WATERGEVECHT OP WISKUNDEKAMP

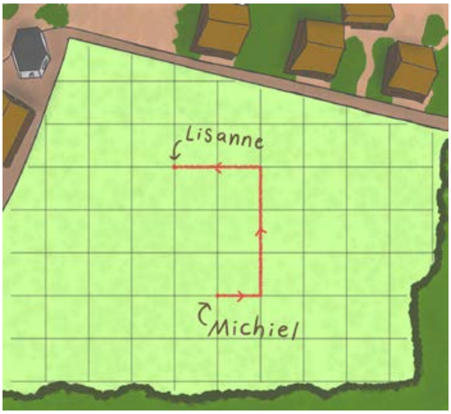
Elke zomer organiseert stichting Vierkant Voor Wiskunde zomerkampen. Zoals de naam doet vermoeden zijn dat wiskundige zomerkampen. Laat je echter niet misleiden, het is niet gewoon een zomerschool waarbij je de hele dag alleen op je gat zit. Op de kampen van Vierkant beleef je wiskunde op talloze manieren, met spelletjes, strategieën, maar uiteraard ook door direct over mooie wiskunde te leren die je niet op de middelbare school ziet. In dit artikel zullen we een voorbeeld zien van dergelijke 'kamp'-wiskunde. Er wordt een unieke methode beschouwd om nulpunten van polynomen te vinden, namelijk via een speciaal soort watergevecht. Als laatste is er nog wat extra informatie over het kamp zelf.

door **Niels Kolenbrander** en **Carl Koppeschaar**

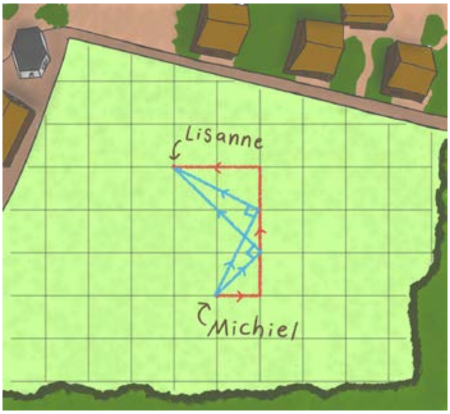
Tijdens kamp B in 2021 hebben de deelnemers bij het programmaonderdeel *kleine problemen* nagedacht over een raar soort watergevecht en tegelijkertijd hebben ze geleerd hoe je van hogeregraadspolynomen toch af en toe nulpunten kan vinden. Deze kleine problemen zijn samengesteld door een aantal begeleiders van Vierkant.

Zoals de deelnemers van toen kijken we naar een watergevecht waarbij Lisanne wegrent van Michiel. Ze doet dat op een vreemde manier, namelijk via het pad dat hoort bij de polynoom $x^2 + 3x + 2$. Nu hoor ik je al denken: 'wat is nou weer een pad bij een polynoom?'. Wel deze is als volgt gedefinieerd:

1. Kijk naar de grootste macht van x (bij $x^2 + 3x + 2$ is dat x^2) en zet zoveel stappen vooruit als er voor die macht staan, in het voorbeeld is dat 1. We beginnen altijd naar rechts.
2. Draai nu 90° tegen de klok in en kijk naar de naar de macht van x die 1 kleiner is. Zet weer zoveel stappen vooruit. Bij een negatief getal zetten we stappen achteruit in plaats van vooruit. Let goed op: draai bij iedere macht van x, ook als je 0 stappen zet. Dit draaien doe je onafhankelijk van het pad, je begint dus naar rechts bij 3 uur, dan draai je tegen de klok in naar 12 uur, dan naar 9 uur etc.
3. Herhaal stap 2 totdat je alle machten van x bent afgegaan (inclusief de nulde).



Figuur 1 Pad van de polynoom $x^2 + 3x + 2$



Figuur 2 Waterstralen

Wat is dan het pad bij $x^2 + 3x + 2$? Nou deze luidt: 1 naar rechts, 3 omhoog, 2 naar links, zie ook figuur 1.

OPGAVE 1

Probeer zelf eens de paden te tekenen bij de volgende polynomen:

a. $x^2 + x + 5$

b. $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$

Lisanne rent natuurlijk niet voor niets weg, Michiel heeft een waterpistool en is er op uit om Lisanne een nat pak te bezorgen. Dit is echter niet zomaar een waterpistool: als de waterstraal uit het waterpistool een stuk pad tegenkomt dat door Lisanne bewandeld is (of het verlengde daarvan), ketst het af onder een rechte hoek (de 'goede' kant op). Michiel probeert Lisanne met zo'n afketsend schot te raken vanuit het punt waar Lisanne is gestart. Dat kan hij op twee manieren doen, zie de blauwe stralen in figuur 2.

Nu vraag je je misschien af wat dit allemaal te maken heeft met nulpunten van polynomen, maar we komen nu heel dicht in de buurt van het vinden van de nulpunten van $x^2 + 3x + 2$. We moeten alleen nog de hellingsgetallen van de eerste lijnstukken van de waterstralen vinden. Een hellingsgetal van een lijnstuk is de hoeveelheid waarmee deze omhoog gaat gedeeld door de hoeveelheid waarmee deze naar rechts gaat (en als het naar onder of naar links gaat zijn die hoeveelheden negatief). Bij een van de waterstralen gaan we bij het eerste lijnstuk 1 omhoog en 1 naar rechts, dus daar krijgen we hellingsgetal 1/1 = 1. Bij de andere straal gaat het eerste lijnstuk 2 omhoog en 1 naar rechts, dus die heeft hellingsgetal 2/1 = 2. Als we nu de negatieve waarde van de gevonden getallen invullen in $x^2 + 3x + 2$, dan krijgen we

$$(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = 0 \text{ en } (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = 0.$$

Oftewel, door waterstralen te vinden die Lisanne raken als zij het pad van een gegeven polynoom volgt, kunnen we de nulpunten van dat polynoom vinden door de negatieve waarden van de hellingsgetallen van de eerste lijnstukken van die waterstralen te berekenen. Dit werkt voor alle polynomen met uitsluitend reële nulpunten. We moeten het waterpistool alleen wel nog iets geavanceerder maken: de straal ketst nu niet meer alleen af als het pad geraakt wordt, maar ook als deze het verlengde van het pad raakt. Dit werkt voor $x^2 + x - 2$ zoals in figuur 3.

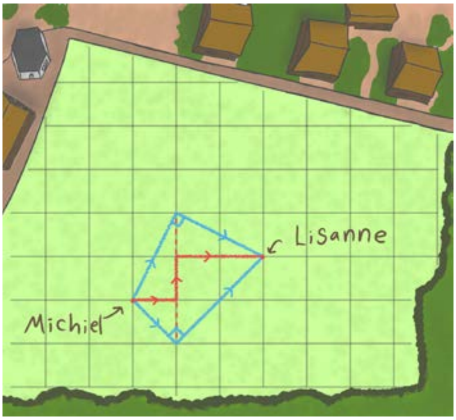
OPGAVE 2

Teken de paden die Lisanne aflegt en de waterstralen die Michiel nodig heeft om Lisanne te raken en bepaal daarna de nulpunten bij de volgende twee polynomen:

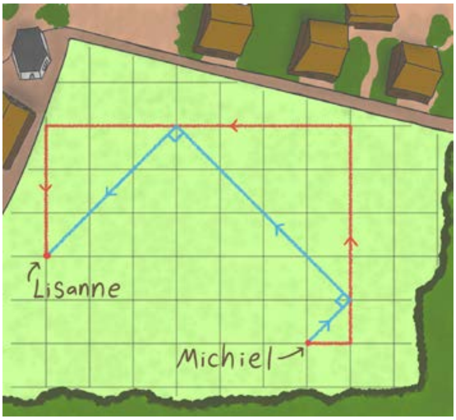
a. $x^2 - 2x - 3$

b. $x^2 + 4x + 4$

>



Figuur 3
Meer geavanceerd waterpistool



Figuur 4
Pad en waterstraal bij $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

Zoals je in de bovenstaande opgave wellicht hebt gemerkt zijn er af en toe nulpunten die heel lastig te vinden zijn. Daar is gelukkig wel een oplossing voor. Om dit te zien kijken we naar de volgende derdegraads polynoom:

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3.$$

Normaal is het erg lastig om de nulpunten van zo'n polynoom te vinden, maar met een watergevecht gaat dat ons wel weer lukken. Het pad van Lisanne kunnen we weer direct van de coëfficiënten aflezen. Voor een waterstraal moet je even zoeken, maar een voorbeeld is te zien in figuur 4.
We zien dat het hellingsgetal van het eerste lijnstuk 1 is, dus −1 is een nulpunt. We kunnen natuurlijk ook direct zoeken of we andere waterstralen kunnen vinden, maar zoals gezegd kan dat vrij moeilijk zijn. De waterstralen hebben een eigenschap die ons in staat stelt om nog makkelijker een volgend nulpunt te vinden. De waterstraal is namelijk zelf een nieuw pad voor Lisanne.

OPGAVE 3

a. Draai figuur 4 nu 45° met de klok mee zodat de waterstraal naar rechts staat. Bij welk polynoom hoort dit pad? Merk op: je eerste stap heeft altijd lengte 1, dus pas de rest daar ook op aan.

b. Vind bij het nieuwe pad weer een waterstraal. (Hint: deze ketst 1 keer af.) Lees weer het hellingsgetal van het eerste lijnstuk af en ga na dat de negatieve waarde hiervan weer een nulpunt is van $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$.

c. Draai het plaatje weer 45° met de klok mee en bepaal weer de polynoom van het pad van de gedraaide waterstraal. (Hint: deze ketst 0 keer af.) Vind weer een nulpunt zoals hierboven.

Als het goed is heb je nu twee keer het nulpunt −1 en één keer het nulpunt −3 gevonden. Dit zijn ook de enige nulpunten van dit polynoom want we kunnen schrijven

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x + 1)(x + 1)(x + 3).$$

Nu kan je je nog afvragen of het uitmaakt in welke volgorde je de waterstralen bepaalt en dan steeds de nieuwe paden krijgt door te draaien. Het antwoord is nee, de volgorde maakt niet uit, en dit was de laatste opgave van de kleine problemen die dag. Een antwoord is echter een klein deel van de lol, een goede redenering vinden is nog veel leuker, geef dat nog eens een poging.

Dit is een typisch voorbeeld hoe wiskunde op een unieke manier voorbij komt op zo'n kamp.

VIERKANT VOOR WISKUNDE

Vierkant voor Wiskunde organiseert al 30 jaar zomerkampen met wiskundige activiteiten. Sinds 1994 zijn er elke zomer wiskundekampen voor leerlingen vanaf groep 6 tot en met het eindexamenjaar. Er zijn aparte kampen voor de verschillende leeftijdsgroepen.

Je hoeft geen wiskundeheld te zijn om mee te gaan op zomerkamp, maar wel een liefhebber van het oplossen van puzzels en problemen. Tijdens de kampen verken je een aantal onderwerpen met een wiskundig thema zoals veelvlakken, getallen, grafen, magische vierkanten, geheimschrift of verzamelingen. Je gaat zo'n onderwerp dan helemaal uitspitten. Je kunt ook aan de slag gaan met berekeningen, bouwwerken, tekeningen of kunstwerken gebaseerd op het onderwerp. Hierbij kun je denken aan Escher-tekeningen of fractals.

Je werkt meestal in groepjes van ongeveer zes deelnemers en twee begeleiders. Daarbij kun je op je eigen tempo werken en zelf kiezen hoe diep je in een onderwerp duikt. Dat maakt het kamp voor iedereen leuk en uitdagend. Zelfs als je denkt al veel van wiskunde te weten, zul je merken dat er nog een heleboel te ontdekken valt. Naast de wiskunde is er natuurlijk ook tijd voor andere activiteiten zoals sport, spelletjes, zwemmen en creatieve activiteiten. Klinkt dit goed en wil je je aanmelden? Kijk dan op www.vierkantvoorwiskunde.nl/kampen

De kampen worden onder andere begeleid door wiskundestudenten en docenten van universiteiten en hogescholen, maar ook door andere wiskunde-enthousiastelingen. Deze begeleiders zijn allemaal vrijwilligers die het leuk vinden om de kampen te begeleiden en daar hun enthousiasme voor wiskunde over te brengen. Veel begeleiders en deelnemers komen daarom ook het volgende jaar weer terug bij ons kamp.

Ieder jaar kiezen de begeleiders een aantal onderwerpen voor op kamp. Daar worden vervolgens werkboekjes van gemaakt waar deelnemers op kamp mee aan de slag gaan. Sommige van deze werkboekjes worden na het kamp verder uitgewerkt en uitgegeven als Wisschrift of Doeboek. De Wisschriften zijn voor kinderen vanaf groep zeven en de Doeboeken voor leerlingen van het voortgezet onderwijs.

Heb je dit jaar meegedaan aan de W4Kangoeroewedstrijd en ben je nog niet eerder mee geweest op kamp? Dan kun je zelfs in aanmerking komen voor een van de acht gratis kampplaatsen ter waarde van €335 die ter beschikking worden gesteld door W4Kangoeroe en Vierkant voor Wiskunde.