



EEN WISKUNDIGE DOET DE AFWAS-11 VAATWASSER VERDER VULLEN

De familie Van der Torus is een heel normale, gemiddelde familie. Voor zover een familie van wiskundigen normaal kan zijn. Ze komen allerlei alledaagse problemen tegen. Kom je zelf uit een wiskundig gezin of ben je een (mogelijk toekomstige) wiskundige, dan kun je je ervaringen, vragen en ideeën delen met de familie Van der Torus via email naar fam.v.d.torus@pyth.eu.

door **Tom** en **Iris Verhoeff**

Phi had een rustige thuiswerkdag en was nog verdiept in een lastige analyse toen de kinderen thuiskwamen. Milli en Micro waren klaarblijkelijk onderweg in een behoorlijk luidruchtige discussie verwickeld geraakt. Met enige moeite maakte Phi uit hun woorden op dat het over een koe ging. "Maar bij ons in de klas was echt duidelijk gezegd dat een koe een punt is", houdt Micro stug vol. "Nou dat is dan mooi fout", reageert Milli, "want wij hebben geleerd dat een koe een bol is en dat is dus echt geen punt." Phi probeert ertussen te komen om te kunnen snappen wat er aan de hand is.

Na wat doorvragen blijkt dat Micro natuurkundeles heeft

gehad. Het ging over een koe op een karretje dat van een helling rijdt. Zo'n koe heeft een massa, en de docent had gezegd dat je die massa in één punt mag denken. Voor Micro was daarmee de koe gelijk aan een punt.

Bij Milli betrof het een biologiesles waarbij ze dieren van verschillende groottes vergeleken wat betreft hun warmtehuishouding. Daarbij spelen het volume (wat samenhangt met de massa, omdat de meeste dieren voornamelijk uit water bestaan) en de (huid)oppervlakte een rol. Een dier dat twee keer zo groot is heeft een volume dat acht keer zo groot is, maar diens oppervlakte is slechts vier keer zo groot. Grote dieren raken hun warmte dus moeilijker kwijt. Een makkelijke symmetrische wiskundige vorm met volume en oppervlakte is de bol. De biologiedocent had daarom gezegd dat je een koe in zo'n

geval wel kan voorstellen als een bol. Voor Milli was daarmee de koe gelijk aan een bol.

Gelukkig kon Phi nu duidelijk maken dat een punt en een bol slechts modellen zijn van een koe. Bij een model probeer je alles weg te laten dat niet relevant is voor het probleem dat je wilt oplossen. Daarom kunnen dezelfde dingen, zoals die koe, voor verschillende problemen op verschillende manieren gemodelleerd worden. Pi, die wat later thuiskomt, beweert zelfs dat voor

sommige problemen een koe een torus is. Micro en Milli geloven daar eerst niets van. Maar Pi legt uit dat haar slokdarm, vier magen en darmen als één lang gat door de koe heen lopen, en daarmee dus ook "aan de buitenkant" zitten. Micro ziet al helemaal voor zich hoe een touw van voor naar achter door de koe gaat en dan rond geknoopt wordt. Waarop Phi er aan toevoegt dat je een bol niet net zo met een touw kan vangen, omdat als je het touw aantrekt de bol er gewoon tussenuit glipt.



AANPAK VAATWASSER VULLEN

Terug naar het vullen van de vaatwasser. Pi wil elk stuk vaat maar één keer een plaatsje geven. Dat wil zeggen, reeds geplaatste vaat wordt niet meer verplaatst. En bovendien wil Pi dat zodanig doen dat op ieder moment de vaat redelijk goed verdeeld is over de hele vaatwasser. Wat het lastiger maakt is dat je bij het plaatsen van een stuk vaat niet weet welke dingen er later mogelijk nog bij komen.

Een vaatwasser is een driedimensionaal apparaat en elk stuk vaat is een driedimensionaal voorwerp dat een grillige vorm kan hebben. Dit maakt nadenken over geschikte methodes om vaat te plaatsen moeilijk. Daarom probeert Pi het probleem eerst te vereenvoudigen.

Vat elk stuk vaat op als een punt, en de vaatwasser als een eenheidskubus. Hoe kun je achtereenvolgens punten in een kubus plaatsen zodanig dat de geplaatste punten altijd redelijk goed verdeeld zijn? Dat lijkt ook nog knap moeilijk. Daarom gaat Pi het nog eenvoudiger maken: plaats punten achtereenvolgens in een eenheidsvierkant. Dan is het nog maar een tweedimensionaal probleem. Ook dit blijkt nog lastig.

Op aandringen van Phi, maar duidelijk met enige tegenzin, besluit Pi om de stap te maken naar één dimensie: plaats punten achtereenvolgens in het eenheidsinterval, zodanig dat ze altijd redelijk goed zijn verdeeld. Als je van tevoren weet hoeveel punten je moet plaatsen, dan is het makkelijk. Je kunt die punten namelijk precies gelijkmatig verdelen. Alleen rijst wel de vraag hoe het zit met de randen. Daar kun je misschien ook beter vandaan blijven, omdat het water dan niet zo makkelijk aan alle kanten komt.

De ultieme vereenvoudiging is om de vaatwasser op te vatten als een cirkel, door het eenheidsinterval rond te sluiten. Dan zijn er geen randen meer (daar moeten we later maar rekening mee zien te houden). Nu luidt de vraag dus hoe je het beste achtereenvolgens punten op een cirkel kan zetten zodanig dat ze altijd redelijk goed verdeeld zijn. Het eerste punt plaatsen is triviaal, want vanwege de symmetrie van de cirkel staat het overall "hetzelfde". Maar het tweede punt vergt al een afweging. Zet je het precies tegenover het eerste punt dan is dat optimaal als er niets meer bijkomt. Maar zodra een derde punt geplaatst moet worden krijg je daar spijt van en had het tweede punt beter ergens anders kunnen staan.

Probeer zelf te bedenken hoe je kunt berekenen hoe efficiënt een plaatsing van punten is. En bedenk vervolgens methodes om punten één voor één op een cirkel te plaatsen, zodanig dat na elke plaatsing de verdeling efficiënt blijft. Familie Van der Torus is benieuwd naar jullie oplossingen (je mag er ook een computerprogramma voor schrijven).

