MERKWAARDIG PRODUCT ALS SHORTCUT BIJ DE TWEEDE RONDE

Op vrijdag 10 maart vond op universiteiten door heel Nederland de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats; zo ook in Utrecht, waar ik zelf studeer. Als oud-deelnemer heb ik gedurende de dag geholpen met de organisatie, en veel leerlingen enthousiast aan de opgaven zien werken.

door **Lammert Westerdijk**

Nadat alle deelnemers klaar waren met de wedstrijd, begon voor mij pas het echte werk. Als oud-deelnemer was ik namelijk niet alleen gevraagd om te surveilleren, maar ook om een van de opgaven na te kijken: opgave C2, een opgave waarbij je naast het antwoord ook een bewijs moest geven dat je antwoord klopt. Tijdens het nakijken van deze opgave heb ik veel verschillende (gedeeltelijke) oplossingen van deze opgave gezien. Met slimme ideeën kon de hoeveelheid rekenwerk beperkt blijven, maar ook zonder die slimme ideeën was de opgave met de juiste insteek en wat doorzettingskracht zeker op te lossen. Probeer dat vooral eerst zelf voor je verder leest!

DE OPGAVE

Twee positieve gehele getallen met verschil 20 worden met elkaar vermenigvuldigd; hier wordt vervolgens nog 23 bij opgeteld.

A Wat is de kleinst mogelijke uitkomst die op 23 eindigt? *Geef deze uitkomst (en de twee bijbehorende getallen met verschil 20) en bewijs verder dat er geen kleinere uitkomst mogelijk is die op 23 eindigt.*

B Is het mogelijk dat de uitkomst het kwadraat van een geheel getal is? *Geef een voorbeeld (en laat zien dat dat voldoet) of bewijs dat dit niet kan.*

KLEINE GEVALLEN PROBEREN

Het makkelijkste wat je bij onderdeel (A) kunt doen, is gewoon wat getalletjes proberen. Neem bijvoorbeeld 1 en 21 als de twee getallen met verschil 20; dat geeft als uitkomst $1 \cdot 21 + 23 = 44$. Dat eindigt niet op 23, dus proberen we 2 en 22. De uitkomst is $2 \cdot 22 + 23 = 67$, wat ook niet eindigt op 23, dus gaan we door. Ook $3 \cdot 23 + 23 = 92$ eindigt niet op 23, dus proberen we 4 en 24. Hoewel $4 \cdot 24 + 23 = 119$ nog steeds niet op 23 eindigt, kunnen we al wel een patroon opmerken: de uitkomsten zijn om de beurt even en oneven. Omdat we een oneven uitkomst zoeken (een getal dat eindigt op 23 is oneven), kunnen we in stapjes van twee verder gaan, waarbij we de paren waarvan de uitkomst even is, over kunnen slaan. Het volgende paar dat we proberen is dus 6 en 26, wat als uitkomst 179 geeft. Na 8 en 28 met uitkomst 247, geeft het paar 10 en 30 eindelijk een uitkomst die eindigt op 23, namelijk 323. Omdat de uitkomsten steeds maar groter worden, is 323 ook daadwerkelijk de kleinste uitkomst die op 23 eindigt. Het is bij deze aanpak wel erg belangrijk dat je inderdaad alle kleinere paren dan 10 en 30 ook hebt gecheckt! Je kunt dat het makkelijkst doen door de uitkomst voor alle paren te berekenen, maar het kan dus ook door maar de helft van de paren te checken en op te merken dat de andere helft van de paren een even uitkomst geven.

Deze redelijk intuïtieve aanpak heet in het algemeen ook wel het doen van *kleine gevalletjes*. Het idee is dat je bij elke opgave met een variabele (zoals het paar getallen in deze opgave), een tabelletje kunt maken waarin je bekijkt wat er gebeurt als die variabele wat kleine waardes aanneemt. Zoals bij deze opgave kom je dan soms toevallig het antwoord tegen, maar ook als je niet direct uit je tabel het antwoord kunt halen, kun je er vaak wel nuttige patronen in ontdekken. Zo ontdekten we bij deze opgave het patroon dat de uitkomsten om en om even en oneven zijn.

EEN ANDERE AANPAK

Naast de oplossing met kleine gevalletjes, zijn er zeker ook andere aanpakken die naar het juiste antwoord leiden. Een andere interessante uitwerking die ik bij het nakijken van deze opgave ook veel voorbij heb zien komen, is het kijken naar het laatste cijfer van de uitkomst. We zoeken namelijk een uitkomst die eindigt op 23, dus het laatste cijfer moet wel een 3 zijn. Als we het paar getallen schrijven als n en $n + 20$, is de uitkomst $n \cdot (n + 20) + 23$. Omdat deze uitkomst moet eindigen op een 3, moet $n \cdot (n + 20)$ wel eindigen op een 0.

Omdat het paar getallen verschil 20 heeft, eindigen de getallen op hetzelfde cijfer. Het is daarom handig om alleen naar het laatste cijfer te kijken, in plaats van naar de laatste twee cijfers. Omdat n en $n + 20$ op hetzelfde cijfer eindigen, geldt dat nog steeds als we beide met n vermenigvuldigen. Dus eindigen ook n^2 en $n \cdot (n + 20)$ op hetzelfde cijfer. Als $n \cdot (n + 20)$ op een 0 moet eindigen, eindigt n^2 dus ook op een 0. Nu zijn we klaar, want het kleinste positieve gehele getal n waarvan het kwadraat n^2 op een 0 eindigt, is $n = 10$. We zagen al dat dit de kleinste uitkomst 323 geeft.

Merk wel op dat we alleen naar het laatste cijfer van $n \cdot (n + 20)$ hebben gekeken; het zou dus eventueel nog zo geweest kunnen zijn dat $n \cdot (n + 20)$ wel op een 0 eindigt, maar niet op de cijfers 00. Gelukkig gaat dat in dit geval goed; sterker nog, iedere uitkomst die op een 3 eindigt, eindigt op de cijfers 23. Probeer dit zelf maar eens aan te tonen!

MET MERKWAARDIGE PRODUCTEN OP ZOEK NAAR EEN KWADRAAT

Door naar onderdeel (B). Het eerste wat ik zelf en ook veel deelnemers bij onderdeel (B) dachten, was dat dit niet mogelijk is; de kleine gevalletjes bij (A) waren geen kwadraten, en in het algemeen zijn grotere getallen minder vaak kwadraten dan kleine getallen. Het lijkt dus ook minder waarschijnlijk dat een grotere uitkomst toevallig wel een kwadraat is. De korte constatering dat $29 \cdot 49 + 23 = 1444 = 38^2$ bewijst echter het tegendeel; het paar 29 en 49 geeft als uitkomst 38^2. Maar hoe kom je daar zomaar op? Je zou natuurlijk weer kleine gevalletjes kunnen proberen tot en met het paar 29 en 49, maar dat zijn wel erg veel berekeningen. Het zou dus mooi zijn als er een efficiëntere aanpak bestaat.

Weer schrijven we de vraag in formulevorm: we zoeken een n zodat $n \cdot (n + 20) + 23$ een kwadraat is. Oftewel: we zoeken n en k zodat $n \cdot (n + 20) + 23 = k^2$. Als we dit uitschrijven krijgen we $n^2 + 20n + 23 = k^2$. Dit is helaas niet echt een mooie vergelijking waar we direct een antwoord uit kunnen afleiden, al was het maar omdat er nu twee variabelen een rol spelen terwijl we maar één vergelijking hebben. We kunnen heus wel voor elke gehele n een k vinden (door de wortel van de linkerkant te nemen), maar de grote vraag is of er ook een positieve gehele n is waarbij deze k geheel is. De kunst is nu om juist dit gegeven, dat n en k positieve gehele getallen zijn, te gebruiken en de vergelijking te herschrijven tot wat mooiers, door gebruik te maken van merkwaardige producten.

Als we n^2 naar rechts halen, zien we het verschil van twee kwadraten; $20n + 23 = k^2 - n^2 = (k + n)(k - n)$. Dit is echter niet heel nuttig, want we hebben zowel links als rechts een n staan. Gelukkig kunnen we nog een merkwaardig product gebruiken om de n links weg te halen. Als we in plaats van n en $n + 20$ het paar schrijven als $m - 10$ en $m + 10$ door $m = n + 10$ te nemen, wordt hun product óók een merkwaardig product:

$$(m - 10) \cdot (m + 10) + 23 = k^2,$$

dus

$$m^2 - 100 + 23 = k^2.$$

Nu zien we dat we geen term $20n$ meer hebben, en als we nu m^2 en k^2 naar dezelfde kant halen, vinden we dat

$$77 = m^2 - k^2 = (m + k)(m - k).$$

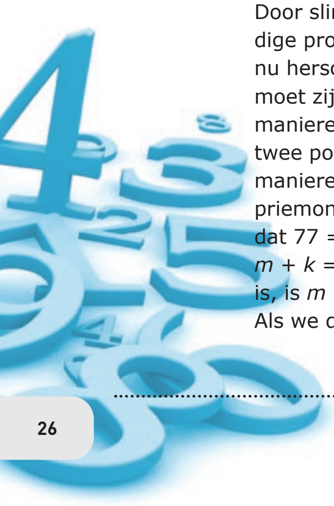
Door slim gebruik te maken van merkwaardige producten hebben we de vergelijking nu herschreven tot een product wat gelijk moet zijn aan 77. Er zijn echter niet zoveel manieren om 77 te schrijven als product van twee positieve gehele getallen! Op welke manieren dit kan, kun je zien door naar de priemontbinding van 77 te kijken; we zien dat $77 = 7 \cdot 11$. Een mogelijkheid is dus dat $m + k = 11$ en $m - k = 7$ (want als k positief is, is $m + k$ altijd de grotere van de twee). Als we dit oplossen, vinden we dat $m = 9$ en $k = 2$, een oplossing! Helaas is deze oplossing geen oplossing van het oorspronkelijke probleem, want het paar zou dan -1 en 19 zijn. Hoewel $-1 \cdot 19 + 23 = 4$ zeker een kwadraat is, voldoet het niet aan de opgave, omdat het paar moet bestaan uit twee *positieve* gehele getallen. Je zou nu misschien kunnen denken dat er dus geen oplossing is, omdat $77 = 7 \cdot 11$ en dat gaf geen goede oplossing. Er is echter nog een andere manier om 77 als het product van twee gehele getallen te schrijven, namelijk $1 \cdot 77$. Dan krijgen we dus $m + k = 77$ en $m - k = 1$. Als we dit oplossen, vinden we $m = 39$ en $k = 38$. Dit geeft het paar 29 en 49 en $29 \cdot 49 + 23 = 38^2$, precies de oplossing die we aan het begin zagen.

EEN LEUKE BIJVANGST

Een leuke bijvangst van deze slimmere aanpak, is dat 38^2 ook de enige uitkomst is die een kwadraat is! We hebben namelijk alle mogelijke manieren om 77 te schrijven als het product van twee positieve gehele getallen gehad, en zagen daaruit dat $29 \cdot 49 + 23 = 38^2$ de enige oplossing is die voldoet. Zoiets kun je met alleen kleine gevalletjes niet bewijzen, want het zou zomaar kunnen zijn dat er een erg groot paar is dat opeens weer een kwadraat geeft. We hebben nu echt bewezen dat zo'n tweede paar niet kan bestaan, wat de manier met de merkwaardige producten niet alleen efficiënter maakt dan puur kleine gevalletjes proberen, maar ook nog eens sterker; we hebben meer bewezen dan nodig was.

NOG TWEE ANDERE AANPAKKEN

We hebben hierboven het probleem van onderdeel (B) gereduceerd tot de vraag of er positieve gehele k en m bestaan zodat $m^2 - k^2 = 77$, waarbij m trouwens wel groter dan 10 moet zijn. Dit is ook op te lossen door te kijken naar de regelmaat in de rij kwadraten 0, 1, 4, 9, 16, 25, ...; daar zit achtereenvolgens 1, 3, 5, 7, 9, ... tussen. Dan zullen er ook wel twee opeenvolgende kwadraten zijn waar 77 tussen zit. Als we $m = k + 1$ schrijven, komt de vergelijking neer op $(k + 1)^2 - k^2 = 77$. Oftewel: $2k + 1 = 77$, met als oplossing $k = 38$, en dus $m = k + 1 = 39$, waarmee we dezelfde oplossing als hierboven vinden.



Of terug naar het oorspronkelijke probleem: $n^2 + 20n + 23 = k^2$. We kennen wel een kwadraat dat een beetje op het linkerlid lijkt, namelijk $(n + 10)^2$, dat uitgeschreven gelijk is aan $n^2 + 20n + 100$. Maar dat is 77 te groot. Laten we dus een stapje terug gaan en $k = n + 9$ proberen. Dan is het kwadraat gelijk aan $n^2 + 18n + 81$, wat we misschien wel gelijk kunnen krijgen aan het linkerlid. Daarvoor moet $n^2 + 20n + 23 = n^2 + 18n + 81$ gelden; dat geeft $2n = 58$, dus $n = 29$ (en $k = n + 9 = 38$), waarmee we ook weer op het reeds bekende antwoord uitkomen. (Om te laten zien dat dit de enige oplossing is, zouden we k ook nog moeten schrijven als $n + 8$, $n + 7$, $n + 6$ en $n + 5$, en inzien dat dit geen gehele oplossing n heeft; voor $k = n + 4$ en kleiner is het duidelijk dat de rechterkant te klein is.)

HET BELOFTEPROGRAMMA

De 120 leerlingen met een hoge score bij de tweede ronde gaan door naar de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, die in september zal plaatsvinden aan de Technische Universiteit Eindhoven. De winnaars van de finale plaatsen zich op hun beurt dan voor een uitgebreid trainingsprogramma ter voorbereiding op de verschillende internationale wedstrijden. Voor de leerlingen die bij de finale de top van Nederland net niet halen, maar wel veelbelovende resultaten tonen, is er daarnaast het belofteprogramma. De deelnemers leren hier een handvol nieuwe technieken die handig zijn bij het oplossen van een opgave, door wekelijks te oefenen met een set inleveropgaven. Ook zijn er twee trainingsdagen, waar de leerlingen extra uitleg en nog gerichtere feedback krijgen van de trainers. Naast vrijwilliger bij de tweede ronde en de finale, ben ik ook al vijf jaar een van de trainers van het belofteprogramma.

Het belofteprogramma bestaat in grote lijnen uit vier verschillende onderwerpen: getaltheorie, meetkunde, algebra en kleine gevalletjes. De kracht van kleine gevalletjes zagen we al in het bewijs van onderdeel (A), maar ook voor de andere onderwerpen bestaan er veel handige technieken. Vaak zijn olympiadeopgaven ook goed zonder deze extra technieken op te lossen, maar het oefenen met de technieken kan ervoor zorgen dat je de oplossing sneller ziet, waardoor je weer meer tijd hebt om over de andere opgaven na te denken. Zoals we bij deze opgave namelijk al zagen, zijn er vaak meerdere ideeën die naar een oplossing leiden, en je hoeft maar één van die ideeën te vinden voor een bewijs.

Bij de opgave in dit artikel hebben we naast kleine gevalletjes ook een aantal slimme ideeën toegepast. Zo keken we naar het laatste cijfer van de uitkomst, en of de uitkomst even of oneven was. Bij het belofteprogramma komt een uitgebreidere vorm van deze techniek aan bod bij het onderwerp getaltheorie: het zogenaamde *modulorekenen*. Het idee van modulorekenen is dat je in plaats van naar getallen te kijken, naar de rest van die getallen bij deling door een bepaalde *modulus m* gaat kijken. Dat noemen we dan *modulo* m *rekenen*. Kijken naar of een getal even of oneven is, komt dan neer op modulo 2 rekenen. Modulo 2 geldt bijvoorbeeld $1 + 1 = 0$, wat niets anders zegt dan dat een oneven getal plus een oneven getal een even getal oplevert. En kijken naar het laatste cijfer van een getal komt dan juist neer op modulo 10 rekenen. Maar bijvoorbeeld ook modulo 3, 5 of 7 rekenen kan soms erg handig zijn. Het is dus altijd een beetje puzzelen welke modulus een goede keuze is, wat ook iets is waar je uitgebreid mee kan oefenen.

Om de vergelijking van onderdeel (B) op te lossen, hebben we merkwaardige producten gebruikt. Ook deze techniek komt in het belofteprogramma uitgebreid aan bod bij het onderdeel algebra, wat vooral gaat over het oplossen van vergelijkingen. Uiteindelijk was het schrijven van 77 als het product van de twee gehele getallen $m + k$ en $m - k$ de slimme stap waarmee we de opgave konden oplossen. Over het algemeen is dit een van de beste strategieën om een vergelijking met gehele getallen op te lossen; ook hier wordt in het belofteprogramma dus veel mee geoefend.

Maar ook zonder al deze strategieën kun je vaak een heel eind komen en veel plezier beleven aan de olympiadeopgaven. **Enthousiast geworden over de olympiade? Doe dan op je eigen middelbare school mee aan de eerste ronde in januari!** <