

Robert en zijn avontuur op weg naar de getallenhemel

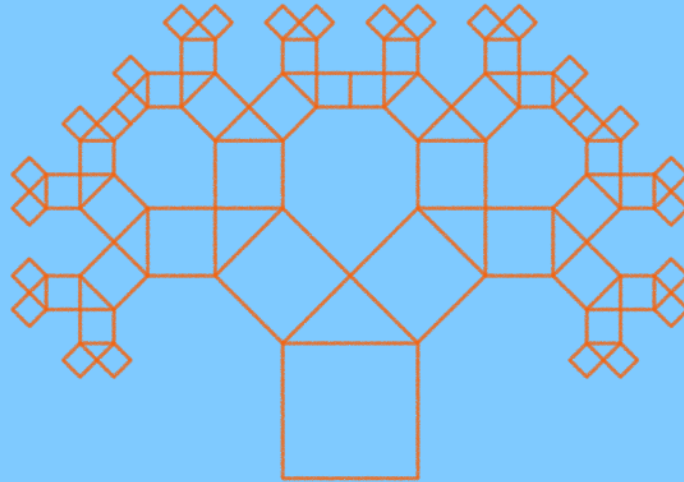
Het verslag

Een profielwerkstuk over een vervolg voor het boek De Telduivel van Hans Magnus Enzensberger

Rosa Hester Kroonstuiver atheneum zes

Met profielwerkstukbegeleider Gertjan Klijn en profiel vak wiskunde

Bertrand Russel College



Voorwoord:

In dit voorwoord wil ik graag van de gelegenheid gebruik maken om stil te staan bij de rol die Gertjan Klijn heeft gehad in de ontwikkeling van mijn interesse in wiskunde. Meneer Klijn is mijn huidige wiskunde d docent en profielwerkstukbegeleider. Hij heeft mij vanaf het begin van mijn schoolcarrière op het Bertrand weten te inspireren voor het vak wiskunde. De passie die ik nu voel voor wiskunde is grotendeels door meneer Klijn aangewakkerd. Ik heb zelfs voorgenomen om wiskunde te gaan studeren. Maar ik word geen wiskunde docent hoor!

Ik denk dat ik meneer Klijn, volgens het Wetboek van Strafrecht, waarschijnlijk gestalkt heb. Hij heeft altijd de tijd voor mij genomen met ontzettend veel geduld. Ik ben hem dan ook ontzettend dankbaar voor zijn hulp en geduld en ga de momenten in de pauzes, waarin ik met hem kon praten over wiskunde, zeker missen.

¹ Omslagfoto gebaseerd op de omslagfoto van *Robert en zijn avontuur op weg naar de getallenhemel: Het verhaal* (Kroonstuiwer,2022) p. 1

Inleiding:

Een onderwerp voor mijn profielwerkstuk kiezen ging bij mij niet vanzelf. Ik heb hier in het begin van het schooljaar veel over nagedacht. Na een paar weken vertelde mijn begeleider mij over een wiskundeboek *De telduivel*, en zei: “kijk maar of je twee hoofdstukjes bij kan schrijven”.

Dit is precies wat ik heb gedaan, ik heb twee hoofdstukken in het verlengde van dit boek geschreven. Ik ben heel eerlijk als ik zeg dat ik het geweldig vond om dit profielwerkstuk te schrijven. Creativiteit samen met wiskunde verbinden vond ik een heerlijke uitdaging.

De telduivel is speciaal geschreven voor kinderen, om te laten zien hoe leuk wiskunde kan zijn. Er worden moeilijke wiskundige begrippen behandeld en op een goede en kindvriendelijke manier uitgelegd. Dit is dan ook de reden dat het boek zo populair is en veel wordt gebruikt als aanvulling op het lesmateriaal (Steinz,1998).

Het boek gaat over Robert, bij wie het dromen over gigantische vissen en eindeloze glijbanen vervangen worden door avonturen met de telduivel. Waarbij hij met behulp van deze telduivel de wereld van de wiskunde leert kennen.

In mijn bijgeschreven hoofdstukken gaan de avonturen van Robert verder, maar dit keer komen er verschillende wiskundigen op bezoek. Ik introduceer hierbij ook een vrouwelijk figuur in het verhaal, om te laten zien dat vrouwen van toegevoegde waarde kunnen zijn in de wereld van wiskunde.

Nogmaals, ik vond het geweldig om dit profielwerkstuk te maken en ik hoop dat u als lezer er evenveel kan genieten als ik heb gedaan tijdens het schrijven.

Inhoudsopgave

Voorwoord:	2
Inleiding:	3
Doel van het profielwerkstuk:	6
Deelonderwerpen:	6
Deelonderwerp 1:	7
Specificaties van het boek:	7
Flaptekst:	7
Over de auteur:	8
Inhoud van het boek:	8
Deelonderwerp 2:	9
De eerste nacht:	9
De tweede nacht:	10
De derde nacht:	10
De vierde nacht:	11
De vijfde nacht:	11
De zesde nacht:	14
De zevende nacht:	15
De achtste nacht:	17
De negende nacht:	20
De tiende nacht:	21
De elfde nacht:	23
De twaalfde nacht:	23
Alles op een rijtje:	25
Deelonderwerp 3:	27
Een nieuw onderwerp introduceren:	27
De stelling van Pythagoras:	27
Het bewijs van de stelling van Pythagoras:	29
Verwerken en analyseren van het eerste bijgeschreven hoofdstuk:	31
Deelonderwerp 4:	32
Een nieuw onderwerp introduceren:	32
De laatste stelling van Fermat:	32
Bewijs voor $n = 4$:	34
Volledige bewijs voor de laatste stelling van Fermat:	39
Verwerken en analyseren van het tweede bijgeschreven hoofdstuk:	40

Discussie:	42
Literatuurlijst:	43
Logboek:	44

Doel van het profielwerkstuk:

Het doel van mijn profielwerkstuk is om een vervolg ter grootte van twee hoofdstukken te schrijven gebaseerd op het boek *De telduivel* van Hans Magnus Enzensberger².

Deelonderwerpen:

Deelonderwerp 1: Algemene informatie over het boek *De Telduivel*;

Deelonderwerp 2: Een analyse van het boek met de wiskundige onderwerpen uitgewerkt per hoofdstuk;

Deelonderwerp 3: Het eerste wiskundig onderwerp waarover valt bij te schrijven;

Deelonderwerp 4: Het tweede wiskundig onderwerp waarover valt bij te schrijven.

² Het eindproduct heb ik apart gepubliceerd: *Robert en zijn avontuur op weg naar de getallenhemel: Het verhaal* (Kroonstuiver, 2022).

Deelonderwerp 1:

Algemene informatie over het boek *De Telduivel* (Enzensberger, 1997).

Specificaties van het boek:

- Titel: De Telduivel;
- Ondertitel: Een hoofdkussen voor iedereen die bang voor wiskunde is;
- Oorspronkelijke titel: Der Zablenteufel;
- Auteur: Hans Magnus Enzensberger;
- Illustraties: Rotraut Susanne Berner;
- Vertaling: Piet Meeuse;
- Uitgever: De Bezige Bij;
- Eerste druk: februari 1998;
- Aantal bladzijdes: 263.



Figuur 1 *De telduivel*

Flaptekst:

In de flaptekst van het boek *De telduivel* (Enzensberger, 1997) staat het volgende over de inhoud:

Wiskunde? Hou op zeg! Voor veel mensen is wiskunde een warboel van getallen, sommen en onbegrijpelijke berekeningen. Ook Robert, de jongen in de blauwe pyjama, moet er niks van hebben. Tot hij bezoek krijgt van een telduivel en twaalf nachten lang met getallen aan het gooien is. Dan blijkt dat wiskunde een spannend en grappig spel is en dat Robert – en ook de lezers – geen enkele moeite kost. Wiskunde is niet moeilijk. Zodra het telduiveltje met zijn toverstok zwaait, verdwijnt de angst voor getallen als sneeuw voor de zon.

Over de auteur:

Hans Magnus Enzensberger is in 1929 in Kaufbeuren, Duitsland geboren. Enzensberger heeft letterkunde en filosofie geleerd en is later gepromoveerd op “een dissertatie over de poëtica van Clemens Brentano” (De Bezige Bij, z.d.). Hij woont momenteel in Munich (Deutsche National Bibliothek, z.d.).

Het is een man met vele beroepen (Deutsche National Bibliothek, z.d.), maar staat vooral bekend om zijn literatuur, zoals bijvoorbeeld *Politik und Verbrechen* en *Politische Brosamen* (De Bezige Bij, z.d.). Enzensberger heeft voor zijn boek *De telduivel* ook kinderboeken geschreven, maar nog niet eerder één over wiskunde.

Volgens een artikel van het NRC (1998), is de inspiratie van het boek gekomen door de combinatie van zijn liefde voor wiskunde en het vertellen van verhalen aan zijn dochter. Hij zegt: “Ik wilde haar op een zo onderhoudend mogelijke manier behoeden voor de angst voor getallen die de meeste kinderen treft zodra ze op de middelbare school komen.” De angst voor getallen/wiskunde wil hij daarom doormiddel van zijn boek wegnemen. Dit is ook de rede dat hij een aantal wiskundige begrippen en namen in het boek heeft aangepast, zo gebruikt hij bijvoorbeeld in plaats van het begrip machtsverheffen, “huppen”.

Inhoud van het boek:

De Telduivel is een uitlegboek speciaal geschreven voor kinderen, om wiskunde wat minder intimiderend over te laten komen. Zo worden er moeilijke wiskundige onderwerpen op een kindvriendelijke manier besproken in het boek. De onderwerpen zijn basisbegrippen die veel leerlingen op het middelbaar tegenkomen in de wiskundeles. Voorbeelden van de onderwerpen zijn, verschillende soorten getallenreeksen, combinatoriek en machtsvergelijkingen.

Enzensberger legt deze wiskundige onderwerpen op een hele begrijpelijke manier uit. Dit doet hij ook met name door gestructureerde voorbeelden, maar ook door de termen hier en daaraan te passen. Zoals ik al eerder het voorbeeld “huppen” heb laten zien is er ook een mooi voorbeeld binnen het onderwerp combinatoriek, waar hij faculteit, de naam “wamm” geeft. Dit is met name een onderwerp binnen de wiskunde dat als vrij lastig wordt ervaren. Maar door de manier waarop Enzensberger het weet over te brengen is dit zeker een stuk beter te begrijpen. In het volgende hoofdstuk ga ik verder met het analyseren van de inhoud.



Figuur 2 Hans Magnus Enzensberger. Overgenomen van De Bezige Bij, (Van Houts, z.d.) <https://www.debezigebij.nl/auteur/hans-magnus-enzensberger/>

Deelonderwerp 2:

Een analyse van het boek met de wiskundige onderwerpen uitgewerkt per hoofdstuk.

In dit deelonderwerp refereer ik naar het werk van Hans Magnus Enzensberger in zijn boek *De telduivel* (1997).

De eerste nacht:

In de eerste nacht maken we kennis met de hoofdpersoon Robert. Robert heeft last van nachtmerries waarin hij wordt geterroriseerd door reusachtige, onsmakelijke vissen en eindeloze glijbanen. Totdat hij kennis maakt met de telduivel. Vanaf dit moment komt de telduivel Robert voor twaalf nachten bezoeken en stoppen de nachtmerries.

De telduivel is een wiskunde duivel en komt Robert het een en het ander bijleren over wiskunde. Robert vindt wiskunde maar een eng vak. Om te laten zien dat dit helemaal niet zo eng is begint de telduivel met tellen. Op deze manier laat hij zien dat er oneindig veel getallen zijn. Dan gaat hij verder, want als er oneindig veel grote getallen zijn, zijn er ook oneindig veel kleine getallen. Dit legt hij uit met behulp van een kauwgompje dat hij steeds kleiner scheurt. Dit wordt doormiddel van plaatjes laten zien door eerst één te delen door één, dan één te delen door één plus één en zo voort.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 1 \\ \\ 1 \\ \hline 1 + 1 \\ \\ 1 \\ \hline 1 + 1 + 1 \\ \\ 1 \\ \hline 1 + 1 + 1 + \dots \end{array}$$

Zo kun je onder de deelstreep ook doorgaan tot in het oneindige, waardoor je op een oneindig klein getal uit komt.

Omdat we tot nu toe alleen maar het getal 1 (één) voorbij hebben zien komen, besluit de telduivel te vertellen hoe je de andere cijfers uit het vermenigvuldigen van enen kunt verkrijgen. Dit doet hij door een reeks van meerdere product sommen te laten zien. Hij begint zijn reeks met: $1 \times 1 = 1$ dan gaat hij over naar $11 \times 11 = 121$ hierbij is de twee verschenen. Als we zo doorgaan komen we uit op een getal dat de getallen twee tot en met negen bevat: 12345678987654321. Robert is de telduivel aan het einde van de eerste nacht te slim af, door te laten zien dat deze reeks niet oneindig op deze manier door gaat. Hierdoor wordt de telduivel erg boos, zwelt hij op tot een grote rode ballon en knalt hij uit elkaar van de woede. Hierbij is er een einde gekomen aan de eerste nacht.

De tweede nacht:

In plaats van in de bek van een grote vis, roetsjt Robert, in het begin van dit hoofdstuk, op een fluweelzachte paddenstoel in een vallei waar de telduivel op hem wacht. In deze nacht verteld de telduivel over de romeinse cijfers. Wanneer hij laat zien wat het romeinse getal voor het geboorte jaar van Robert is: MCMLXXXVI, vindt Robert dit maar omslachtig. Met het voorbeeld van de romeinse cijfers en aan de hand van negatieve getallen, laat de telduivel zien wat het belang is van het getal nul (0).

Doormiddel van het vinden van de nul begint de telduivel Robert te vertellen over machtsverheffen. De telduivel heeft hier zelf een naam voor bedacht, namelijk "huppen". Dus wanneer je bijvoorbeeld 5^1 neemt, noemt de telduivel dit in plaats van vijf tot de macht één, vijf één keer laten huppen. Hetzelfde geldt voor 5^2 , dit wordt, vijf twee keer huppen, en zo voort.

Op deze manier vinden de twee een betere manier om het geboortjaar van Robert op te schrijven. Van de romeinse cijfers MCMLXXXVI naar $6 \times 1 + 8 \times 10 + 9 \times 100 + 1 \times 1000 = 1986$. Robert zegt tegen de telduivel dat hij dit ook zonder hem ook wel kan. De telduivel wordt woedend en blaast weer op. Zo komen we aan het einde van de tweede nacht.

De derde nacht:

Robert vindt het steeds leuker dat de telduivel langs komt om hem wiskunde bij te leren. Deze nacht beginnen de twee met delen. Na het delen van een aantal getallen, denkt Robert dat je ook kan delen door nul, maar de telduivel grijpt snel in en laat hem weten dat dit niet kan. Na de discussie gaat Robert verder met delen alleen komt hij erachter dat er ook getallen zijn die je niet kunt delen zonder een rest te krijgen. Dit leidt tot het vertellen over de priemgetallen, die de telduivel primagetallen noemt.

Zo gaan de twee samen op zoek naar alle primagetallen tussen de getallen twee en tweeënvijftig, ook wel bekend als de priemgetallentest of de zeef van Eratosthest. Door ze allemaal in de lucht op te schrijven kunnen ze de getallen die er niet bij horen één voor één wegstrepen, zie figuur 3.

	2	3		5		7		
11		13				17		19
		23						29
31						37		
41		43				47		

Figuur 3, gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 59

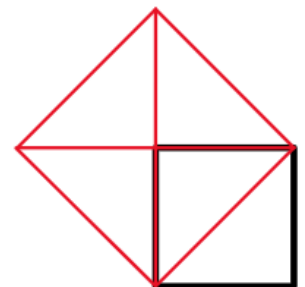
Robert vraagt aan de telduivel waarom de getallen nul en één er niet bij staan. Waarop de telduivel nog één keer uitlegt dat nul en één geen getallen zoals andere getallen zijn, deze getallen zijn “noch prima, noch niet prima”.

Uiteindelijk zien we dat er onder de vijftig precies vijftien priemgetallen zijn. Net zoals de oneindig veel grote getallen, zijn er ook oneindig veel prima getallen. De telduivel verklapt nog één geheim voordat hij weer vertrekt uit de droom van Robert. Dit geheim is dat wanneer je elk willekeurig getal, groter dan één, verdubbeld, hier altijd een priemgetal tussen zit. Neem bijvoorbeeld vijf, als ik deze verdubbel krijg ik tien en het priemgetal dat hier dan tussen zit is zeven.

De vierde nacht:

In de vierde nacht beginnen de twee met delen, maar dit keer werken ze met breuken. Zo komt Robert erachter dat $\frac{1}{3}$ gelijk is aan 0,333... en wanneer je dit met drie vermenigvuldigd, je uitkomt op $3 \times 0,333 \dots = 0,999 \dots$ wat niet gelijk is aan één zoals je zou denken. Echter omdat 0,999... doorgaat in het oneindig, kunnen we dit benaderen tot één. Robert vindt dit maar raar, maar is het uiteindelijk wel met de telduivel eens dat dit tot één benaderd kan worden. Na de discussie kijken ze maar even naar wat andere breuken.

Na wat experimenteren met kwadrateren en worteltrekken, ook wel huppen en radijs trekken genoemd, komen de twee uit bij $\sqrt{2}$ (de wortel van twee). Wanneer Robert dit uitrekent op zijn rekenmachine komt hij erachter dat de wortel van twee uitkomt op een warboel van getallen, namelijk: $\sqrt{2} = 1.41423 \dots$. Wij herkennen dit getal als een irrationeel getal, maar de telduivel heeft hier natuurlijk weer iets op verzonnen en noemt dit een “onverstandig getal”.



Figuur 4 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 81

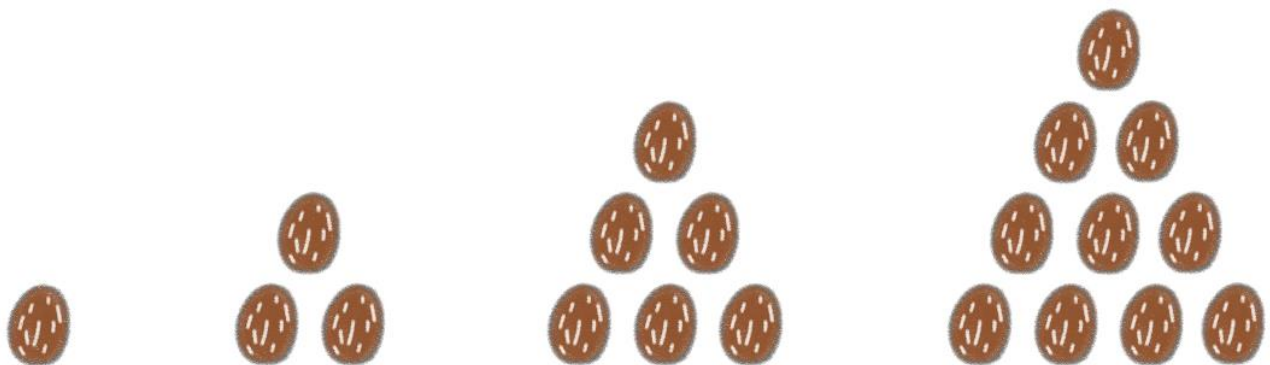
Dan is nog de vraag hoe we op dit getal zijn gekomen. De telduivel legt dit uit doormiddel van een voorbeeld zoals in figuur 4. Hij gebruikt een vierkant met zijdes één en een schuine zijde van wortel twee, waarvan de schuine zijde gebruikt wordt om een nieuw vierkant te tekenen met dus zijdes wortel twee. Dit nieuwe vierkant is twee keer groter dan het originele vierkant. Met dit voorbeeld wordt er onbewust ook een begin gemaakt met de stelling van Pythagoras.

Na al deze nieuwe informatie vond Robert het wel weer mooi geweest en gaat dan weer lekker verder slapen. De telduivel sluipt zachtjes op zijn tenen de droom van Robert uit. Zo komt er een einde aan de vierde nacht.

De vijfde nacht:

Deze nacht begon met de telduivel zittend in een palmboom en vroeg Robert naar boven te klimmen. Op het moment dat de twee beide boven in de boom zitten, zegt de telduivel tegen Robert dat hij een kokosnoot op de grond moet gooien. Wanneer hij dit heeft gedaan moet hij er nog drie op de grond gooien en dan moet hij er zes op de grond gooien. Wat Robert nu ziet is dat de kokosnoten driehoeken op de grond vormen, dit zijn de driehoeksgetallen. De telduivel noemt dit driehoekige getallen.

Na een tijdje klimmen de twee uit de boom en gaat de telduivel verder met het vertellen over de driehoekige getallen. Nu krijgen we te zien hoe ze in elkaar zitten én hoe we er gebruik van kunnen maken. Zoals bijvoorbeeld: als je van het n -de driehoek, een driehoek hoger wilt, dan moet je er $n+1$ bij het aantal getallen dat hoort bij de n -de driehoek optellen om tot de volgende driehoek in het rijtje te komen. Ik geef een getallenvoorbeeld: bij driehoek vijf hoort het getal vijftien, dus $n=5$ met het aantal getallen is 15. Om een driehoek hoger te komen, dus driehoek zes, tel je zes bij vijftien op. Dus, $15+6=21$ wat maakt dat bij driehoek zes een getal van éénentwintig hoort. De reeks die de twee op deze manier maken is dan als volgt, 1 3 6 10 15 21 28 etc. zie het voorbeeld in figuur 5.



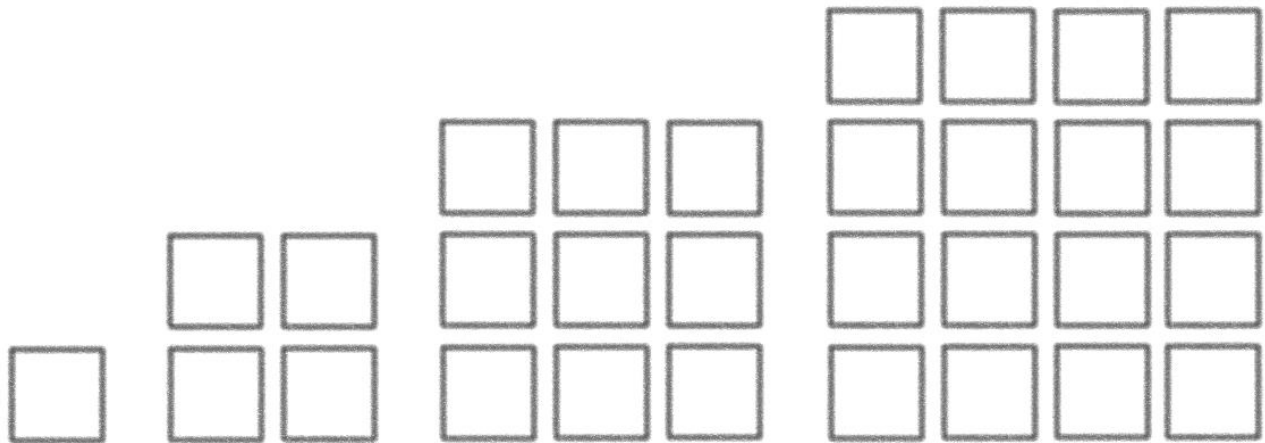
Figuur 5 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p.93

Dan weet de telduivel nog een handig rekentrucje uit te leggen die je met de driehoeksgetallen toe kan passen. Wanneer je bijvoorbeeld de som van de getallen één tot en met veertien wilt weten, kun je dit op twee makkelijke manieren doen. De eerste manier is om het veertiende getal in de reeks van de driehoeksgetallen te vinden, dit is 105 om precies te zijn. Volgens de tweede manier kun je ook de getallen één tot en met zeven naast elkaar zetten met daaronder in de tegengestelde richting de getallen acht tot en met veertien. De getallen die boven elkaar staan tel je bij elkaar op en je zult zien, alle getallen zijn hetzelfde, namelijk 15. Wanneer je de uitkomsten bij elkaar op telt, dan kom je uit op 105, zie figuur 6.

1	2	3	4	5	6	7
14	13	12	11	10	9	8
15	15	15	15	15	15	15

Figuur 6 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 101

Van de driehoeksgetallen stapt de telduivel over naar de kwadraten, ook wel de vierkantsgetallen. De telduivel legt Robert uit dat dit precies hetzelfde werkt als met de driehoeksgetallen, alleen dan met vierkanten. Robert heeft snel door dat je kan tellen hoeveel blokjes er aan een zijkant zitten en dit getal twee keer kunt huppen om bij het vierkantsgetal uit te komen. De reeks die de twee dan vinden is: 1 4 9 16 25 etc. zie het voorbeeld in figuur 7.



Figuur 7 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 102

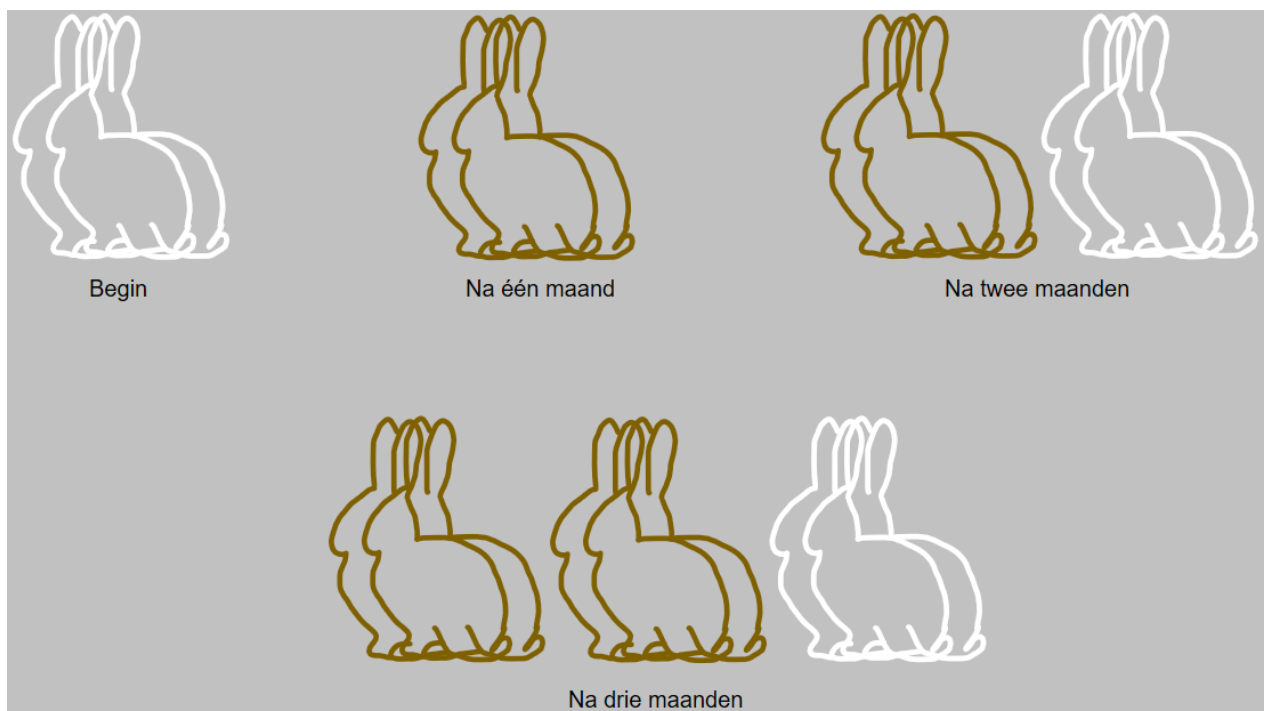
Hierna wil Robert graag zwemmen in het zwembad gevuld met de driehoeks-en vierkantsgetallen en komt er een einde aan de vijfde nacht.

De zesde nacht:

De zesde nacht is een belangrijke nacht. In deze nacht verteld de telduivel Robert over de Fibonaccireeks, die hij de Bonatsji-reeks noemt. Dit legt hij uit door de reeks te beginnen met het getal één, waarop het volgende getal in de reeks ook één is. Hieruit tellen we de eerste twee getallen bij elkaar op om het derde getal te krijgen, $1+1=2$. Waaruit volgt dat je vanaf nu de laatste twee getallen van de reeks bij elkaar op telt om op het volgende getal te komen. Zo krijg je de reeks 1 1 2 3 5 8 13 21 34 en zo voort.

Ook laat de telduivel zien wat je allemaal met de reeks kunt doen. Zoals bijvoorbeeld, wanneer je de eerste vijf Fibonaccigetallen bij elkaar optelt en daar boven één bij optelt, kom je op het zevende getal van de reeks: $1+1+2+3+5=12$, $12+1=13$ en dertien is het zevende Fibonaccigetal. Na allerlei trucjes te laten zien verteld de telduivel dat de Fibonaccireeks niet alleen voorkomt in de wiskunde, maar ook in de natuur. Dit legt hij uit met het hazen voorbeeld.

De telduivel legt het hazenvoorbeeld als volgt uit. Het begint met één paar witte hazen, één mannetje en één vrouwtje. De hazen zijn nu nog jong, dit is te zien aan de witte vacht. Na een maand zijn de hazen volwassen en krijgen ze een bruine vacht. Wanneer de hazen volwassen zijn geworden willen ze kinderen, ze krijgen na een maand precies één mannetje en één vrouwtje. De vacht van de jongen zijn dan wit. Weer een maand later krijgen het volwassen hazenpaar nog een paar jongen en worden de eerste generatie jongen volwassen. Na nog een maand krijgen het eerste volwassen hazenpaar een paar jongen én de eerste generatie volwassen hazenpaar een paar jongen, terwijl het andere hazenpaar in deze maand uitgroeien tot volwassenen. Zo gaat het door in het oneindig. Zie figuur 8, voor een voorbeeld.



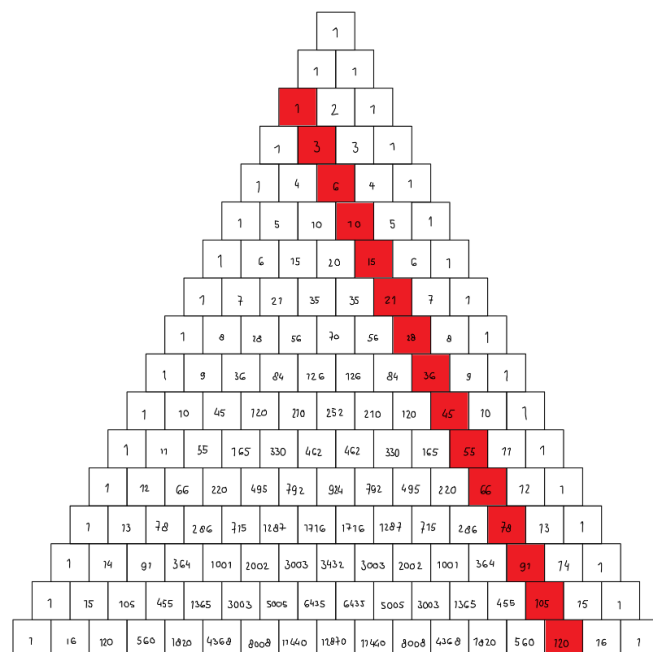
Figuur 8 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 114 en 115

De zevende nacht:

Robert is inmiddels zo veel bezig met wiskunde door het bezoek van de telduivel, dat zijn moeder ongerust raakt. Gelukkig maakt Robert dat helemaal niet uit en kijkt hij uit naar het komende bezoek van de telduivel. Deze nacht beginnen de twee met het bouwen van een piramide uit blokken. De onderste rij is zeventien blokjes lang en ze bouwen net zo lang door totdat ze bovenaan nog maar één blokje hebben staan.

Dit gaat natuurlijk over niets anders dan de driehoek van Pascal, die de telduivel de getallendriehoek noemt. Na het magisch invullen van de driehoek kijken de twee naar de functie van deze driehoek. De telduivel vertelt Robert dat bij deze driehoek een aantal getallenreeksen verborgen zijn. De eerste zijn de driehoeksgetallen ofwel de kokosnoten. Deze getallen zijn te zien in figuur 9, in de rood-gearceerde kolom.

Daarna vertelt de telduivel aan Robert dat als je de getallen in de rijen (horizontaal) bij elkaar optelt dat de uitkomst een macht van twee is. Zoals de eerste rij³ is $2^1 = 2$ en de laatste rij is $2^{16} = 65536$.

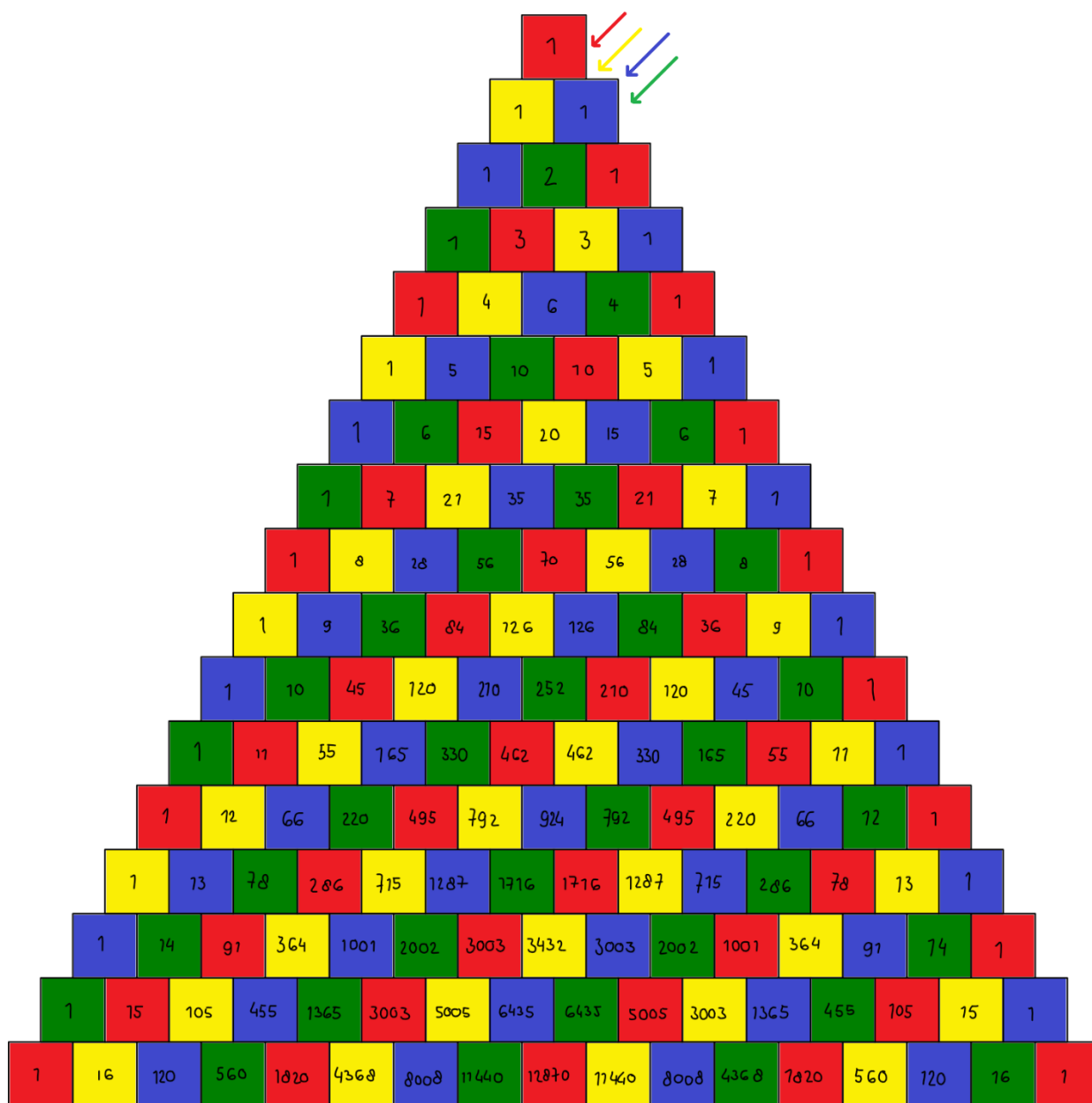


Figuur 9 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 134

De laatste getallenreeks die verborgen is in de driehoek van Pascal, is de Bonatsji-reeks. Deze is te vinden door te kijken naar de kleuren in de getallendriehoek in figuur 10. De telduivel legt uit dat de reeks begint met het eerste rode trapje dat rechtsboven begint. Dit is natuurlijk één. Daarna gaan ze naar het tweede trapje, het gele trapje wat ook één is. Als derde kijken ze naar het blauwe trapje, deze heeft er twee en tellen ze bij elkaar op, dan krijgen ze twee. Dit doen ze ook met het groene trapje, hierdoor komen ze uit op drie. Zo gaan de twee op dezelfde kleuren volgorde verder en vinden de Fibonaccigetallen.

Als laatste nemen de twee nog een kijkje hoe de driehoek eruitziet als alleen de even of oneven getallen zichtbaar zijn. Hierdoor komen er allerlei kleine driehoeken in de grote getallen driehoek tevoorschijn. Dit is het einde van de achtste nacht.

³ De driehoek van Pascal begint bij het eerste blokje als de nulde-rij.



Figuur 10 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 139

De achtste nacht:

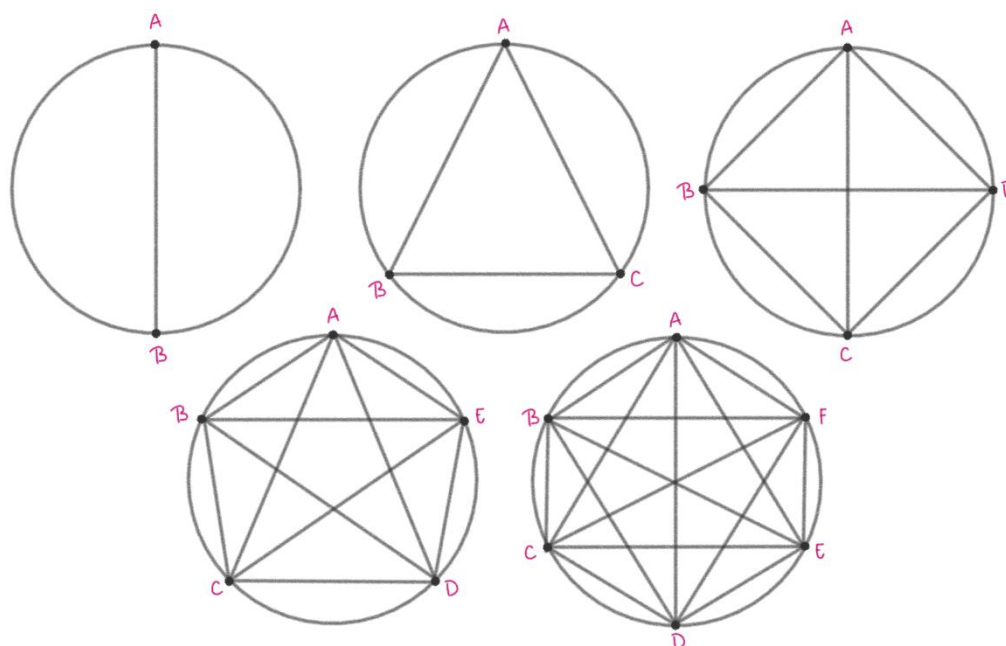
Deze nacht komt Robert de telduivel tegen in het wiskunde lokaal van zijn meester, meneer van Balen. Hij is dan ook opgelucht dat het toch de telduivel is die binnenkomt. Robert ziet dat zijn twee beste vrienden vooraan zitten, Albert en Bettina. De telduivel vertelt Robert om de twee voorletters van de namen, A en B, naast elkaar op het bord te zetten: AB. Hierna zegt de telduivel tegen de twee vrienden dat ze moeten verwisselen van plaats. Nu schrijft Robert de tweede combinatie op: BA.

Vervolgens komt Charlie binnen die naast Bettina gaat zitten. Zo komt Robert uit op CBA. Na wat verwisselen komen de twee erachter dat er voor drie personen zes mogelijkheden zijn om naast elkaar te zitten, namelijk: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB en CBA. Dit is een voorbeeld van een permutatie zonder herhalen met letten op de volgorde.

Na het geprobeerd te hebben met drie personen die van plaats verwisselen, komt er een vierde bij, Doris. Robert schrijft alle mogelijke volgorden op het bord en komt erachter dat er vierentwintig mogelijkheden zijn. De telduivel legt uit dat er een manier is om dit sneller te berekenen, namelijk door vier wamm! ($4!$), iets dat wij kennen als vier faculteit. Vier wamm (faculteit) betekent het volgende: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Op het moment dat de twee klaar zijn met de permutaties, gaat de telduivel over in combinaties zonder herhalen of letten op de volgorde. Dit legt hij uit doormiddel van handdrukken (handen vasthouden). Wanneer Albert en Bettina samen zijn, kunnen de twee maar op één manier handdrukken. Als Charlie daarbij komt, kunnen de drie op drie verschillende manieren handdrukken. En wanneer Doris daar nog eens bij komt, kunnen de vier op zes manieren handdrukken. Na het terug kijken op deze getallen vinden Robert en de telduivel een verband tussen deze getallen, namelijk: de driehoeksgetallen ofwel de kokosnootgetallen.

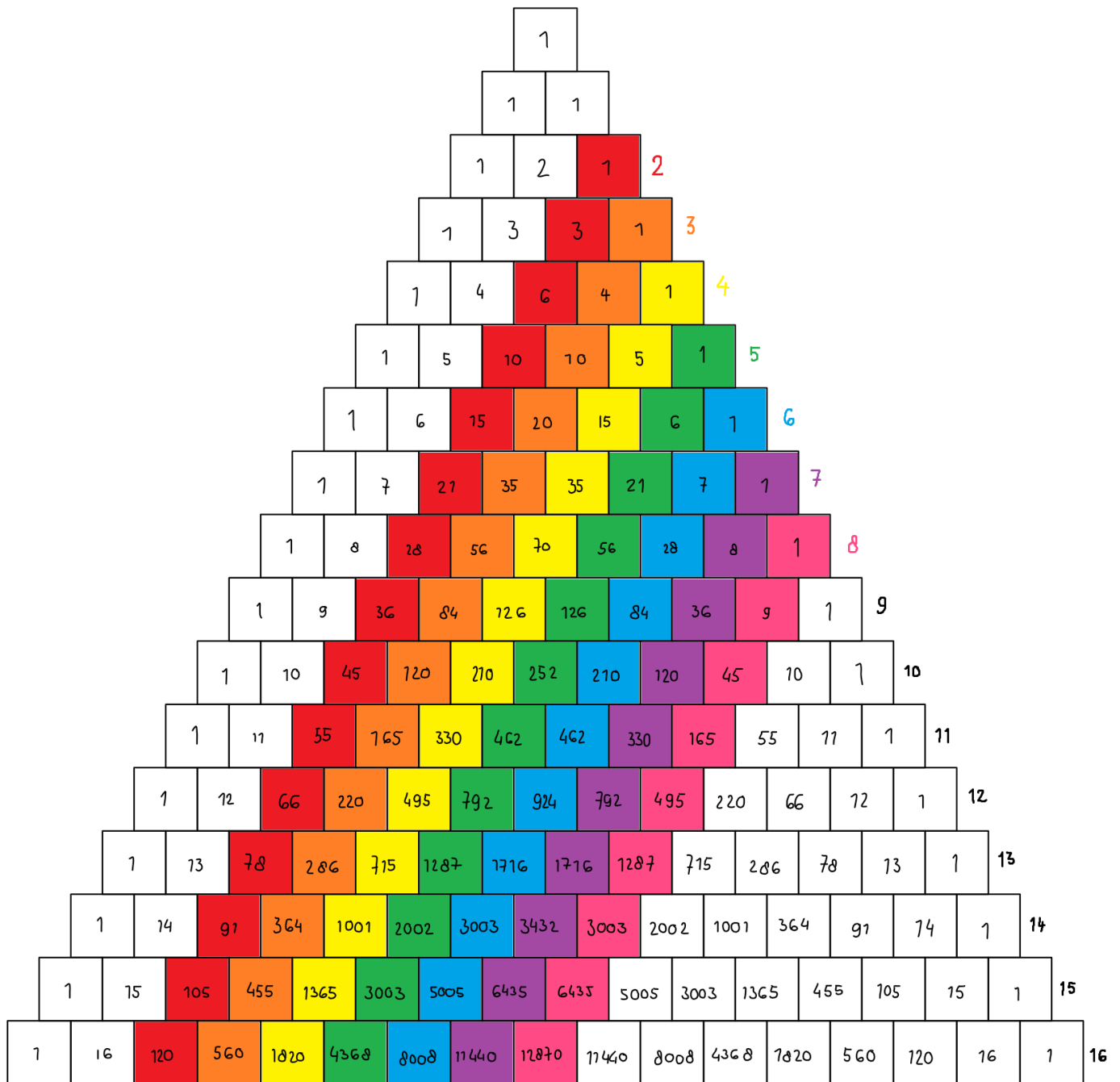
De telduivel laat ook zien dat dit makkelijk berekent kan worden doormiddel van het tekenen van cirkels. Waarbij je voor iedere persoon een letter op de cirkel zet en deze punten met elkaar verbindt voor de hoeveelheid handdrukken die mogelijk zijn. Zie figuur 11.



Figuur 11, gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 160

Als laatste kijken de twee naar combinaties zonder herhalen of letten op de volgorde tot de n -de klasse. Dit legt de telduivel uit doormiddel van bezemploegen, waarbij drie mensen nodig zijn om het vieze schoolplein schoon te vegen. Dit levert getallen op die onmogelijk lijken voor Robert om te berekenen. Want als er steeds meer mensen zijn waaruit hij kan kiezen, worden de mogelijkheden erg groot. Daarom komt de telduivel met een oplossing.

Deze oplossing luidt als volgt: de driehoek van Pascal, ofwel de getallendriehoek. Bekijk figuur 12, voor de bijpassende driehoek van Pascal. De telduivel verteld hem dat wanneer er drie plekken zijn die gevuld moeten worden, ze moeten kijken naar de oranje kolom. Als er dan acht mensen zijn die zich aanmelden voor deze positie om te vegen, dan kijk je naar de achtste rij en koppel deze met de oranje kolom. Zo kom je uit op zesenvijftig (56) mogelijkheden. Dit maakt dat het getal van de kolom waar je naar kijkt, ofwel hoeveel plekken je kunt vullen, gelijk is aan de n van de combinaties zonder herhaling of letten op de volgorde tot de n -de klasse.



Figuur 12 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 166

De negende nacht:

Vandaag is Robert ziek naar bed gegaan en daarom verloopt deze nacht wat rustiger dan de vorige. Hij blijft in bed liggen terwijl de telduivel hem verteld over de verschillende reeksen die ze tot nu toe besproken hebben. Zo roept de telduivel allerlei mannetjes in verschillende kleuren vesten met getallen voor zich.

De eerste rij mannetjes hebben een wit vestje aan. Deze mannetjes hebben de natuurlijke getallen ofwel de gewone getallen op hun vesten staan. De tweede rij mannetjes hebben een rood vestje aan. Deze mannetjes hebben de oneven getallen op hun vesten staan. De derde rij mannetjes hebben een oranje vestje aan. Deze mannetjes hebben de priemgetallen ofwel prima getallen op hun vesten staan. De vierde rij mannetjes hebben een geel vestje aan. Deze mannetjes hebben de Fibonaccigetallen ofwel Bonatsji-getallen op hun vesten staan. De vijfde rij mannetjes hebben een groen vestje aan. Deze mannetjes hebben de driehoeksgetallen ofwel kokosnootgetallen op hun vesten staan. De zesde rij mannetjes hebben een blauw vestje aan. Deze mannetjes hebben de machten van twee ofwel gehupte getallen op hun vesten staan⁴. De zevende en laatste rij mannetjes hebben een paars vestje aan, deze hebben de faculteitsgetallen ofwel wamm! -getallen op hun vestje staan. Deze rijen zijn allemaal te zien in figuur 13 en gaan natuurlijk door tot in het oneindige.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	...	
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	...	
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...	
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...	
1	2	6	24	120	720	5040	40320		362880		...

Figuur 13 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 178

⁴ De blauwe rij in figuur 13 heb ik aangepast en staat anders aangegeven in het boek. De reeks begint hierboven met één want $2^0 = 1$, in het boek begint de telduivel met twee. Dit komt omdat 2^0 nog niet is behandeld in het boek, het komt later wel aan bod.

Nadat de telduivel deze reeksen heeft laten zien, introduceert hij een nieuwe reeks aan Robert. De harmonische reeks. Hij laat zien dat wanneer je de gehupte getallen van twee (vanaf 2^1) in een breuk zet en daar een reeks van maakt, dat naarmate de reeks, het getal steeds twee keer zo klein wordt. Wanneer je deze dan tot in het oneindig bij elkaar optelt, kom je uit op één: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \dots = 1$.

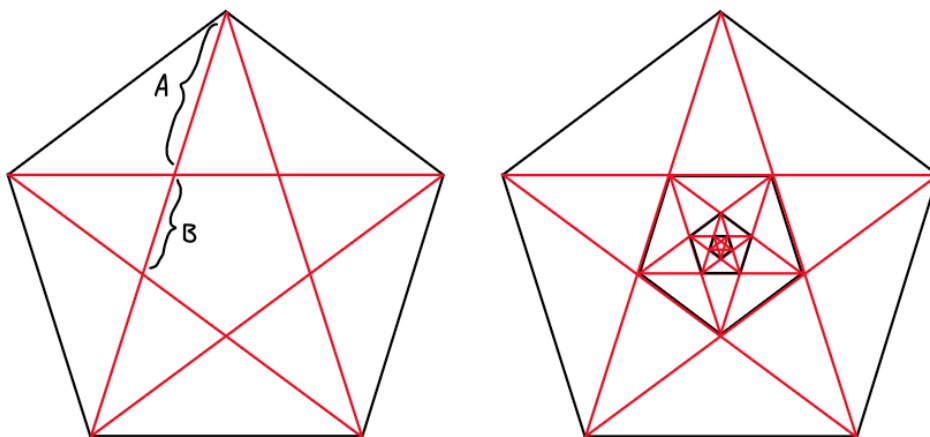
Robert denkt dat dit ook zo is bij: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, maar de telduivel laat zien dat dit hier niet geldt.

De tiende nacht:

Deze nacht bevindt Robert zich in een sneeuwstorm en wordt door de telduivel gered. De telduivel legt uit dat sneeuwvlokken meestal zeshoeken zijn die vertakken in pieken, die oneindig lang doorgaan. Nadat Robert weer lekker warm is verteld de telduivel hem om de opeenvolgende Bonatsji-getallen door elkaar te delen. De twee komen bij de deling van hogere Fibonacci-getallen uit op een krankzinnig getal van 1,6181818.... Hoe hoger de twee komen hoe dichter ze bij het getal 1,618033989... uitkomen. Dit is ook wel bekend als de gouden verhouding, die de telduivel een krankzinnig/deksels getal noemt.

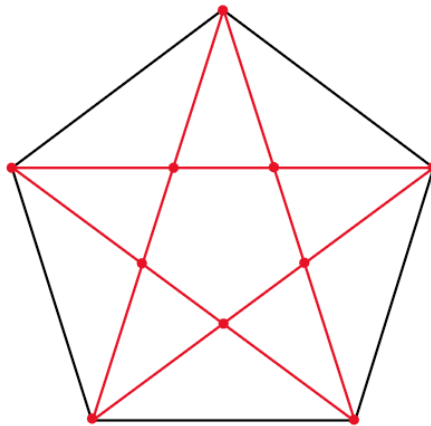
Om op dit getal te komen wordt er gebruik gemaakt van een kettingbreuk, die de telduivel laat zien en gaat als volgt: $1,618 \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$. Robert vindt dit maar

lastig en gaan de twee verder met dit getal op een andere manier, namelijk met een vijfhoek. Een vijfhoek waarvan de zijde een lengte van één hebben. Robert snapt niet zo goed wat één is, één meter of één centimeter? De telduivel zegt tegen Robert dat het geen ene bal uitmaakt en noemt de zijdes van de vijfhoek uiteindelijk één quang lang. De telduivel gaat verder en tekent in de vijfhoek een rode ster, zoals in figuur 14. Hij heeft hier A en B bij geschreven en legt uit dat A precies 1,618... keer langer is dan B. In de getekende ster is te zien dat er een nieuwe vijfhoek ontstaat met een lengte van B, zo valt er oneindig lang vijfhoeken te tekenen, net zoals met een sneeuwvlok. Te zien in figuur 14.



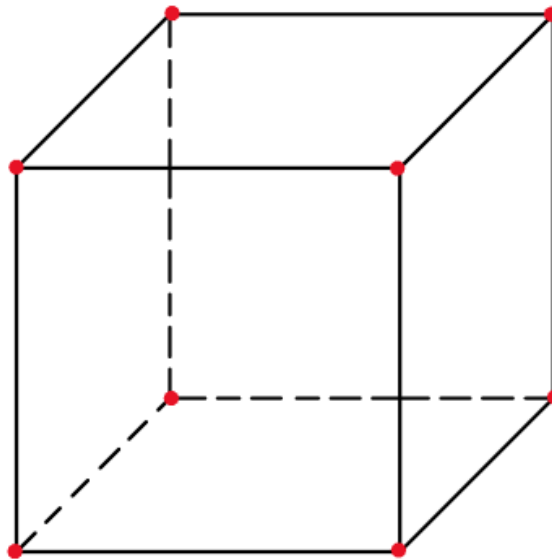
Figuur 14 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 200

Na het laten zien van de oneindigheid in een vijfhoek tekent de telduivel opnieuw een vijfhoek, maar nu zitten er op de snijpunten van de lijnen een knoop, zie figuur 15. Robert telt alle knopen en komt uit op tien. Hierna telt hij de vlakken en dit zijn er elf. Tenslotte telt hij het aantal ribben, wat hij lijnen noemt, en komt uit op twintig. De telduivel laat vervolgens een formule zien: $K+V-L=1$ (de knopen plus de vlakken min de lijnen is gelijk aan één) en vertelt dat dit werkt voor elk vlak figuur. Voor de vijfhoek geldt dus $10+11-20=1$. Hiermee heeft de telduivel de Theorema van Euler voor de vlakke figuren uitgelegd.



Figuur 15 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 2002

Hij laat met een aantal voorbeelden ook de Theorema van Euler zien voor de driedimensionale figuren. Hiervoor geldt: $K+V-L=2$ (de knopen plus de vlakken min de lijnen is gelijk aan twee). Neem bijvoorbeeld een kubus, figuur 16.



Figuur 16 gebaseerd op een figuur uit 'De telduivel' (Berner, 1997) p. 207

In dit figuur telt Robert acht knopen, zes vlakken en twaalf lijnen, dus: $8+6-12=2$. Robert wordt vanaf deze nacht heel enthousiast over wiskunde, maar hierbij komt wel een einde aan nacht tien.

De elfde nacht:

In deze nacht praten de twee over bewijzen. Tot nu toe heeft de telduivel Robert alleen nog maar trucjes laten zien, maar niet waarom die trucjes altijd uitkomen. Hierom besluit hij Robert te vertellen over bewijzen. De twee beginnen met machtsverheffen, ofwel huppen, tot nu heeft Robert al van alles gezien zoals 2^1 , 2^2 , 2^3 , en zo voort, maar 2^0 kent hij nog niet. De telduivel verteld hem dat wanneer je een getal nul keer hupt (tot de nulde macht), er altijd één uit komt. Robert wil weten hoe dit is bewezen, maar dit is volgens de telduivel te lastig om uit te leggen.

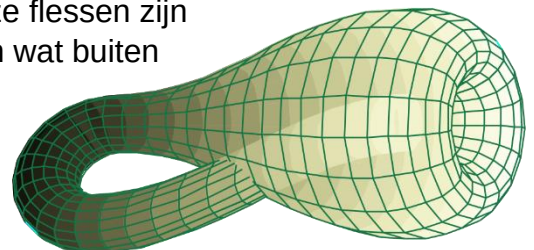
Bewijzen is volgens de telduivel hetzelfde als het oversteken van een snelstromende rivier. Het water is te woest om doorheen te zwemmen, dus zul je steen voor steen naar de overkant moeten springen. Soms duurt het even voordat je een goede steen hebt uitgekozen om de volgende sprong naar te maken. Een andere keer blijkt de steen waar je op gesprongen bent te glad te zijn om op te staan en zul je het overnieuw moeten proberen of een andere steen moeten kiezen om op te springen. De telduivel is in de eerste nacht dat hij op bezoek kwam behoorlijk uitgegleden toen hij erachter kwam dat $1\ 111\ 111\ 111 \times 1\ 111\ 111\ 111$ op een warboel van getallen uitkwam, in tegenstelling tot wat hij verwachtte.

Bijna alles in de wiskunde is bewezen, gaat de telduivel verder, zelfs de meest simpele sommen. Zoals $1+1=2$, dit heeft Bertrand Russell, Lord Raadsel volgens de telduivel, bewezen. Andere keren is het onmogelijk om iets te bewijzen, zoals bij het probleem van de handelsreiziger. Dit probleem gaat als volgt, stel je voor je maakt een rondreis in Amerika en wilt vijftientig vrienden bezoeken in elk een verschillend deel van het land. De vraag hierbij is dan, wat is de kortste route? Om deze vrienden te bezoeken zijn er 25! mogelijkheden en dat is een ontzettend groot getal. Dus een oplossing vinden zal niet lukken. Soms valt er ook iets te bewijzen door te bewijzen dat er geen bewijs bestaat. Dat is helaas niet van toepassing bij dit probleem en is er hiervoor geen volmaakte oplossing.

De twaalfde nacht:

In deze laatste nacht wordt Robert uitgenodigd voor een groot diner in de getallenhemel. Op de uitnodiging staat de naam van de telduivel en komt hij erachter dat hij Teplotaxl heet. Teplotaxl komt hem ophalen en vliegen samen naar de getallenhemel.

Aangekomen in het getallenparadijs komen de telduivel en Robert allerlei oude wiskundige tegen. De eerste die hun begroet is Bertrand Russell, ofwel Lord Raadsel, de man die $1+1=2$ heeft bewezen. Wanneer de twee doorlopen komen ze een stel rare flessen tegen, de flessen van Klein. Deze flessen zijn merkwaardig, je kunt namelijk niet zien wat binnen en wat buiten is, zie figuur 17. Dr. Klein, de uitvinder was ook zo klein, dat hij wel makkelijk in zijn eigen flessen past, merkte Robert op. De telduivel vond het maar een eigenwijze opmerking en zei dat ze snel door moesten lopen.



Figuur 17, overgenomen van Fles van Klein, (Fles van Klein, 2022) <https://flesvanklein.nl/over/>

De twee lopen langs heel veel deuren, sommige open, andere dicht met een bordje waarom stond: "niet storen s.v.p.!". Bij één van de open deuren komen ze een kamer vol met stof tegen, het stof van Cantor. Dit is stof waarvan het kleinste beetje stof meer deeltjes bevat dan je tellen kunt. Nadat de telduivel dit aan Robert verteld komt de oude professor de hoek om zingen en vindt Robert het maar weer een goede tijd om door te gaan.

Verderop komen ze meneer Uildert en professor Kous tegen, ook wel bekend als Leonhard Euler en Carl Friedrich Gauss. De twee wiskundigen hebben het net over de primagetallen, ofwel priemgetallen, als ze elkaar tegenkomen. Robert vraagt wat professor Kous (Gauss) doet en de telduivel verteld hem dat de professor een ontdekking heeft gedaan, de verzonnen getallen: i , ook wel bekend als de imaginaire getallen. Na dit korte gesprek lopen Robert en de Telduivel verder.

Snel hierna lopen de twee langs de kamer van Bonatsji, ook wel bekend als Leonardo van Pisa die de Fibonaccireeks uitgevonden heeft. Deze kamer wemelde van de hazen. Als de twee verder gaan komen ze langs een soort tempel, hierin zit één van de meest bekende wiskundige van de getallenhemel, namelijk Pythagoras. De telduivel legt uit dat dit de man is die de onverstandige getallen heeft ontdekt zoals $\sqrt{2}$ en $\sqrt{5}$. Daarnaast heeft hij ook het Griekse woord voor wiskunde ontdekt, *Mathematica*. De twee lopen de tempel voorbij en komen bij een oneindig lange tafel.

Voordat de twee gingen zitten viel Robert wat op. Hij merkte op dat er weinig vrouwen in de getallenhemel waren, hooguit zes of zeven telde hij. De telduivel legt hem uit dat men vroeger vond dat vrouwen niets konden toevoegen aan de wiskunde, maar dat hij denkt dat daar nu verandering in komt.

Op het moment dat ze in hun stoelen zitten horen ze een harde gong en verschijnt er een man die van een grote trap naar een gouden troon loopt en plaatsneemt aan de kop van de tafel. De telduivel fluistert Robert toe dat dit de uitvinder van de nul is. Robert fluistert terug en vraagt of dit de grootste wiskundige is. Waarop de telduivel antwoordt door te wijzen naar een trap die pas ophoudt als die de wolken aanraakt en zegt dat het opperhoofd van de telduivels daar bovenin woont, de uitvinder van de één.

De twee genieten van de taarten en hebben het zelfs nog even over het getal π . Na het diner komt de secretaris-generaal naar Robert toe en rijkt hem de pythagorese getalsorde van de vijfde klasse uit. Het is een zware vijfpuntige gouden ster die aan een halsketting bungelden. Hierbij is het avontuur van Robert met de telduivel voorbij en kan hij zelf aan de slag met wiskunde. Op school de volgende dag weet hij doormiddel van de trucjes van de telduivel en zijn nieuwe halsketting een moeilijk raadsel van zijn docent meneer van Balen op te lossen en eindigt het boek.

Alles op een rijtje:

1. De eerste nacht:
 - Oneindig veel grote getallen (kauwgumvermeerdering);
 - Oneindig veel kleine getallen (kauwgumdeling);
 - Getallen halen uit producten bestaande uit getallen met 1 (één).
2. De tweede nacht:
 - Het getal nul;
 - Negatieve getallen (mingetallen);
 - Machtsverheffen (huppen);
 - Productsommen.
3. De derde nacht:
 - Delen (verschilsommen);
 - Priemgetallen (primagetallen);
 - Priemgetallentest (zeef van Eratosthest).
4. De vierde nacht:
 - Breuken;
 - Worteltrekken (terug huppen of de radijstrekken);
 - Irrationele getallen (onverstandige getallen).
5. De vijfde nacht:
 - Driehoeksgetallen (driehoekige getallen of kokosnoten);
 - Kwadraten (vierkantsgetallen).
6. De zesde nacht:
 - Fibonaccireeks (Bonatsji-getallen of hazengetallen);
 - Leonardo van Pisa (Bonatsji).
7. De zevende nacht:
 - Driehoek van Pascal (getallendriehoek);
 - Driehoeksgetallen (driehoekige getallen of kokosnoten);
 - Machtsverheffen (huppen);
 - Fibonaccireeks (Bonatsji-getallen of hazengetallen);
 - Even getallen en oneven getallen.
8. De achtste nacht:
 - Combinatoriek;
 - Permutaties zonder herhaling met letten op de volgorde (plaats verwisselen);
 - Faculteit (wamm!);
 - Combinaties zonder herhaling of letten op de volgorde (handdrukken);
 - Combinaties zonder herhaling of letten op de volgorde tot de n-de klasse (bezemploeg).
9. De negende nacht:
 - Rekenkundige reeksen;
 - Natuurlijke getallen reeks ((dood) gewone getallen);
 - Oneven getallen reeks;
 - Priemgetallen reeks (prima getallen);
 - Fibonaccireeks (Bonatsji-getallen of hazengetallen);
 - Driehoeksgetallen reeks (driehoekige getallen of kokosnoten);
 - Faculteitsgetallen reeks (wamm!)

- Breuken;
- Harmonische reeks.

10. De tiende nacht:

- Kettingbreuken;
- De Gouden verhouding (krankzinnig/deksels getal);
- Polyeders (veelvlakken);
- Polygonen (veelhoeken);
- Theorema van Euler.

11. De elfde nacht:

- Bewijzen;
- Machtsverheffen met nul (nul keer huppen)
- Stellingen;
- Bertrand Russell (Lord Raadsel);
- Probleem van de handelsreiziger;

12. De twaalfde nacht:

- Bertrand Russell (Lord Raadsel), $1+1=2$;
- Felix Klein, fles van Klein;
- Georg Cantor, Cantor stof;
- Leonhard Euler (meneer Uildert), Theorema van Euler;
- Carl Friedrich Gauss (Kous), Imaginaire getallen (verzonnen getallen);
- Leonardo van Pisa (Bonatsji), Fibonaccireeks (Bonatsji-getallen of hazengetallen);
- Pythagoras van Samos, stelling van Pythagoras en de irrationele getallen (onverstandige getallen);
- Brahmagupta, uitvinder van de nul;
- Uitvinder van de één (persoon onbekend);
- (Archimedes van Syracuse) Pi.

Deelonderwerp 3:

Het eerste wiskundig onderwerp waarover valt bij te schrijven.

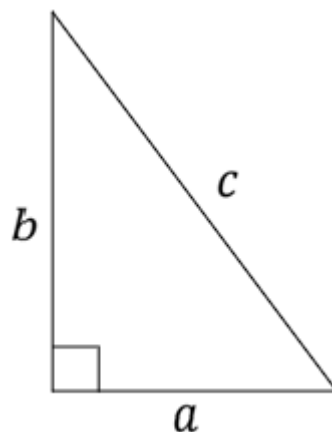
Een nieuw onderwerp introduceren:

In het boek *De telduivel* worden veel wiskundige onderwerpen geïntroduceerd, zoals bijvoorbeeld machtsverheffen, worteltrekken en combinatoriek. Vlak voordat het boek eindigt wordt de hoofdpersoon ook verteld over verschillende wiskundigen, waaronder Pythagoras van Samos (Enzensberger, 1997). De stelling van Pythagoras is wijd bekend en wordt door vele mensen dagelijks gebruikt, dit is alleen een onderwerp dat niet in het boek voor komt. Er wordt wel een klein begin gemaakt met de stelling in het vierde hoofdstuk van het boek (bladzijde 81), al is dit niet goed te herkennen als lezer.

Omdat dit niet direct behandeld wordt in het boek, maar Pythagoras wel op verschillende manieren wordt geïntroduceerd, lijkt mij het een goed idee dit onderwerp te behandelen in het nieuwe hoofdstuk.

De stelling van Pythagoras:

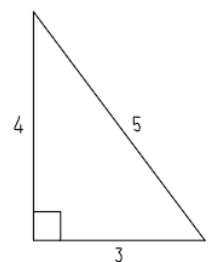
De stelling van Pythagoras luidt als volgt. Er geldt dat bij een driehoek met een rechte hoek⁵ de formule voor het berekenen van de schuine zijde (lange zijde): $a^2 + b^2 = c^2$ is, waarbij a en b rechthoekzijdes zijn en c de lange zijde is. Ik laat het zien in figuur 18:



Figuur 18

Wat we weten van de stelling is dat Pythagoras deze introduceerde, hij is de eerste die de stelling daadwerkelijk opschreef als: $a^2 + b^2 = c^2$ en daarbij liet weten dat deze formule is te gebruiken bij een driehoek met een rechte hoek (Heath, 1956).

Echter blijkt later dat er veel eerder in de geschiedenis kennis is gemaakt met deze stelling. Zoals de Egyptenaren, die tot zo ver terug als 2000 v.C. de verhoudingen van de 3,4,5-driehoek gebruikten. Met de kennis dat $3^2 + 4^2 = 5^2$, er is alleen geen bewijs dat ze wisten dat de driehoek een rechte hoek bevat. De 3,4,5-driehoek is het meest bekende voorbeeld van de



Figuur 19

⁵ Een driehoek waarvan één van de hoeken 90° is

stelling van Pythagoras waarbij de som van twee gehele getallen tot de tweede macht, een derde geheel getal tot dezelfde macht oplevert (Heath, 1956).

Daarnaast is er bewijs gevonden dat in Babylon bekend was hoe de stelling werkte. Dit bewijs is gevonden op een Babylonisch kleitablet waarop gehele uitkomsten van de stelling geschreven staan. De tablet wordt 'Plimpton 322' genoemd, te zien in figuur 20. Ook is gebleken dat oud China gebruik maakte van de stelling. Dit is allemaal later pas ontdekt, waardoor Pythagoras de naamdrager is van deze stelling (Lanser, 2013).

De stelling van Pythagoras is overigens ook de meest bewezen stelling in de wiskunde. Zo heeft Elisha Scott Loomis in 1927 een boek gepubliceerd, *The Pythagorean proposition* (Loomis, 1940), waarin hij 250 verschillende bewijzen voor de stelling van Pythagoras laat zien (Lanser, 2013).

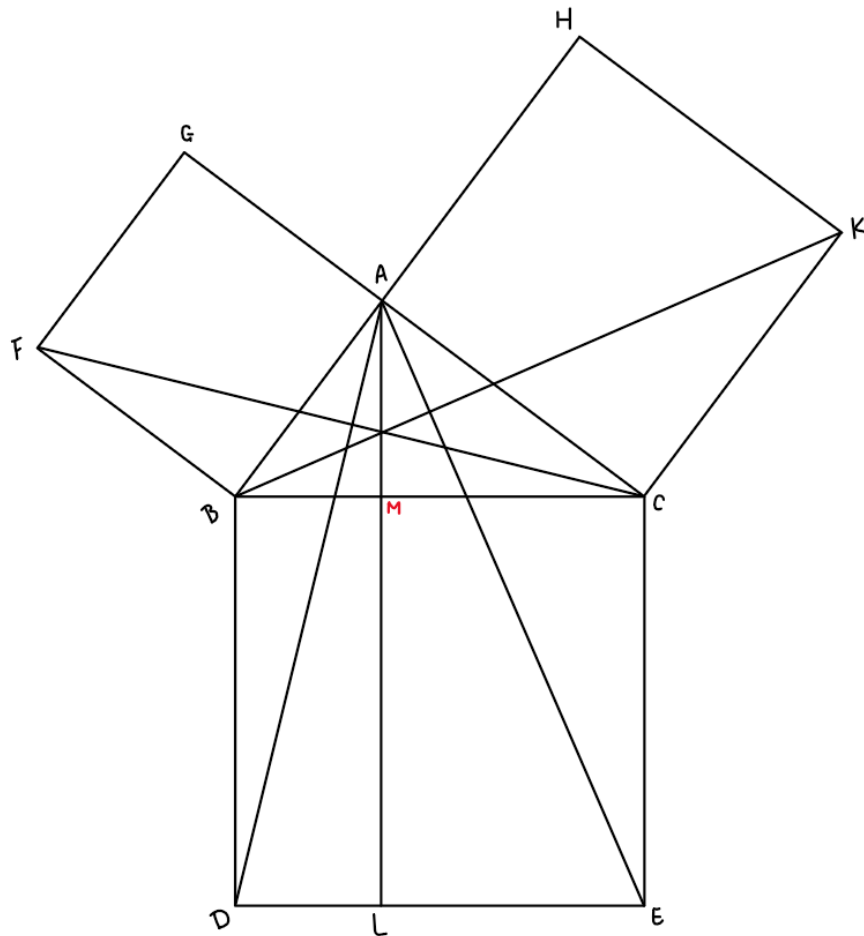
Van deze 250 bewijzen zit er helaas geen bij van Pythagoras zelf, hij heeft nooit een bewijs gevonden voor zijn eigen stelling. Van de bewijzen is het bekendste gegeven door Euclides in het eerste volume van zijn boekenreeks, de Elementen (Heath, 1956). Dit doe ik voor met behulp van figuur 21 in de volgende paragraaf.



Figuur 20 De kleitablet Plimpton 322 (circa 1700 voor Christus). Overgenomen van 'Babylonisch rekenen' (Van de Craats, 2004), p. 4. https://pure.uva.nl/ws/files/3883811/41632_babylon.pdf

Het bewijs van de stelling van Pythagoras:

In deze paragraaf refereer ik naar het werk van Euclides uit *The thirteen books of Euclid's Elements*, (1956).



Figuur 21 gebaseerd op een figuur uit 'The thirteen books of Euclid's elements' (Heath, 1956)

Te bewijzen is de stelling $a^2 + b^2 = c^2$, in figuur 21 is dat $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Bekent is dat $\angle BAC = 90^\circ$. Dit is zo omdat AC een rechte lijn is met AG en AB een rechte lijn is met AH en doordat $\angle G \wedge \angle H$ beide rechte hoeken zijn vanwege de afkomst uit een vierkant. Waardoor $\angle BAC \cong \angle G \cong \angle H$ en is $\angle BAC$ dus een rechte hoek.

De driehoeken $ABD \wedge FBC$ zijn congruent⁶. De zijdes $DB \wedge BC$ en $FB \wedge BA$ zijn aan elkaar gelijk wat maakt dat $AD \wedge FC$ aan elkaar gelijk zijn en dus geldt dat $\triangle ABD \cong \triangle FBC$. Doordat de zijde van de driehoek BD , samen met de hoogte BM de oppervlakte $ABD = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BM$ maakt, is de oppervlakte van vierhoek $BDLM$ gelijk aan twee keer de oppervlakte van de driehoek ABD , omdat de vierhoek dezelfde zijde en hoogte heeft. Dus $BDLM \cong 2 \cdot ABD$. Hetzelfde geldt voor de vierhoek $ABFG$ en driehoek FBC , $ABFG \cong 2 \cdot FBC$. Omdat $ABD \cong FBC$ is vierhoek $BDLM$ gelijk aan vierkant $ABFG$, dus $BDLM \cong ABFG$.

⁶ De vorm en afmetingen van de genoemde driehoeken zijn identiek

Ditzelfde geldt ook voor de driehoeken $KBC \wedge ACE$. Hierdoor is vierhoek $CELM$ gelijk aan vierkant $ACHK$, $CELM \triangleq ACHK$. Dit betekent dat we $BCDE = BDLM + CELM$, kunnen schrijven als $BCDE = ABFG + ACHK$. Wat we ook weten is dat $ABFG = AB \cdot BF$ maar omdat $AB \triangleq BF$, valt dit te schrijven als $ABFG = AB^2$. Hetzelfde kunnen we doen voor $CELM$ en $BCDE$. Dan schrijven we dit als $ACHK = AC^2$ en $BCDE = BC^2$.

Dit zorgt er dus voor dat we $BCDE = ABFG + ACHK$ kunnen schrijven als, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Hiermee is het bewijs voor de stelling van Pythagoras gegeven.

Verwerken en analyseren van het eerste bijgeschreven hoofdstuk:

In deze paragraaf refereer ik naar mijn eigen werk over het eerste bijgeschreven hoofdstuk geschreven voor dit profielwerkstuk (Kroonstuiwer, 2022).

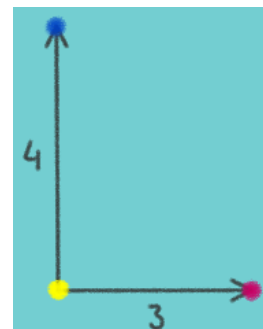
Voor de eerste keer sinds Robert met Teplotaxl naar de getallenhemel is geweest en hij zijn medaille van de secretaris-generaal heeft gekregen, komt er iemand deze nacht bij hem op bezoek. Niemand anders dan Pythagoras zelf. Pythagoras verteld Robert dat ervan af nu elke nacht een andere wiskundige langskomt om hem een nieuw onderwerp bij te leren tot hij gepromoveerd is tot meester van de pythagorese getalsordes. De twee beginnen natuurlijk met de stelling van Pythagoras.

Pythagoras legt dit aan Robert uit door hem vier stappen naar voren te laten zetten, waarna hij zelf vanaf dezelfde plek drie stappen naar rechts zet. De stappen die de twee hebben gezet komen in de lucht te staan, zie figuur 22. De meester noemt de zijdes die ze gelopen hebben, kikkerzijden. Later wordt er duidelijk gemaakt dat deze kikkerzijden horen bij een driehoek met een kikkersprong. Dit kennen wij als rechthoekszijden en een driehoek met een rechte hoek.

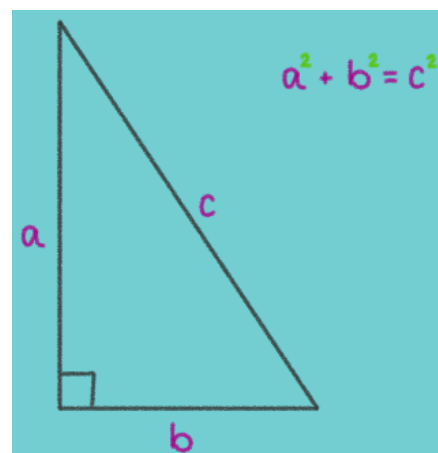
Dan laat Pythagoras zien dat ze de afstand die de twee van elkaar verwijderd zijn kunnen berekenen door de twee getallen te huppen (kwadrateren) deze vervolgens bij elkaar op tellen en als laatste de uitkomst van de optelsom terug te huppen, worteltrekken. De twee komen dan op de som $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Na dit voorbeeld laat Pythagoras een nieuwe driehoek verschijnen in de lucht, zie figuur 23. Robert schrikt hier een beetje van, maar Pythagoras legt uit dat dit precies hetzelfde is als het voorbeeld waarmee zij net hebben gerekend, alleen zijn de cijfers in letters vervangen. Ook laat Pythagoras zien dat het van belang is dat de driehoek een rechte hoek moet bevatten, wat hij een kikkersprong noemt. Daarbij legt hij uit dat de kikkersprong een hoek van negentig graden is.

Nadat Pythagoras de stelling aan Robert heeft uitgelegd gaat Robert aan de slag met het oplossen van twee voorbeelden met de stelling, zoals de $1:1:\sqrt{2}$ driehoek. Dit doet hij met behulp van zijn halsketting, die in een toverstok veranderde toen hij het vasthield. Zo komt er een einde aan de eerste nieuwe nacht voor Robert en hij kan niet wachten tot zijn volgende les.



Figuur 22 overgenomen van 'Robert en zijn avontuur op weg naar de getallenhemel: Het verhaal' (Kroonstuiwer, 2022) p. 6



Figuur 23 overgenomen van 'Robert en zijn avontuur op weg naar de getallenhemel: Het verhaal' (Kroonstuiwer, 2022) p. 9

Deelonderwerp 4:

Het tweede wiskundig onderwerp waarover valt bij te schrijven.

Een nieuw onderwerp introduceren:

Voor het tweede hoofdstuk wilde ik graag een vrouwelijke wiskundige aan het woord hebben, aangezien er in het boek *De telduivel* (Enzensberger, 1997) geen vrouwelijk figuur voor komt. Na veel zoeken kwam ik terecht bij de Franse Sophie Germain, die veel heeft bijgedragen aan het bewijzen van de laatste stelling van Fermat, met name bij het bewijs voor de priemgetallen (Lanser, 2013).

Door Germain het nieuwe onderwerp te laten introduceren in plaats van opnieuw door een oude grijze man, wordt er laten zien dat vrouwen ook een waardige toevoeging bieden in de wiskunde. Daarnaast is de laatste stelling van Fermat ook een heel mooi vervolg op de stelling van Pythagoras, zoals besproken in het eerste bijgeschreven hoofdstuk. Dit komt, omdat de stelling van Fermat afstamt van die van Pythagoras.

De laatste stelling van Fermat:

In deze paragraaf refereer ik naar het werk van Peter Lanser uit zijn wetenschappelijk studieboek *De Laatste Stelling van Fermat* (2013).

De laatste stelling van Fermat is een geliefde stelling in de wiskunde, waarvoor recent pas een bewijs is gevonden. De stelling luidt als volgt: "Voor iedere vergelijking $x^n + y^n = z^n$ bestaat geen positieve geheeltallige oplossingen x, y, z, n met $n > 2$." (Fermat/Wiles).

Pierre de Fermat is de eerste wiskundige die zichzelf de vraag stelde of er ook, als een vervolg op de stelling van Pythagoras, twee machten boven de twee bij elkaar op kan tellen die samen een heel getal tot dezelfde macht opleveren. Hij vond dat dik niet kon en schreef daarom als opmerking in de kantlijn van zijn exemplaar van het boek *Arithmetika*:

Het is niet mogelijk een derdemacht te schrijven als de som van twee derdemachten of een vierde macht te schrijven als de som van twee vierde machten of, in het algemeen, elk getal in een macht groter dan twee te schrijven als een som van twee soortgelijke machten. Ik heb een waarlijk spectaculair bewijs voor deze stelling gevonden, maar de kantlijn is te smal om het te bevatten.

Fermat weigerde zijn berekeningen vrij te geven en werden dus ook pas na zijn dood gepubliceerd. Tussen deze publicaties zat zijn bewijs voor de stelling met $n = 4$. Er was dan ook erg lang geen bewijs voor de gehele stelling. Niet dat veel wiskundigen het niet hebben geprobeerd, het was alleen lastig om te bewijzen.

Er is heel lang gekeken naar het bewijzen van de stelling doormiddel van priemgetallen, door aan te tonen dat voor $x^p + y^p = z^p$ geen geheeltallige oplossingen zijn voor x, y, z als p een priemgetal is. Hierbij liepen wiskundige vast bij het feit dat er oneindig veel priemgetallen ontstaan en het onmogelijk is om alle getallen afzonderlijk te onderzoeken. Hierbij zorgde Sophie Germain (1776-1831) voor een belangrijke doorbraak.

Germain zorgde ervoor dat het aantal machten p terug geschaald kon worden tot werkbare porties. Dit deed zij met de priemgetallen p waarvoor geldt dat $2p + 1$ ook een priemgetal is. Deze priemgetallen worden dan ook de Sophie Germainpriemgetallen genoemd. Dit leidde tot de stelling: " $x^p + y^p = z^p$ heeft voor het priemgetal p geen geheeltallige oplossing voor x, y , en z als $2p + 1$ ook een priemgetal is." Helaas heeft zij tijdens haar leven geen erkenning gehad voor haar bijdragen aan het bewijzen van de stelling.

Bewijs voor $n = 4$:

In deze paragraaf refereer ik naar het werk van Peter Lanser uit zijn wetenschappelijk studieboek *De Laatste Stelling van Fermat* (2013).

Om te bewijzen dat er geen geheeltallige oplossingen zijn voor de laatste stelling van Fermat met $n = 4$, moeten we beginnen bij de primitieve Pythagoreïsche drietallen. Hiervoor geldt dat bij $x^2 + y^2 = z^2$ het drietal (x, y, z) gevormd kan worden waarvan x , y , en z gehele getallen zijn, met de grootste gemeenschappelijke deler gelijk aan één. Dit noteren we als:

$$\text{ggd}(x, y, z) = 1$$

Omdat de grootste gemeenschappelijke deler gelijk is aan één, heeft een primitieve Pythagoreïsch drietal maar één even getal.

Het is lastig om de stelling op te lossen door een bewijs te vinden dat het vermoeden waar maakt. Wat maakt dat een manier om een bewijs te leveren via de methode, “bewijzen uit het ongerijmde”, is. Dit betekent, door het tegendeel van de stelling als waar te stellen en dit later te ontkrachten, een bewijs voor de originele stelling gevonden is.

Zo gaan we er nu vanuit dat $x^4 + y^4 = z^4$ wél een geheeltallige oplossing heeft. Wat we weten is dat elke vierde macht een kwadraat is: $x^4 = (x^2)^2$. Dit maakt dat als $x^4 + y^4 = z^4$ een geheeltallige oplossing heeft, $x^4 + y^4 = z^2$ ook een geheeltallige oplossing heeft. Het primitieve Pythagoreïsche drietal dat hierbij hoort is dan (x^2, y^2, z) met de oplossing (x, y, z) met de klein mogelijke waarde voor z .

Wat ook bekend is dat een primitief Pythagoreïsch drietal (x, y, z) ook wel geschreven kan worden als:

$$x = m^2 - n^2$$

$$y = 2mn$$

$$z = m^2 + n^2$$

Waarbij geldt dat m en n gehele getallen zijn met $m > n$, $\text{ggd}(m, n) = 1$ en $m + n$ is oneven.

Dit kan omdat er is gesteld dat ieder natuurlijk getal op precies één manier (volgorde niet meegerekend) als een product van priemgetallen is te schrijven. Dat kan op de volgende manier:

$$y = 2^n \cdot a^p \cdot b^q$$

$$y^2 = (2^n)^2 \cdot (a^p)^2 \cdot (b^q)^2$$

Met a en b groter dan twee en $\text{ggd}(a, b) = 1$. Alle priemfactoren hebben dus een even exponent.

Omdat $x^2 + y^2 = z^2$ te schrijven is als $y^2 = z^2 - x^2$ en dit kan weer geschreven worden als $y^2 = (z - x)(z + x)$. Hier geldt dat z en x beide oneven zijn, wat ervoor

zorgt dat $(z - x)$ en $(z + x)$ beide even zijn. Wat maakt dat we $(z - x) = 2k$ en $(z + x) = 2r$ kunnen stellen. Wat leidt tot:

$$y^2 = 2k \cdot 2r$$

$$y^2 = 2^2 \cdot k \cdot r$$

$2k = (z - x)$ Zorgt voor $k = \frac{(z-x)}{2}$ en $2r = (z + x)$ zorgt voor $r = \frac{(z+x)}{2}$.

Wat maakt dat:

$$y^2 = 2^2 \cdot \frac{(z-x)}{2} \cdot \frac{(z+x)}{2}$$

En met de kennis dat:

$$y^2 = (2^n)^2 \cdot (a^p)^2 \cdot (b^q)^2$$

Kunnen we stellen dat $(a^p)^2 = \frac{(z-x)}{2}$ en $(b^q)^2 = \frac{(z+x)}{2}$. Wat betekent dat $\frac{(z-x)}{2}$ en $\frac{(z+x)}{2}$ kwadraten zijn. Zo maken we dan:

$$n^2 = \frac{(z-x)}{2}$$

$$2n^2 = z - x$$

En:

$$m^2 = \frac{(z+x)}{2}$$

$$2m^2 = z + x$$

Wat leidt tot:

$$2m^2 + 2n^2 = (z + x) + (z - x)$$

$$2z = 2m^2 + 2n^2$$

$$z = m^2 + n^2$$

En:

$$2m^2 - 2n^2 = (z + x) - (z - x)$$

$$2x = 2m^2 - 2n^2$$

$$x = m^2 - n^2$$

En als laatste:

$$y^2 = 2^2 \cdot m^2 \cdot n^2$$

$$y = 2mn$$

Als we dan uitgaan van het primitieve Pythagoreïsch drietal (x^2, y^2, z) krijgen we:

$$x^2 = m^2 - n^2$$

$$y^2 = 2mn$$

$$z = m^2 - n^2$$

Waarbij hetzelfde geldt, dat m en n gehele getallen zijn met $m > n$, $\text{ggd}(m, n) = 1$ en $m + n$ is oneven.

Nu weten we dat $x^2 = m^2 - n^2$ oneven is, omdat $y^2 = 2mn$ altijd even is. Dan weten we ook dat m en n niet beide even of oneven kunnen zijn, dit komt omdat $m + n$ oneven is. Daarnaast kan m even en n oneven ook niet.

Als we voor een even getal $2p$ nemen en een oneven getal $2q + 1$ nemen dan zien we het volgende als m en n beide even zijn:

$$m + n = 2p + 2q = 2(p + q)$$

Dit komt altijd uit op een even getal. Dan het volgende als m en n beide oneven zijn:

$$m + n = (2p + 1) + (2q + 1) = 2p + 2q + 2 = 2(p + q) + 2$$

Ook dit komt altijd uit op een even getal.

Om te laten zien dat m even en n oneven niet kan, doen we het volgende:

$$\begin{aligned} x^2 = m^2 - n^2 &= (2p)^2 - (2q + 1)^2 = 4p^2 - 4q^2 - 4q - 1 = 4(p^2 - q^2 - q) - 1 \\ &= 4((p - q)^2 - q) - 1 \end{aligned}$$

Dit maakt dus: $x^2 = 4((p - q)^2 - q) - 1$ en omdat p en q beide willekeurige natuurlijke getallen zijn, kan het voorkomen dat $(p - q) = 0$ en dit zorgt voor het volgende:

$$x^2 = 4((p - q)^2 - q) - 1 = 4((0)^2 - q) - 1 = 4 \cdot -q - 1 = -4q - 1$$

Wat maakt dat $x^2 = -4q - 1$ dit is een negatief oneven getal, wat niet kan aangezien een kwadraat niet op een negatief getal uit kan komen. Het enige dat dus kan is m oneven en n even:

$$\begin{aligned} x^2 = m^2 - n^2 &= (2p + 1)^2 - (2q)^2 = 4p^2 + 4p + 1 - 4q^2 = 4(p^2 + q^2 + p) + 1 \\ &= 4((p + q)^2 + p) + 1 \end{aligned}$$

Dit maakt dus $x^2 = 4((p + q)^2 + p) + 1$ en omdat p en q beide willekeurige natuurlijke getallen zijn, kan het voorkomen dat $(p - q) = 0$ en dit zorgt voor het volgende:

$$x^2 = 4((p + q)^2 + p) + 1 = 4((0)^2 + p) + 1 = 4 \cdot p + 1 = 4p + 1$$

Wat maakt dat $x^2 = 4p + 1$ dit is een positief oneven getal en komt goed uit. Dus vanaf nu kunnen we uitgaan van het volgende, m is oneven en n is even.

Verder weten we dat $y^2 = 2mn$ en dat m en n geen gemeenschappelijke factoren hebben omdat $\text{ggd}(m, n) = 1$, $m > n$ en $m + n$ is oneven. Hierdoor kunnen we stellen dat $y = ab$ wat maakt dat $y^2 = a^2 \cdot b^2$ waaruit volgt dat $2mn = a^2 \cdot b^2$. Dan nemen we $m = a^2$ en $2n = b^2$, waarbij a en b gehele getallen zijn.

Omdat b een geheel getal is zal n twee keer een kwadraat zijn:

$$b^2 = 2n$$

En we weten dat n een even getal is. Daardoor kunnen we $n = 2p$ stellen.

$$b^2 = 2 \cdot 2p = 4p$$

Dus om voor b een geheel getal te krijgen zal p een kwadraat moeten zijn: $p = q^2$.
Wat maakt dat $n = 2q^2$.

Nu kunnen we $x^2 = m^2 - n^2$ omschrijven tot $x^2 + n^2 = m^2$. En omdat n^2 even is, is x^2 oneven om opnieuw een primitief Pythagoreïsch drietal te vormen. Zo krijgen we (x, n, m) met:

$$x = s^2 - t^2$$

$$n = 2st$$

$$m = s^2 + t^2$$

Waarbij geldt dat s en t gehele getallen zijn met $s > t$, $\text{ggd}(s, t) = 1$ en $s + t$ is oneven.

Nu weten we dat $n = 2st$, waarbij n een even kwadraat is, $n = 2q^2$. Dan krijgen we $2q^2 = 2st$. Omdat we weten dat elk natuurlijk getal precies op één manier (volgorde niet meegerekend) als een product van priemgetallen kunnen schrijven. Hierdoor kunnen we n op de volgende manier schrijven:

$$n = 2^n \cdot a^p \cdot b^d$$

$$b^2 = (2^n)^2 \cdot (a^p)^2 \cdot (b^d)^2$$

$$b^2 = 2n$$

Dus:

$$2n = 2 \cdot 2st$$

$$2n = 2^2 \cdot st$$

Maakt:

$$b^2 = 2^2 \cdot st$$

Hierdoor wordt:

$$2^2 \cdot st = (2^n)^2 \cdot (a^p)^2 \cdot (b^d)^2$$

Met a en b groter dan twee en $\text{ggd}(a, b) = 1$.

Waardoor geldt dat $s = (a^p)^2$ en $t = (b^d)^2$. Dit laat zien dat s en t dus kwadraten zijn.

Omdat we nu weten dat s , t , en m kwadraten zijn kunnen we $s = u^2$ noemen, $t = v^2$ noemen en $m = w^2$ noemen. Vervolgens kunnen we deze substitueren in de vergelijking van $m = s^2 + t^2$ waardoor je nu krijgt:

$$u^4 + v^4 = w^2$$

Als we nu helemaal terugkijken bij het begin hebben we gesteld dat $z = m^2 + n^2$. Hierdoor weten we dat m kleiner is dan z . Daarna hebben we m gelijkgesteld aan w^2 , waardoor w ook kleiner is dan z . Maar omdat de vergelijking een geheeltallige oplossing zou hebben wanneer z de kleinst mogelijke waarde is, terwijl we nu de waarde w gevonden hebben die kleiner is dan z , spreekt dit de gestelde bewering tegen.

Nu hebben we gevonden dat de bewering, dat er wel geheeltallige oplossingen voor x , y , en z in de vergelijking $x^4 + y^4 = z^2$ bestaan, niet waar is. Wat maakt dat de bewering, dat er geen geheeltallige oplossingen zijn voor x , y , en z in de vergelijking $x^4 + y^4 = z^2$ bestaan, wel waar is.

Volledige bewijs voor de laatste stelling van Fermat:

In deze paragraaf refereer ik naar het werk van Peter Lanser uit zijn wetenschappelijk studieboek *De Laatste Stelling van Fermat* (2013).

Het bewijs voor de laatste stelling van Fermat is te complex om te behandelen in dit profielwerkstuk. In 1995, toen het volledige bewijs werd gepubliceerd konden maar liefs zes mensen over de wereld dit manuscript lezen en begrijpen (G. Klijn, persoonlijke communicatie, 15 februari 2022). Wel ga ik bespreken hoe dit tot stand is gekomen en wie daarbij betrokken zijn geweest.

Het bewijs voor de stelling is uiteindelijk tot stand gekomen door niet alleen rekenkundig, maar ook meetkundig naar het probleem te kijken. De oplossing ligt in bepaalde meetkundige objecten die voorheen als twee individuele onderwerpen die ver van elkaar verwijderd werden beschouwd.

De eerste die hier een begin mee maakten waren Yutaka Taniyama en Goro Shimura. Zij maakte een bewering bekend over deze twee meetkundige objecten bij een internationaal wiskundig symposium in 1955. Zij beweerde dat er tussen deze twee individuele onderwerpen een brug bestond. Dit leed dertig jaar later tot een veronderstelling van de wiskundige Gerhard Frey in 1985, dat er wel een oplossing van de vergelijking van Fermat bestond en dat zijn laatste stelling niet waar is.

Gerhard beweerde dat dit te bewijzen doormiddel van het ontkrachten van de bewering die Taniyama en Shimura eerder hadden verondersteld. Een jaar nadat Gerhard dit idee bekend had gemaakt, heeft de wiskundige Ken Ribet aangetoond dat wat Gerhard heeft gezegd inderdaad leidt oplossing van de laatste stelling van Fermat.

Dit zorgde er andersom voor, dat wanneer er aangetoond kon worden dat de bewering van Taniyama en Shimura juist is, de vergelijking van Fermat geen oplossingen heeft en is bewezen dat de laatste stelling van Fermat inderdaad waar is.

Dit opende voor Andrew Wiles een deur naar het bewijzen van de stelling. Na zes jaar werken heeft hij op 23 juni 1993 dit bewijs tijdens een wiskundeconferentie in Cambridge voorgelegd. Nadat hij zijn wiskundig bewijs had voorgelegd moest dit worden nagekeken door de zogenoemde 'referees'. Pas wanneer zij het hebben goedgekeurd wordt het manuscript met het bewijs als geldend beschouwd.

Deze 'referees' hebben in het derde hoofdstuk van het manuscript een fout gevonden. Hierdoor heeft Wiles zijn bewijs opnieuw moeten leveren met zijn fout gecorrigeerd. Dit is hem gelukt en in mei 1995 heeft hij het bewijs van maar liefst 108 pagina's gepubliceerd en heeft hij de stelling van Fermat bewezen.

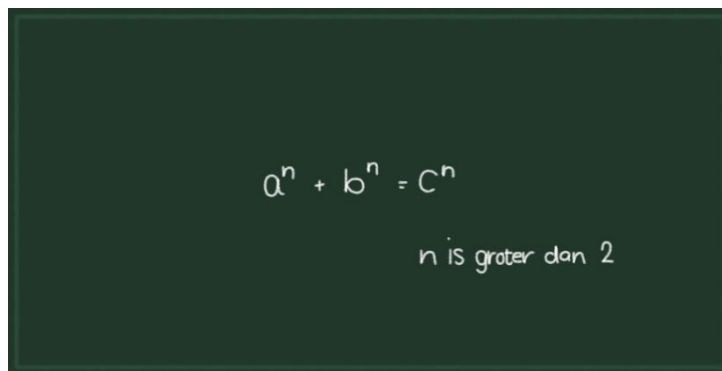
Verwerken en analyseren van het tweede bijgeschreven hoofdstuk:

In deze paragraaf refereer ik naar mijn eigen werk over het tweede bijgeschreven hoofdstuk geschreven voor dit profielwerkstuk (Kroonstuiver, 2022).

Dit keer ontwaakt Robert in een lokaal en merkt op dat er een vrouw binnen komt lopen. Dit is voor hem de eerste keer dat een vrouw hem komt vertellen over wiskunde. Deze tweede les wordt gegeven door Sophie Germain en ze begint de les met het herhalen van de stelling van Pythagoras. Als hulpmiddel gebruikt zij hierbij het grote bord vooraan in de klas.

Germain schrijft de stelling van Pythagoras op het bord en laat daarbij ook een voorbeeld met gehele getallen zien, de wel bekende $3^2 + 4^2 = 5^2$. Op deze manier begint zij met het introduceren van de wiskundige 'Lord Wanhoop', een verzonnen naam voor Pierre de Fermat en zijn stelling.

Wanneer Germain de stelling op het bord schrijft, snapt Robert het gelijk, want a n-keer gehupt plus b n-keer gehupt is gelijk aan c n-keer gehupt met een n voor elk getal die groter is dan twee, zie figuur 24. Ze zegt daarbij dat deze stelling nooit op een heel getal uit zal komen voor een n die groter is dan twee en noemt dit de laatste stelling van Lord Wanhoop.


$$a^n + b^n = c^n$$

n is groter dan 2

Figuur 24 overgenomen van 'Robert en zijn avontuur op weg naar de getallenhemel: Het verhaal' (Kroonstuiver, 2022) p. 21

Hierna vraagt Germain aan Robert om de stelling eens uit te proberen voor $n=3$ met behulp van de rekenmachine. Als Robert het probeert, weet hij eigenlijk niet zo goed hoe hij er mee moet werken. Germain legt aan Robert uit hoe je heen huppen en terug huppen in de rekenmachine moet zetten en hij is verbaasd wat dat ding allemaal kan doen.

Na het rekenen met een aantal getallen voorbeelden merkt Robert op dat het inderdaad niet lijkt uit te komen op hele getallen. Hij vraagt zich dan wel af waarom deze stelling zo bijzonder is als het toch altijd maar op een onverstandig (irrationeel) getal uitkomt. Waardoor Germain uitlegt dat Lord Wanhoop hier heel lang geleden een bewijs voor heeft gevonden, maar dat hij dit nooit aan iemand heeft verteld en dit nog steeds weigert in de getallenhemel.

Hierdoor denkt Robert dat de stelling helemaal nooit is bewezen, maar Germain legt hem al gauw uit dat iemand dit heel recent is gelukt. Dit is gedaan door Andrew Wiles met een heel moeilijk bewijs van meer dan honderd pagina's lang, legt

Germain verder uit. Ook vertelt zij dat Wiles vroeger een leerling was van Teplotaxl en Robert kan het bijna niet geloven.

Hij raakt heel enthousiast en wil later ook zo veel betekenen voor de wiskunde. Zo komt hij op de vraag wat Germain eigenlijk voor bijgedragen heeft geleverd aan de wiskunde. Daarom legt zij uit dat zij van groot belang is geweest voor het bewijzen van de laatste stelling van Lord Wanhoop voor de prima getallen (priemgetallen), maar vind dat die uitleg weer voor een andere nacht is.

Robert merkt dat er een einde komt aan zijn tweede les en hij vindt dit erg jammer. Germain stelt hem gerust dat ze zeker nog een keer terugkomt en Robert was opgelucht dit te horen. Zo komt er een einde aan de tweede nacht en droomt Robert verder over het zwemmen in een zwembad vol met probeersels voor de laatste stelling van Lord Wanhoop.

Discussie:

Het eindresultaat van dit profielwerkstuk zijn twee hoofdstukken geschreven als een vervolg van het boek *De telduivel* (Enzensberger, 1997). Ik ben zelf erg tevreden met de hoofdstukken die ik bijgeschreven heb. Toch zijn er altijd nog gebreken.

Zo wil ik ingaan op de onderwerpen die ik heb gekozen om over bij te schrijven. Ik ben erg tevreden met het kiezen van de stelling van Pythagoras als eerste onderwerp. Het is een mooi eerste hoofdstuk geworden met een duidelijke en kindvriendelijke uitleg. Het probleem zit dan ook bij het tweede hoofdstuk. Dit onderwerp was achteraf te moeilijk voor kinderen en hierdoor liep ik vast bij het schrijven.

De laatste stelling van Fermat is, naast dat het moeilijk is, niet een stelling waarvoor veel toepassingen zijn zoals bij de stelling van Pythagoras. Hierdoor werd het tweede hoofdstuk vrij kort en was er naast de stelling zelf niet zo veel over te vertellen. Ingaan op één van de bewijzen, zoals in het verslag, kon vanwege de complexiteit ook niet. Een vervolgonderwerp dat in gaat op bijvoorbeeld assenstelsels en coördinaten zou beter zijn geweest.

Een onderwerp als assenstelsels en coördinaten is makkelijker uit te leggen en wordt in het onderwijs veel toegepast, waardoor er meer over te vertellen valt en beter zou aanslaan bij de doelgroep voor dit schrijfwerk. Ook is dit onderwerp een goed vervolg voor de stelling van Pythagoras, aangezien het wordt toegepast bij het berekenen van de afstand tussen twee punten (coördinaten).

Toch vond ik het wel erg leuk om de laatste stelling van Fermat in het verslag te behandelen en te puzzelen met het bewijs voor $n = 4$, ik had het niet anders willen doen. Graag had ik meer hoofdstukken geschreven en het voorbeeld over assenstelsels en coördinaten uitgewerkt, maar helaas is er een eind gekomen aan dit profielwerkstuk.

Literatuurlijst:

Berner, R. S. (1997) overgenomen uit *De telduivel* [Foto]. Amsterdam: De Bezige Bij.

De Bezige Bij. (Z.d.) *Hans Magnus Enzensberger*. Geraadpleegd op 18 december, van <https://www.debezigebij.nl/auteur/hans-magnus-enzensberger/>

Deutsche National Bibliothek. (2021, 12 februari). Geraadpleegd op 18 december, van <https://portal.dnb.de/opac.htm?method=simpleSearch&cqlMode=true&query=nid%3D118530534>

Enzensberger, H. M. (1997). *De telduivel: Een hoofdkussen voor iedereen die bang voor wiskunde is*. Amsterdam: De Bezige Bij.

Heath, T. L. (Ed.). (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Courier Corporation.

Kroonstuiver R. H. (2022). *Robert en zijn avontuur op weg naar de getallenhemel: Het verhaal* (profielwerkstuk). Bertrand Russell College, Krommenie.

Kroonstuiver R. H. (2022). *Robert en zijn avontuur op weg naar de getallenhemel: Het verhaal* (profielwerkstuk) [Foto]. Bertrand Russell College, Krommenie.

Lanser, P. (2013). *De Laatste Stelling van Fermat: De geschiedenis en de oplossing van het beroemdste probleem uit de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

Loomis, E. S. (1940). *The Pythagorean Proposition*. Edward Brothers, inc. <https://ia801606.us.archive.org/5/items/in.ernet.dli.2015.84599/2015.84599.The-Pythagorean-Proposition.pdf>

Steinz, P. (1998, 27 februari). Gesprek met Hans Magnus Enzensberger over wiskunde voor kinderen; Wiskunde is te mooi om over te laten aan studieboeken. NRC. Geraadpleegd op 23 januari 2022, van <https://www.nrc.nl/nieuws/1998/02/27/gesprek-met-hans-magnus-enzensberger-over-wiskunde-7389416-a725209>

Van de Craats, J. (2005). *Babylonisch rekenen* [Foto]. Euclides, 80(4), 234-237 https://pure.uva.nl/ws/files/3883811/41632_babylon.pdf

Van Houts, C. (Z.d.) *Hans Magnus Enzensberger* [Foto]. Geraadpleegd op 18 december van <https://www.debezigebij.nl/auteur/hans-magnus-enzensberger/>

Fles van Klein. (2022). [Foto]. Fles van Klein <https://flesvanklein.nl/over/>

Logboek:

Gebeurtenis:	Datum:	Begintijd:	Eindtijd:	Aantal minuten:
Informatiedag profielwerkstuk	23-jun-21	08:30	11:30	180
Informatiedag profielwerkstuk	24-jun-21	08:30	11:30	180
Bespreking over een onderwerp mnr Klijn	9-sep-21	10:50	11:20	30
Het lezen van het eerste nacht van De Telduivel	15-sep-21	19:36	19:53	17
Informatie over de auteur verzamelen	22-sep-21	13:30	14:15	45
Hoofdgedachte bedenken en doelen uitwerken	23-sep-21	20:18	20:25	7
Hoofdgedachte bedenken en doelen uitwerken	23-sep-21	20:47	21:17	30
Vormgeven aan het begin van het verslag	28-sep-21	17:45	18:15	30
Lezen tweede nacht De Telduivel	12-okt-21	22:30	22:45	15
Lezen derde nacht De Telduivel	13-okt-21	22:45	23:04	19
Lezen vierde nacht De Telduivel	14-okt-21	23:21	23:43	22
Lezen vijfde nacht De Telduivel	9-nov-21	11:45	12:02	17
Lezen zesde nacht De Telduivel	9-nov-21	12:02	12:20	18
Lezen zevende nacht De Telduivel	9-nov-21	12:20	12:37	17
Lezen achtste nacht De Telduivel	9-nov-21	12:37	13:05	28
Lezen negende nacht De Telduivel	9-nov-21	13:28	13:43	15
Lezen tiende nacht De Telduivel	9-nov-21	13:43	13:58	15
Lezen elfde nacht De Telduivel	11-nov-21	20:05	20:21	16
Lezen twaalfde nacht De Telduivel	12-nov-21	20:21	20:48	27
Bespreken meneer Klijn voor de nieuwe onderwerpen	15-nov-21	10:15	10:35	20
Research naar bronnen	15-nov-21	10:45	11:45	60
Research naar bronnen	15-nov-21	15:40	16:20	40
Volume 1 van de dertien boeken van de elementen besteld	16-nov-21	10:15	10:31	16
Begin nieuw hoofdstuk (de dertiende nacht)	16-nov-21	14:00	16:00	120
Begin nieuw hoofdstuk (de dertiende nacht)	16-nov-21	20:00	20:49	49
Pythagoras boom maken	17-nov-21	14:15	15:30	75
Pythagoras beginnen met uitleggen en toevoegen aan het nieuwe hoofdstuk	18-nov-21	13:15	14:15	60
Euclides over de stelling van Pythagoras lezen	18-nov-21	18:04	19:55	111
Verder met het schrijven van het nieuwe hoofdstuk	18-nov-21	20:44	00:44	196
Verder met het schrijven van het nieuwe hoofdstuk	19-nov-21	00:00	00:00	44
Verder met het schrijven van het nieuwe hoofdstuk	20-nov-21	20:06	23:36	210
Verder met het schrijven van het nieuwe hoofdstuk	21-nov-21	11:45	14:30	165
Verder met het schrijven van het nieuwe hoofdstuk	21-nov-21	17:00	23:55	415
Herlezen van het nieuwe hoofdstuk	22-nov-21	09:20	09:41	21
Lezen Pandora's Breeches	5-dec-21	22:55	23:30	35
Lezen de laatste stelling van Fermat Zebrareeks	13-dec-21	23:00	00:15	75
Lezen de laatste stelling van Fermat Zebrareeks	14-dec-21	10:03	11:20	77
Werken inhoud PWS	18-dec-21	11:00	14:00	180
Werken inhoud PWS	19-dec-21	15:00	17:23	143
Werken inhoud PWS	20-dec-21	14:00	16:15	135
Werken inhoud PWS	21-dec-21	11:00	18:19	439
Werken inhoud PWS	25-dec-21	12:00	15:00	180
Werken inhoud PWS	26-dec-21	11:00	16:30	330
Stelling van Fermat	27-dec-21	12:00	16:30	270

Stelling van Fermat	28-dec-21	12:30	18:00	330
Stelling van Pythagoras	30-dec-21	19:00	20:00	60
Stelling van Pythagoras	31-dec-21	11:30	14:00	150
Stelling van Pythagoras	1-jan-22	14:00	18:00	240
Stelling van Fermat	2-jan-22	08:30	10:00	90
Stelling van Fermat	2-jan-22	15:30	16:30	60
Stelling van Fermat + stelling van Pythagoras	21-jan-22	13:00	21:30	510
Stelling van Fermat + stelling van Pythagoras	22-jan-22	12:30	17:30	300
Stelling van Fermat	22-jan-22	18:30	21:30	180
Stelling van Fermat	23-jan-22	13:30	16:30	180
Deelontwerp 1	24-jan-22	21:40	22:55	75
Aanpassingen kritiek vader	27-jan-22	20:20	21:40	80
Bewijs n=4	28-jan-22	11:45	14:15	150
Bewijs n=4	29-jan-22	15:00	16:00	60
Bewijs n=4	30-jan-22	12:00	22:07	607
Bewijs n=4	31-jan-22	10:15	10:45	30
Bewijs n=4	31-jan-22	12:45	13:15	30
Bewijs n=4	31-jan-22	14:15	15:15	60
Bewijs n=4	1-feb-22	11:00	12:30	90
Bewijs n=4	2-feb-22	14:50	18:00	210
Werken inhoud PWS	9-feb-22	17:00	19:00	120
Verder met het schrijven van het nieuwe hoofdstuk	15-feb-22	10:00	13:00	180
Verder met het schrijven van het nieuwe hoofdstuk	15-feb-22	21:00	22:00	60
Verder met het schrijven van het nieuwe hoofdstuk	16-feb-22	08:15	09:15	60
Werken inhoud PWS	16-feb-22	11:45	14:15	150
Werken inhoud PWS	16-feb-22	20:00	01:15	315
Werken inhoud PWS	17-feb-22	07:00	10:00	180
Werken inhoud PWS	17-feb-22	14:15	15:15	60
Verloren uren, vooral besprekingen met meneer Klijn	g.d.	g.d.	g.d.	240
Totaal aantal uren:				150,85