzamerhand een echt profielwerkstuk!

```
    \begin{table}[H]
    \centering
    \begin{tabular}{c|c c c c c c c c c c}
         & S=1 & S=2 & S=3 & S=4 & S=5 & S=6 & S=7 & S=8 & S=9 & S=10 \\ \hline
        D=1 & W & G & G & G & G & G & G & G & G & G \\
        D=2 & W & W & G & G & G & G & G & G & G & G \\
        D=3 & W & W & W & W & G? & G? & G? & G & G & G \\
        D=4 & W & W & W & W & W? & W? & W? & G? & G? & G? \\
        D=5 & W & W & W & W & W? & W? & W? & W? & W? & G? \\
        D=6 & W & W & W & W & W? & W? & W? & W? & W? & W? \\
    \end{tabular}
    \caption{Winnen en gelijkspelen op een $S^D$-bord \citep{shadingnorman}}
    \label{tab:winnen en gelijkspel voor S en D}
\end{table}
```

	S=1	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10
D=1	W	G	G	G	G	G	G	G	G	G
D=2	W	W	G	G	G	G	G	G	G	G
D=3	W	W	W	W	G?	G?	G?	G	G	G
D=4	W	W	W	W	W?	W?	W?	G?	G?	G?
D=5	W	W	W	W	W?	W?	W?	W?	W?	G?
D=6	W	W	W	W	W?	W?	W?	W?	W?	W?

Tabel 6.3: Winnen en gelijkspelen op een S^D-bord (Do, 2005)

Figuur 10.1: De tabellencode in Overleaf voor tabel 6.3

Het is bij Overleaf belangrijk dat je alles afsluit waar je mee begonnen bent. Elke begin{center} moet ook eindigen met end{center}. Alles wat daartussen staat, wordt gecentreerd. Datzelfde geldt bijvoorbeeld met het teken \$. Alles wat in 'wiskunde' geschreven moet worden, moet beginnen met een \$ en eindigen met \$. Dit is vrij foutgevoelig. Dit geldt bijvoorbeeld ook voor alle ( ) en { }.

```
\[
\frac{(S+2)^2-S^2}{2}=\frac{S^2+4S+4-S^2}{2}=2S+2
\]
\[
\frac{(S+2)^3-S^3}{2}=\frac{(S^2+4S+4)(S+2)-S^3}{2}=\frac{S^3+6S^2+12S+8-S^3}{2}
=3S^2+6S+4
\]
```

$$\frac{(S+2)^2-S^2}{2}=\frac{S^2+4S+4-S^2}{2}=2S+2$$

$$\frac{(S+2)^3-S^3}{2}=\frac{(S^2+4S+4)(S+2)-S^3}{2}=\frac{S^3+6S^2+12S+8-S^3}{2}=3S^2+6S+4$$

Figuur 10.2: De codetaal voor de breuken op pagina 26

In figuur 10.2 is goed te zien dat er soms veel { } en ( ) nodig zijn voor relatief simpele constructies. Het eerste programma dat ik gebruikte voor mijn profielwerkstuk gaf een storing als de haakjes niet klopte en laadde niet in. Zo kon ik ook niet zien waar het fout ging. Het grote voordeel van Overleaf is dat het bestand nog wel wordt ingeladen. Soms stond er dan ergens een rood kruis in de broncode. Zo kon ik de fouten repareren.

Verder is het misschien interessant om te melden hoe het voorblad eruit ziet in codetaal. Hieronder staat een stukje van de voorbladcode. Om de twee stukjes met gegevens naast elkaar te krijgen, heb ik een 'minipage' gemaakt. Dit is vergelijkbaar met een tekstvak in Word. Verder moet je aangeven hoeveel afstand het ene onderdeeltje van de andere mag zitten. Je zit met verschillende lettertypen en veel haakjes.

```
    { \Huge \bfseries Hoger-dimensionaal boter-kaas-en-eieren} \\[0.5cm]
{\LARGE Een spelletje voor gevorderden}
\HRule \\[0.5cm]

\begin{minipage}{0.4\textwidth}
\begin{flushleft} \small
\emph{In samenwerking met:}\\
\textbf{Transtrend}\\
Harold de Boer\\
Michael van Enkhuizen\\
Meike Geertsma\\ [0.5cm]
\includegraphics[width=4.5cm]{Foto's/Profielwerkstuk-Transtrend logo.png} \\[0.3cm]
\end{flushleft}
\end{minipage}
```

Figuur 10.3: Een stukje van het voorblad in Overleaf

Dit was een behoorlijk opgave, maar gelukkig zijn er voorbeelden en standaardsjablonen beschikbaar in Overleaf. Ik heb meerdere voorpagina's bekeken. Ik heb hier en daar wat gerecycled voor mijn eigen voorblad. Het plaatje heb ik zelf in Geogebra gemaakt. Ik heb tijdens mijn profielwerkstuk wel vaker gebruik gemaakt van Geogebra, zoals bijvoorbeeld de figuren 5.1 en 6.6 op advies van Alphons de Lange.

Ik heb ook nog hulp gekregen van Niels van der Veen. Hij heeft door zijn studie aan de Technische Universiteit Delft ervaring met LaTeX. Niels heeft mij geholpen met de laatste dingen die ik nog wilde aanpassen qua opmaak. Zo wilde ik een andere hoofdstukstijl dan de gebruikelijke stijl. De bibliografie ontbrak nog in de inhoudsopgave en de inleiding en samenvatting wilde ik niet meer als genummerd hoofdstuk in de inhoudsopgave. Ik ben aan het werk gegaan met zijn tips en ik denk dat mijn profielwerkstuk er veel mooier door is geworden.

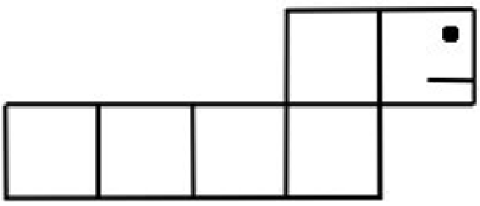
Mijn profielwerkstuk bestaat dus niet alleen uit wiskunde. Het gaat ook deels over het leren omgaan met Overleaf. Het is een soort vaardigheid die je onder de knie moet krijgen. Ik ben heel blij dat ik de keuze heb gemaakt om in dit programma mijn profielwerkstuk te maken! Het geeft mijn profielwerkstuk toch een soort extra dimensie...

11 Discussie

In de hoofdvraag besprak ik het eerste vermoeden al. Het vermoeden van Transtrend was $S(D) = D + 1$. Dit bleek niet waar te zijn voor $D \geq 3$. Ik heb in dit profielwerkstuk de precieze $S(D)$ niet kunnen uitdrukken in een formule met D. Het heeft veel overeenkomsten met de dichtheidsstelling van Hales en Jewett met $R = 2$, want in dit profielwerkstuk keek ik steeds naar twee spelers. Het aantal spelers hoeft natuurlijk niet gelijk te zijn aan twee. Je kunt boter-kaas-en-eieren ook met drie of meer spelers spelen. Dit kan in een vervolgonderzoek onderzocht worden. Als ik meer tijd had gehad, dan had ik D-dimensionaal S-op-een-rij boter-kaas-en-eieren met R spelers onderzocht. Tijdens mijn onderzoek van de toepassingen kwam ik alleen $HJ(1, S) = 1$, $HJ(2, 2) = 2$ en $HJ(2, 3) = 4$ tegen. Dit waren de enige bekende waarden voor de Hales-Jewettgetallen. Ik verwacht dat mijn onderzoek naar hogere R niet veel extra gegevens had opgeleverd, maar het is zeker het onderzoeken waard.

Naast de mogelijkheid om het aantal spelers uit te uitbreiden, zijn er nog wat andere aanpassingen op het spel mogelijk. Waarom zou je S-op-een-rij spelen in een $S \times S$-vierkant als je ook in een $(S+10) \times (S+10)$-vierkant boter-kaas-en-eieren kunt spelen? Er is geen wiskundige regel die zegt dat je je moet beperken tot een bord met de grootte van een winnend rijtje. Hier zou je ook de dimensies kunnen opschalen. Als je het nog algemener bekijkt, hoef je natuurlijk geen vierkant bord te hebben. Je kunt ook 3-op-een-rij spelen in een 3×5-bord. In principe hoef je niet eens op een bord te blijven, want je zou theoretisch gezien ook 2-dimensionaal 4-op-een-rij kunnen spelen op een oneindig groot ruitjespapier.

In mijn hele profielwerkstuk won de beginner als er een rij met X was gevuld. In een nog algemenere variant van boter-kaas-en-eieren beperken wij ons niet tot de vorm *rij*. De 'slang' Snaky is ook nog een mogelijke vorm. Zo ziet Snaky eruit:



Figuur 11.1: Snaky (Do, 2005)

Er zijn veel meer vormen te bedenken dan een lijn. Dit wordt dieren-boter-kaas-en-eieren genoemd al hoeven de figuren niet op een dier te lijken. Van veel vormen is al bekend of de beginner wint of gelijkspeelt. Snaky is een mysterie. Vermoedelijk is Snaky een winnaar, maar we weten het nog niet zeker. Hier had ik mij zeker nog in willen verdiepen als ik meer tijd had gehad. Zo ver ik kan vinden, blijven de onderzoeken bij platte dieren, maar ook hier kan volgens mij opgeschaald worden naar hoger dimensies. Dat is al helemaal onbekend gebied.

De wereld van boter-kaas-en-eieren is een wereld met veel complexe wiskunde. Mijn profielwerkstuk is slechts een topje van de ijsberg. Ik zie mijn profielwerkstuk als een uitgebreide introductie op deze ingewikkelde wiskunde. Ik leg in dit profielwerkstuk dingen uit die in veel wetenschappelijke artikelen in een paar regels worden samengevat of als 'gewoon logisch' worden bestempeld. Alle termen en symbolen maken het lastig. Ik hoop dat de lezer alles heeft kunnen begrijpen en net zo verwonderd is door deze algemene variant. Ik ben in ieder geval nog verliefder geworden op het prachtige vak dat wiskunde heet!

Bibliografie

AGconnect (2008). *Speltheorie krijgt grotere rol in andere wetenschappelijke disciplines.* **URL:** *https://www.agconnect.nl/artikel/speltheorie-krijgt-grotere-rol-in-andere-wetenschappelijke-disciplines*

Aycock, R. (2002). *How to Win at Tic-Tac-Toe.*

Bollobás, B. (2002). *Contemporary combinatorics*, Springer Science & Business Media.

Brandhof, Alex, v. d. (2018). *Priemwoestijnen, hoogtepunten uit de wiskunde van de 21e eeuw*, Prometheus, Amsterdam.

Darling, D. (sd). *Tesseract.* The Worlds of David Darling.
URL: *https://www.daviddarling.info/encyclopedia/T/tesseract.html*

Do, N. (2005). *How to Win at Tic-Tac-Toe*, The University of Melbourne, Department of Mathematics and Statistics.

Furstenberg, H. and Katznelson, Y. (1991). *A density version of the Hales-Jewett theorem*, Journal d'Analyse Mathématique.
DOI: 10.1007/BF03041066.

Golomb, S. W. and Hales, A. W. (2002). *More Games of No Chance, Hypercube tic-tac-toe*, MRSI. Cambridge Univ. Press.

Hales, A. W. and Jewett, R. I. (1963). *Classic Papers in Combinatorics, Regularity and positional games*, American Mathematical Society.
DOI: 10.1007/978-0-8176-4842-8.

Hofstede, H. (sd). *BOTER-KAAS-EIEREN en meer-op-een-rij.*
URL: *https://hhofstede.nl/spellen/boterkaaseieren.htm*

Infinite Series (2017). *Higher-Dimensional Tic-Tac-Toe.*
URL: *https://www.youtube.com/watch?v=FwJZa-helig*

Kau, A. (sd). *Tesseract.* Brilliant.
URL: *https://brilliant.org/wiki/tesseract/*

Meyer, A. R. (2015). *2.11.9 Hall's Theorem.* MIT OpenCourseWare. Massachusetts Institute of Technology, Mathematics for Computer Science.
URL: *https://www.youtube.com/watch?v=i5AWE-OoOsY*

Näslund, M. (2013). *The Hales-Jewett theorem and its application to further generalisations of m, n, k-games*, Uppsala University, Department of Mathematics.

Noort, Vincent, v. d. (2013). *Who needs the real world?* TEDxBreda.
URL: *https://www.youtube.com/watch?v=UnGxepC8j4Y*

Patashnik, O. (1980). *Qubic: 4× 4× 4 tic-tac-toe*, Mathematics Magazine.
DOI: 10.2307/2689613.

Pilgrim, R. A. (1995). *Tic-tac-toe: introducing expert systems to middle school students*, ACM New York. Murray State University, Dept. of Computer Science and Information Systems.
DOI: 10.1145/199688.199853.

Polymath, D. H. J. (2012). *A new proof of the density Hales-Jewett theorem*, Annals of Mathematics.
DOI: 10.4007/annals.2012.175.3.6.

Surma, G. (2018). *Tic Tac Toe - Creating Unbeatable AI, Introduction to Minimax Algorithm.* Towards data science.
URL: *https://towardsdatascience.com/tic-tac-toe-creating-unbeatable-ai-with-minimax-algorithm-8af9e52c1e7d*