

DRIEDEUREN- PROBLEEM 2.0

door
Ronald
Meester

Het driedeurenprobleem is, zo vermoed ik, bij de meeste mensen wel bekend, en ik zal die klassieker hier niet herhalen. Als je het niet kent, kun je het lezen in het artikel *Nee heb je, ja kun je nog krijgen* in *Pythagoras* 57-5/6. In deze bijdrage ga ik in op een verrassende variant van dit probleem.



Aafje en Boaz hebben een quiz gewonnen, en ze krijgen nu de kans om een auto te winnen. De quizmaster laat Aafje en Boaz drie gesloten deuren zien, genummerd 1, 2 en 3. De quizmaster vertelt Aafje en Boaz dat achter één van de deuren een auto staat, achter een andere deur de sleutels van de auto, en achter weer een andere deur een geit. De regels van het spel zijn nu als volgt. Allereerst gaat Boaz weg, en mag Aafje twee deuren openmaken, zonder dat Boaz het ziet. Aafje mag twee deuren tegelijk openmaken, maar ze mag het ook één voor één doen, en daarbij de keuze van de tweede deur laten afhangen van wat er achter de eerste deur stond. De deuren worden weer gesloten, Aafje verlaat het toneel, en Boaz wordt opgehaald. Boaz mag nu ook twee deuren openmaken,

net als Aafje, en volgens dezelfde regels. In het geval Aafje de deur met de auto heeft opengemaakt, en Boaz de deur met de sleutels, hebben ze de auto (met sleutels) gewonnen. Andersom is dus niet goed: als Boaz de auto en Aafje de sleutels heeft geopend gaan ze met lege handen naar huis.

Aafje en Boaz mogen elkaar natuurlijk niet vertellen over wat ze achter welke deur hebben gezien, maar de quizmaster geeft hun wel de gelegenheid om van tevoren gezamenlijk een strategie af te spreken. Welke strategie kunnen ze het beste hanteren om de kans op auto plus sleutels zo groot mogelijk te maken?

Laten we allereerst eens kijken wat er gebeurt als ze helemaal geen strategie afspreken, en de deuren dus lukraak openen. We beginnen met Aafje. Wat Aafje ook doet, de kans dat zij de auto treft is $2/3$, ook als ze de uitkomst van de eerste geopende deur zou gebruiken voor de keuze van de tweede deur. Immers, met kans $1/3$ kiest ze in één keer goed, maar mocht ze verkeerd kiezen dan geeft de prijs achter de eerst gekozen deur natuurlijk geen enkele informatie over welke van de twee overgebleven deuren de auto bevat. De kans om het daarna bij de keuze van de tweede deur dan goed te doen is $1/2$, en zo komen we uit op kans $1/3 + 2/3 \times 1/2 = 2/3$.

Evenzo is de kans op een specifieke combinatie, bijvoorbeeld sleutel en geit, voor Aafje gelijk aan $1/3$. Er zijn immers drie combinaties die allemaal dezelfde kans moeten hebben. Dit geldt allemaal ook voor Boaz: in het bijzonder is de kans dat Boaz de sleutels kiest ook gelijk aan $2/3$, en dat maakt de kans dat ze bij lukraak deuren openen met de prijs naar huis gaan gelijk aan $2/3 \times 2/3 = 4/9$. De vraag is dus of ze het beter kunnen doen dan deze $4/9$, en zo ja hoeveel beter.

Het feit dat Aafje de auto vindt met kans $2/3$ betekent automatisch dat de kans om met de prijs naar huis te gaan nooit groter kan worden dan $2/3$. Deze $2/3$ kans is dus een bovengrens: beter kan het zeker niet. Het aardige is nu dat er een strategie bestaat waarbij de kans om te winnen precies gelijk is aan $2/3$! Dat had je misschien niet verwacht, en ik ga nu uitleggen hoe dit werkt.

We gaan het probleem eerst iets anders beschrijven. Aafje en Boaz kiezen allebei twee deuren en er zijn dan drie mogelijkheden voor wat ze hebben gevonden, als we tenminste even niet op de volgorde letten. Die mogelijkheden zijn $\{A, S\}$, $\{A, G\}$ en $\{S, G\}$, waarbij A staat voor "auto", S voor "sleutels" en G voor "geit". We kunnen alle opties dan opschrijven in een drie-bij-drie tabel:

		Boaz		
		$\{A, S\}$	$\{A, G\}$	$\{S, G\}$
Aafje	$\{A, S\}$	😊		😊
	$\{A, G\}$	😊		😊
	$\{S, G\}$			

We hebben een lachebekje 😊 gezet bij die combinaties waarbij Aafje en Boaz met de auto naar huis gaan, check maar even dat dit inderdaad klopt.

Als Aafje en Boaz lukraak kiezen, dan heeft elke combinatie dezelfde kans $1/9$, en krijgen we de volgende kanstabel:

		Boaz		
		$\{A, S\}$	$\{A, G\}$	$\{S, G\}$
Aafje	$\{A, S\}$	😊 $1/9$	$1/9$	😊 $1/9$
	$\{A, G\}$	😊 $1/9$	$1/9$	😊 $1/9$
	$\{S, G\}$	$1/9$	$1/9$	$1/9$

We zien inderdaad bevestigd dat bij lukraak kiezen vier van de negen opties tot winst leiden, met een totale kans van $4/9$; dat wisten we natuurlijk al. We willen nu echter een strategie vinden die aan de hokjes met een 😊 een in totaal zo groot mogelijke kans toekent.

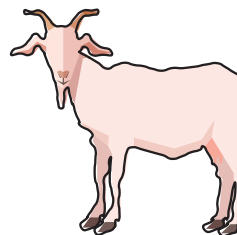
Een dergelijke kanstabel heet een *gezamenlijke kansverdeling* van de keuzes van Aafje en Boaz. De getallen in deze kansverdeling hangen af van de strategie die Aafje en Boaz kiezen. Als ze bijvoorbeeld afspreken dat Aafje altijd de deuren met nummers 1 en 2 opent, en Boaz die met nummers 1 en 3, dan ziet de gezamenlijke kansverdeling er als volgt uit, zoals je zelf na kunt gaan:

		Boaz		
		$\{A, S\}$	$\{A, G\}$	$\{S, G\}$
Aafje	$\{A, S\}$	😊 0	$1/6$	😊 $1/6$
	$\{A, G\}$	😊 $1/6$	0	😊 $1/6$
	$\{S, G\}$	$1/6$	$1/6$	0

De kans om nu te winnen is $3/6 = 1/2$, dus deze strategie is iets verstandiger dan lukraak gokken, waarbij de kans op winst immers $4/9$ was. Ik merk wel op dat wanneer je de kansen per rij of per kolom optelt, het antwoord altijd $1/3$ moet zijn, welke strategie je ook gebruikt. Immers de eerste rij, bijvoorbeeld, geeft alle uitkomsten waarbij Aafje de auto en de sleutels kiest, en die kans moet altijd $1/3$ zijn zoals we al hadden gezien, en het hetzelfde geldt voor de andere rijen en alle kolommen.

Als Aafje en Boaz afspreken dat ze allebei gewoon deuren 1 en 2 openen, dan krijgen we deze tabel, met een winstkans van slechts $1/3$:

		Boaz		
		$\{A, S\}$	$\{A, G\}$	$\{S, G\}$
Aafje	$\{A, S\}$	😊 $1/3$	0	😊 0
	$\{A, G\}$	😊 0	$1/3$	😊 0
	$\{S, G\}$	0	0	$1/3$



Ik ga nu een strategie beschrijven die de volgende kanstabel op zal leveren,

		Boaz		
		{A, S}	{A, G}	{S, G}
Aafje	{A, S}	☹️ 1/3	0	☺️ 0
	{A, G}	☺️ 0	0	☹️ 1/3
	{S, G}	0	1/3	0

en waarbij de kans om te winnen dus gelijk is aan 2/3! Hoe kan dat? Hier komt ie: Aafje en Boaz spreken af dat Aafje begint met openen van deur 1. Als daar de auto of de sleutels liggen, dan open zij deur 2; zo niet dan opent zij deur 3. Boaz maakt als eerste deur 2 open. Als daar de auto of de sleutels liggen, dan opent hij vervolgens deur 1; zo niet dan opent hij deur 3.

Waarom leidt deze strategie tot de gezamenlijke kansverdeling hierboven? Het makkelijkste is waarschijnlijk om gewoon de mogelijkheden even na te gaan:

deur 1	deur 2	deur 3	keuze Aafje	keuze Boaz
auto	sleutels	geit	{A, S}	{A, S} ☹️
auto	geit	sleutels	{A, G}	{S, G} ☹️
sleutels	auto	geit	{A, S}	{A, S} ☹️
sleutels	geit	auto	{S, G}	{A, G}
geit	auto	sleutels	{S, G}	{A, S}
geit	sleutels	auto	{A, G}	{S, G} ☹️

We zien inderdaad dat deze strategie de gegeven gezamenlijke kansverdeling oplevert, de lachebekjes in de tabel corresponderen met de lachebekjes van dezelfde kleur in de laatste kanstabel. Hiermee hebben we dus een optimale strategie gegeven voor Aafje en Boaz. Met deze buitengewoon slimme strategie is het dus zo dat als Aafje de auto kiest, Boaz altijd de sleutels vindt. Klinkt bizar, maar het kan dus echt.

Dat betekent niet dat er geen vragen meer overblijven. Bestaat er bijvoorbeeld nog een andere optimale strategie? Ik bedoel met een andere strategie echt een ander idee, en niet bijvoorbeeld een strategie waarbij de rollen van de deuren verwisseld worden maar waarbij verder alles hetzelfde gaat.

Welnu, laten we dat eens proberen te onderzoeken. Natuurlijk is er een andere kanstabel te vinden waarbij de kans op succes 2/3 blijft, bijvoorbeeld deze:

		Boaz		
		{A, S}	{A, G}	{S, G}
Aafje	{A, S}	☺️ 1/6	0	☹️ 1/6
	{A, G}	☹️ 1/6	0	☹️ 1/6
	{S, G}	0	1/3	0

maar de vraag is of er wel een strategie te bedenken is die deze tabel oplevert. Een bewijs dat er geen écht andere strategie bestaat is misschien helemaal nog niet zo makkelijk te geven, maar misschien word je door het volgende argument al wel overtuigd.

We zagen al dat de kans dat Aafje de deur met de auto opent gelijk is aan 2/3. Dat betekent dat we daarna helemaal niets meer mogen verliezen, en dat Boaz in die gevallen *altijd* de sleutel moet openen. Immers, we willen een kans van 2/3 op uiteindelijk succes, en de 1/3 die we mogen kwijtraken zijn we al kwijt aan een mogelijk verkeerde keuze van Aafje: de kans dat ze de auto niet opent.

Als Aafje de auto en de sleutels heeft geopend, dan moeten we dus veiligstellen dat Boaz *zeker* de sleutels opent. Aangezien Aafje en Boaz van tevoren natuurlijk niet weten welke keuze van Aafje in dat geval de auto en welke de sleutels gaf, kan dit alleen maar goed gaan als Boaz in dat geval dezelfde deuren als Aafje opent. Met andere woorden, dit moet van tevoren worden afgesproken: als Aafje de auto en de sleutels opent, dan kan dat alleen maar bij deur 1 en 2 zijn (of natuurlijk een andere keuze maar dat is niet echt een wezenlijk andere strategie). Het kan dus niet anders gaan dan bij deze strategie het geval is.

Misschien ben je hierdoor niet overtuigd, en wil je het verder gaan uitzoeken. Het is dan misschien allereerst interessant om te onderzoeken welke kanstabellen überhaupt te verkrijgen zijn door een van tevoren afgesproken strategie. Of misschien vind je wel een andere manier om naar dit probleem te kijken, want soms levert een ander gezichtspunt zomaar een vruchtbaardere manier van kijken op.