



EEUWIG PROBEREN

In september vond de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Deze finale beslist wie in de trainingsprogramma's komt en zo wie kans maakt om Nederland te vertegenwoordigen op een van de internationale Wiskunde Olympiade wedstrijden. Na een gezellige lunch bogen de 142 finalisten zich over vijf moeilijke opgaven, die in totaal 50 punten waard zijn. Om alle punten te krijgen moesten de finalisten niet alleen het goede antwoord vinden, maar ook hun antwoord bewijzen. Ik heb zelf aan deze finale meegedaan en laat hier zien hoe je opgave 2 kan oplossen en bewijzen.

door Lieke van Dam

DE OPGAVE

We noemen een verzameling van minstens twee verschillende positieve gehele getallen eeuwig als het grootste getal gelijk is aan 100. We gaan kijken naar het gemiddelde van alle getallen in een eeuwig verzameling, dat noemen we het gemiddelde van de verzameling. Bijvoorbeeld: het gemiddelde van de eeuwig verzameling $\{1, 2, 20, 100\}$ is $123/4$ en het gemiddelde van de eeuwig verzameling $\{74, 90, 100\}$ is 88. Bepaal alle gehele getallen die kunnen voorkomen als het gemiddelde van een eeuwig verzameling.

Nu is de vraag: hoe pakken we zo'n opgave aan? Er zijn veel manieren om aan een opgave te beginnen. Wat mij vaak helpt, is om eerst paar willekeurige getallen in te vullen en kijken wat er gebeurt; wellicht kunnen we dan al een patroon herkennen. In de opgave staat al zo'n voorbeeld: de eeuwig verzameling $\{74, 90, 100\}$ heeft een gemid-

delde van 88, want $\frac{74+90+100}{3} = 88$.

Laten we nu de verzameling $\{1, 5, 8, 34, 76, 100\}$ bekijken; deze heeft een gemiddelde van $\frac{1+5+8+34+76+100}{6} = \frac{371}{6}$.

Dit is niet geheel en dus is $\{1, 5, 8, 34, 76, 100\}$ geen eeuwig verzameling met een geheel gemiddelde. Een andere willekeurige verzameling is $\{8, 100\}$ waarbij het gemid-

delde $\frac{8+100}{2} = 54$ is. Dus $\{8, 100\}$ is wel een eeuwige verzameling met een geheel gemiddelde.

Je merkt nu al snel op dat we met een verzameling van twee getallen veel makkelijker kunnen rekenen dan een verzameling van meer getallen. Dus laten we eens kijken naar verzamelingen van twee getallen. Zo geeft de verzameling $\{2, 100\}$ een gemiddelde van 51, $\{3, 100\}$ geeft een gemiddelde van $51\frac{1}{2}$ en $\{4, 100\}$ een gemiddelde van 52. Ook zien we dat $\{6, 100\}$ een gemiddelde heeft van 53. Hiermee

kunnen we een patroon ontdekken: als je een verzameling hebt met twee getallen en je telt 2 bij een van de twee getallen op, dan gaat het gemiddelde met 1 omhoog. Dus $\{8, 100\}$ geeft een gemiddelde van $53 + 1 = 54$ en $\{10, 100\}$ geeft een gemiddelde van $54 + 1 = 55$. Dit kunnen we doen tot de eeuwige verzameling $\{98, 100\}$ die een gemiddelde van 99 geeft. We kunnen dit trucje niet nog een keer doen omdat geen getal meerdere keren mag voorkomen of groter mag zijn dan 100.

Met dit patroon zijn we erachter gekomen dat 51 tot en met 99 kunnen voorkomen als gemiddelde van een eeuwige verzameling.

Maar hiermee zijn we er nog niet, want dit waren alleen de verzamelingen met twee getallen. Als we naar een verzameling kijken van drie getallen, dan is de verzameling met de hoogste getallen de verzameling $\{98, 99, 100\}$, die een gemiddelde van 99 heeft. Het valt mij nu op dat het hoogste gemiddelde (99) van een verzameling van twee getallen hetzelfde is als het hoogste gemiddelde van een verzameling van drie getallen. Het gemiddelde wordt berekend met het getal 100 en één of meer getallen lager dan 100; dit betekent dat het gemiddelde nooit 100 of hoger kan zijn. We weten dus dat 99 sowieso het hoogste gehele gemiddelde is.

Nu we al redelijk wat getallen weten die kunnen voorkomen, moeten we gaan uitzoeken welke andere getallen er nog kunnen. We weten dat 51 tot en met 99 kunnen en dat 99 het maximum is; we moeten dus alleen nog nagaan welke getallen lager dan 51 gehele gemiddeldes kunnen zijn. We gaan de oplossing verdelen in twee delen; allereerst gaan we onderzoeken wat het laagste gehele gemiddelde is dat we kunnen maken, en daarna gaan we bewijzen dat alle gehele getallen tussen dit laagste getal en 51 ook te maken zijn.

OP ZOEK NAAR HET MINIMUM

We gaan kijken naar het kleinste gehele gemiddelde voor een eeuwige verzameling. We zagen al dat bij een verzameling van twee getallen het laagste gemiddelde 51 was. Dus laten we eens uitzoeken wat het laagste gemiddelde is van een verzameling van drie getallen. Om een zo laag mogelijk gemiddelde te krijgen moeten we zo laag mogelijke getallen in de verzameling hebben. De laagste getallen in een verzameling van drie getallen zijn: 1, 2 en 100; lager kan niet omdat elk getal groter dan 0 moet zijn en alle getallen verschillend moeten zijn (anders is het geen verzameling). Deze verzameling geeft een gemiddelde van $\frac{1+2+100}{3} = 34\frac{1}{3}$. Dus het laagste gemiddelde van een eeuwige verzameling van drie getallen is $34\frac{1}{3}$, waardoor een gemiddelde van 34 (of lager) bij een verzameling van drie getallen niet mogelijk is. Maar als we bij het getal 2 er 2 bij optellen krijgen we een gemiddelde van $\frac{1+(2+2)+100}{3} = \frac{105}{3} = 35$. Dit is wel geheel en dus is 35 het laagste gehele gemiddelde bij een verzameling van drie getallen.

Om een nog lager gemiddelde te krijgen moeten we gaan kijken naar verzamelingen van vier getallen. Probeer zelf eens een zo laag mogelijk gemiddelde te maken. Lukt het om 30 te maken? En 28? En 26? Na veel proberen heb je waarschijnlijk wel ontdekt dat een gemiddelde van 26 onmogelijk is en dat 27 het kleinste gehele gemiddelde is van een verzameling van vier getallen. Zo geeft bijvoorbeeld de verzameling

{1, 2, 5, 100} een gemiddelde van 27. Maar het gaat erg lang duren om op deze manier alle verzamelingen af te gaan. Laten we eens kijken of we dit sneller kunnen doen. Als eerste merken we op dat een gemiddelde kleiner wordt als je in een eeuwige verzameling één van de getallen (ongelijk aan 100) kleiner maakt. Ook is het zo dat als je een getal toevoegt aan een eeuwige verzameling en dat getal is kleiner dan het huidige gemiddelde, dan wordt het gemiddelde kleiner.

Om de eeuwige verzameling met het kleinste gemiddelde te vinden, kunnen we dus beginnen met 1, 100 en dan steeds zo klein mogelijke getallen toevoegen. Het kleinste gemiddelde is bereikt als het volgende getal dat we zouden toevoegen, groter is dan het gemiddelde. We zagen al dat een verzameling van vier getallen een minimaal gemiddelde geeft van $26\frac{1}{2}$ want de laagste verzameling van vier getallen is {1, 2, 3, 100}. Zo geeft een verzameling van bijvoorbeeld acht getallen een laagste gemiddelde van 16 bij de eeuwige verzameling {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 100}. Zo vinden we ook dat de verzameling met 1 t/m 13 en 100 als gemiddelde $\frac{1+2+\dots+13+100}{14} = \frac{191}{14} = 13\frac{9}{14}$ heeft. Als we nu het getal 14 eraan toevoegen, zien we dat het gemiddelde weer groter wordt. We weten dus dat het laagste gemiddelde $13\frac{9}{14}$ is. Nu moeten we nog kijken wat het laagste gehele gemiddelde is. Het kan niet 13 zijn, want $13\frac{9}{14} > 13$. Maar 14 is wel te verkrijgen met de eeuwige verzameling

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 18, 100},

dus het laagste gemiddelde is 14.

ALLES ERTUSSENIN

Nu we het minimum (14) en het maximum (99) hebben bepaald, moeten we nog bewijzen dat alle getallen daartussen ook bereikt kunnen worden. We kunnen eeuwige verzamelingen gaan bedenken voor een gemiddelde van 14 tot en met 99, maar dan zijn we eeuwig bezig. Het kan ook sneller. Neem de eeuwige verzameling hierboven met 14 elementen. Elke keer als je bij één van de getallen in deze eeuwige

verzameling 14 optelt, wordt het gemiddelde 1 hoger. Doe dit nu van rechts naar links, door eerst 14 bij 18 op te tellen (het gemiddelde wordt dan 15), vervolgens 14 bij 12 op te tellen (het gemiddelde wordt dan 16), dan 14 bij 11 op te tellen, et cetera. Uiteindelijk krijg je dan de eeuwige verzameling

{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 32, 100}

met gemiddelde 27, en ben je dus alle waarden van 14 t/m 27 tegengekomen als gemiddelde. Doordat we bij het hoogste getal na de 100 zijn begonnen, blijft het rijtje getallen bovendien steeds stijgend, zodat het steeds zeker uit 14 verschillende getallen bestaat en de getallen dus daadwerkelijk een (eeuwige) verzameling blijven vormen. We kunnen dit nog een keer doen door eerst 14 bij 32 op te tellen, vervolgens 14 bij 26 et cetera, en komen dan uit op een verzameling met gemiddelde 40. Doen we dit nog een keer, dan komen we uiteindelijk uit op de verzameling

{43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 100}

met gemiddelde 53. In het begin hadden we al laten zien dat alle gemiddelden 51 tot en met 99 bereikt kunnen worden door eeuwige verzamelingen van twee even getallen. Nu weten we dus dat 14 het minimum is, dat alle getallen van 14 tot en met 53 voldoen, dat alle getallen van 51 tot en met 99 voldoen en dat 99 het maximum is. Dus alle getallen van 14 tot en met 99 voldoen en kunnen dus gemiddelde zijn van een eeuwige verzameling. En daarmee is de opgave opgelost!

